Varietà simplettiche e bracket di Magri.

X varietà differenziabile (complessa) $\quad T_X$ fibrato tangente

$\Omega^* = \bigoplus_{i \geq 0} \Omega^i$ fascio delle forme differenziali.

Ω^* è un fascio di algebre graduate

Dato $\eta \in \Gamma(T_X)$ campo di vettori denotiamo

$i_\eta \in \mathrm{Der}^{-1}(\Omega^*, \Omega^*)$ come

$i_\eta(f) = 0$ se $f \in \Omega^0$

$$i_\eta(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \eta(\alpha_i) \wedge \dots \wedge \alpha_k \qquad \alpha_i \in \Omega^1$$

i_η = prodotto interno per η. Notare che

$$T_X \times \Omega^1 \to \Omega^0 \qquad (\eta, \alpha) \mapsto i_\eta(\alpha)$$

è l'usuale accoppiamento di dualità.

<u>Definizione</u> Dato $\eta \in \Gamma(T_X)$ si definisce la <u>derivata di Lie</u>

$$l_\eta : \Omega^k \to \Omega^k \qquad l_\eta = [i_\eta, d]$$

dove d = de Rham

Dato che $\deg(i_\eta) = -1$ e $\deg(d) = 1$ si ha $[i_\eta, d] = i_\eta \circ d + d \circ i_\eta$

<u>Formula di Cartan:</u> $\forall\, \eta, \nu \in \Gamma(T_X)$, vale

$$i_{[\eta,\nu]} = [l_\eta, i_\nu] = [[i_\eta, d], i_\nu]$$

<u>Dim</u> Sono entrambe derivazioni di grado -1, basta verificarle sulle 1-forme dx_i, x_i coordinate locali

Più in generale se $f \in \Omega^0$ si ha

$$i_{[\eta, \nu]}(df) = \eta\nu(f) - \nu\eta(f)$$

$$[[i_\eta, d], i_\nu](df) = [i_\eta, d](\nu(f)) - i_\nu(+d\,\eta(f)) = \eta(\nu(f)) - \nu(\eta(f)) \qquad \square$$

<u>Definizione</u> Una struttura <u>presimplettica</u> su X è data da $w \in \Gamma(X, \Omega^2)$ non degenere.

Non degenere significa che l'applicazione

$$T_X \longrightarrow \Omega^1 \qquad \eta \longmapsto i_\eta(w)$$

è un isomorfismo. antisimmetrico

Consideriamo il suo inverso

$$f : \Omega^1 \longrightarrow T_X \qquad i_{f(\alpha)}(w) = \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega^1$$

e le due applicazioni bilineari

$$\Omega^1 \times \Omega^1 \to \Omega^0 \qquad (\alpha, \beta) \longmapsto \langle \alpha, \beta \rangle_f = i_{f(\alpha)}(\beta)$$

$$\Omega^1 \times \Omega^1 \to \Omega^1 \qquad (\alpha, \beta) \longmapsto [\alpha, \beta]_f \quad , \text{ dove}$$

$$[\alpha, \beta]_f = i_{f(\alpha)}(d\beta) - i_{f(\beta)}(d\alpha) + d\langle \alpha, \beta \rangle_f \qquad (\text{Bracket di Magri})$$

Dato che f è antisimmetrica, anche $\langle\,\rangle_f$ e $[\,,]_f$ sono antisimmetriche.

<u>Lemma</u>: Sono condizioni equivalenti:

1) $dw = 0$
2) $f : (\Omega^1, [\,,]_f) \longrightarrow (T_X, [\,,])$ è un morfismo di Lie.

Se ciò accade X si dice <u>simplettica</u>

- <u>Dimostrazione</u> Si ha che $d\omega = 0$ se e solo se $i_{f(\alpha)}(i_{f(\beta)}\omega) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^1$. Dunque

$$i_{[f(\alpha), f(\beta)]}\omega = [[i_{f(\alpha)}, d], i_{f(\beta)}]\omega = [i_{f(\alpha)}, d]\beta - i_{f(\beta)}[i_{f(\alpha)}, d]\omega$$

$$= i_{f(\alpha)}(d\beta) + d\, i_{f(\alpha)}(\beta) - i_{f(\beta)} i_{f(\alpha)}(d\omega) - i_{f(\beta)}(d\alpha) = [\alpha, \beta]_f - i_{f(\beta)} i_{f(\alpha)}(d\omega)$$

e quindi

$$[f(\alpha), f(\beta)] = f([\alpha, \beta]_f) - f(i_{f(\alpha)} i_{f(\beta)} d\omega) \qquad \square$$

- <u>Corollario</u> se $d\omega = 0$ allora $(\Omega^1, [\,,]_f)$ è un'algebra di Lie e

$$[\mathrm{Ker}\, d, \mathrm{Ker}\, d]_f \subset \mathrm{Im}(d)$$

il bracket di Magri di due forme chiuse è esatto.

<u>Varietà simplettiche olomorfe e teorema di Bogomolov.</u>

Assumiamo adesso X compatta e ω olomorfa simplettica.

- Il braket di Magri su Ω^1 si estende naturalmente ad un Bracket sulle sezioni C^∞ e quindi abbiamo un isomorfismo di algebra di Lie

$$f: C^\infty(\Omega^1) \longrightarrow C^\infty(T_X)$$

che si estende ad un isomorfismo tra i rispettivi complessi di Dolbeault

$$A^{0,*}(\Omega^1) \xrightarrow{\ f\ } A^{0,*}(T_X)$$

$$[\alpha, \beta]_f = i_{f(\alpha)}(\partial\beta) - i_{f(\beta)}(\partial\alpha) + \partial\langle\alpha, \beta\rangle_f$$

- f è un isomorfismo di DGLA e quindi Def_X è controllato da $(A^{0,*}(\Omega^1), [\,,]_f, \bar\partial)$

Supponiamo adesso X Kähler, allora per il $\partial\bar\partial$-lemma i morfismi di DGLA

$$
\begin{tikzcd}
 & (\operatorname{Ker}\partial, [\,,\,]_L, \bar\partial) \arrow[dl] \arrow[dr, hook] & \\
\left(\frac{\operatorname{Ker}\partial}{\operatorname{Im}\partial}, 0, 0\right) & & (A^{0,*}(\Omega^1), [\,,\,]_L, \bar\partial)
\end{tikzcd}
$$

sono quasiisomorfismi: $(\operatorname{Ker}\partial = \{ a \in A^{0,*}(\Omega^1) \mid \partial a = 0 \})$

I rispettivi morfismi tra funtori di deformazione sono lisci e quindi, dato che $\left(\frac{\operatorname{Ker}\partial}{\operatorname{Im}\partial}, 0\right)$ è abeliana, tutte le ostruzioni si annullano (Bogomolov)

<u>Nota</u>: Per l'annullamento delle ostruzioni non è necessario che X sia Kähler ma è sufficiente che

$$b_2(X) = h^{2,0} + h^{1,0} + h^{0,2}$$

(Vedi ArXiv: 1109.4309)