Prova scritta di Algebra lineare del 16 settembre 2011

Esercizio 1. Per quali valori del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} (1+k)x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (1+k)y + 2z = 1 \\ x - y + kz = k+1 \end{cases}$$

non possiede soluzioni?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z \\ 4x + z \end{pmatrix}$$

Si determini la matrice che rappresenta φ rispetto alla base

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ ed alla base

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ -9 & -8 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare:

(1) Il polinomio caratteristico di A;
(2) Gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
(3) Il polinomio minimo di A.
(4) Dire, motivando la risposta, se la matrice risulta triangolabile su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.
(5) Dire, motivando la risposta, se la matrice risulta diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Siano $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi di $\mathbb{R}^2$, e sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 4x - 4y \end{pmatrix}$$

Si consideri l'applicazione lineare

$$\Phi : V \to V, \qquad \Phi(g) = f \circ g \quad \text{(composizione di } g \text{ e } f\text{)}.$$

(1) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(\Phi)$ e completarla ad una base di V.
(2) Gli elementi di $\mathrm{Ker}(\Phi)$ a traccia nulla.

Esercizio 5. Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V tale che $\varphi(U) \subseteq U$ per ogni sottospazio U di V. Dimostrare che esiste uno scalare λ tale che $\varphi = \lambda Id_V$, dove Id_V è l'identità.