Prova scritta di Algebra lineare del 17 febbraio 2011

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Si considerino il sottospazio U generato dai due vettori

$$p_1(x) = x^2 + x; \qquad p_2(x) = 2x^2 + 1$$

e, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sottospazio

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \text{ tali che } p(2) = k\,p(1)\}.$$

Determinare, al variare di k in $\mathbb{R}$, la dimensione ed una base del sottospazio $U \cap W$ di V.

Esercizio 2. Sia $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi di $\mathbb{R}^2$, e sia $v \in \mathbb{R}^2$ il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to \mathbb{R}^2 \\ f &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

(1) Mostrare che Φ è lineare;
(2) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(\Phi)$ e completarla ad una base di V.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A;
(2) per ogni autovalore, determinare la dimensione ed una base del rispettivo autospazio.
(3) dire se A è diagonalizzabile
(4) determinare il polinomio minimo di A.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ l'immagine di f.

(1) Determinare il rango di f ed una base di V.
(2) Calcolare la dimensione di $V + \mathrm{Ker}(f)$.
(3) Calcolare traccia, determinante e polinomio caratteristico della restrizione $f_{|V}\colon V \to V$.

Esercizio 5. Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $\varphi^* : V^* \to V^*$ l'endomorfismo duale. Dimostrare che φ^* è diagonalizzabile se e solo se φ lo è. Equivalentemente, dimostrare che una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se lo è la sua trasposta.