Algebre di Lie, formule di Cartan e cicli algebrici.

Marco Manetti

Sapienza Università di Roma

Milano, 27 febbraio 2012

Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale L dotato di un'applicazione bilineare (bracket)

$$[,]\colon L \times L \longrightarrow L$$

che soddisfa le condizioni

Antisimmetria $[a, b] = -[b, a]$

Identità di Jacobi

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]]$$

Esempi

Lo spazio vettoriale $L = M_{n,n}$ delle matrici quadrate con il bracket definito come il commutatore

$$[A, B] = AB - BA.$$

Più in generale per ogni algebra associativa R possiamo definire una struttura di Lie ponendo

$$[a, b] = ab - ba, \qquad a, b \in R.$$

Esempio: lo spazio vettoriale L dei campi di vettori su di una varietà (differenziabile, complessa) è un'algebra di Lie. In coordinate locali $x_1, \ldots, x_n$ si ha

$$\left[\sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] =$$

$$= \sum_i \left(\sum_j f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Supponiamo di avere un'algebra associativa R di caratteristica 0 con unità. Definiamo (formalmente) l'esponenziale

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots \qquad a \in R.$$

Se $ab = ba$ si dimostra facilmente che $e^a e^b = e^b e^a = e^{a+b}$.

Se $ab \neq ba$, ossia se $[a, b] \neq 0$, in generale $e^a e^b \neq e^{a+b}$.

Se definiamo un "prodotto" $\bullet$ in R tramite la relazione $e^a e^b = e^{a \bullet b}$ si può dimostrare che vale:

Formula di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$a \bullet b = a + b + \frac{1}{2}[a, b] + \frac{1}{12}[a, [a, b]] + \frac{1}{12}[b, [b, a]] + \cdots$$

Si tratta di una serie infinita; in ogni termine compaiono bracket iterati; ossia $\bullet$ dipende solo dalla struttura di Lie.

Il prodotto $\bullet$ è associativo (trascurando i problemi di convergenza)

Un complesso è una successione di spazi vettoriali ed applicazioni lineari

$$(V^*, d): \qquad \cdots V^i \xrightarrow{d} V^{i+1} \xrightarrow{d} V^{i+2} \cdots, \qquad i \in \mathbb{Z}$$

tali che $d^2 = 0$.

Dato un complesso (V^*, d) ed un elemento $v \in V^i$, sia $i = \bar{v}$ il suo grado.

I gruppi di coomologia del complesso sono

$$H^i(V^*, d) = \frac{\ker d \colon V^i \to V^{i+1}}{d(V^{i-1})}.$$

Da adesso tutti i campi saranno di caratteristica 0!

Un'algebra di Lie differenziale graduata (DGLA) è un complesso (L^*, d) dove è definito un bracket

$$[,]\colon L^i \times L^j \to L^{i+j}$$

che soddisfa:

Antisimmetria graduata: $[a,b] = -(-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b,a]$

Leibniz graduato: $d[a,b] = [da,b] + (-1)^{\bar{a}}[a,db]$

Jacobi graduato: $[[a,b],c] = [a,[b,c]] - (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b,[a,c]]$

Esempio: Sia (V, d) un complesso di spazi vettoriali. Poniamo

$$\operatorname{Hom}^*(V, V) = \oplus_n \operatorname{Hom}^n(V, V),$$

dove

$$\operatorname{Hom}^n(V, V) = \{f\colon V \to V \text{ lineare} \mid f(V^i) \subset V^{i+n},\ \forall i\}.$$

(e.g. $d \in \operatorname{Hom}^1(V, V)$). Allora $\operatorname{Hom}^*(V, V)$ è una DGLA con bracket=commutatore graduato:

$$[f, g] = fg - (-1)^{\bar{f}\,\bar{g}} gf$$

e differenziale $\delta f = [d, f]$.

Esempio: l'algebra di Kodaira-Spencer.
Sia X una varietà complessa, $A_X^{0,p}(\Theta_X)$ lo spazio vettoriale delle $(0,q)$-forme differenziali a valori nel fibrato tangente. Il complesso di Dolbeault

$$KS_X: \qquad 0 \to A_X^{0,0}(\Theta_X) \xrightarrow{\bar\partial} A_X^{0,1}(\Theta_X) \xrightarrow{\bar\partial} A_X^{0,2}(\Theta_X) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

possiede una struttura naturale di DGLA.

Il bracket su KS_X è definito come l'unica estensione del bracket naturale sullo spazio $A_X^{0,0}(\Theta_X)$ dei campi di vettori di tipo $(1,0)$ che è bilineare rispetto alle forme differenziali antiolomorfe. (ossia i $d\bar z$ si portano fuori dal bracket).

Sia $B \subset \mathbb{C}^n$ un (piccolo) polidisco aperto di centro 0 e sia $f\colon M \to B$ un applicazione olomorfa e propria, con M varietà complessa. Supponiamo anche che f sia una submersione, ossia senza punti critici.

Osservazioni:

Per il teorema di Ehresmann le fibre $f^{-1}(t)$ sono diffeomorfe.

In generale le fibre $f^{-1}(t)$ NON sono biolomorfe.

Esempio: $B \subset \mathbb{C}$,

$$M = \{([x_0, x_1, x_2], t) \in \mathbb{P}^2 \times B \mid x_0 x_2^2 = x_1^3 - x_0^2 x_1 - t x_0^3\}$$

è una famiglia non banale di curve ellittiche.

Il problema dei *moduli locali* consiste nello studiare l'applicazione

$$B \to \mathcal{M} = \frac{\text{varietà complesse compatte}}{\text{biolomorfismo}}, \quad t \mapsto f^{-1}(t).$$

Ci sono enormi problemi tecnici, ad esempio se vogliamo tale applicazione continua, allora $\mathcal{M}$ non può essere di Hausdorff.

Esistono esempi dove $f^{-1}(t) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ per ogni $t \neq 0$, ma $f^{-1}(0) =$Superficie di Segre$\neq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

La soluzione (Kodaira 1958) consiste nel modificare il problema e considerare il concetto di *deformazione*.

Sia X una varietà complessa compatta,

una *deformazione* di X è una coppia di applicazioni olomorfe $X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} B$ con f propria e senza punti critici ed i un biolomorfismo tra X e $f^{-1}(0)$.

In realta ci interessa studiare il comportamento delle fibre $f^{-1}(t)$ per t molto vicino allo 0, quindi possiamo restringere B a piacimento.

Due deformazioni sulla stessa base B:

$$X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} B, \qquad X \xrightarrow{j} N \xrightarrow{g} B,$$

si dicono *isomorfe* se, a meno di restringere B esiste un diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & M \arrow[d, "f"] \arrow[dl] \\ N \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

commutativo con la freccia verticale un isomorfismo di varietà.

Cosa c'è di diverso?

Se $\phi\colon X \to X$ è un automorfismo, in generale le due deformazioni

$$X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} B, \qquad X \xrightarrow{i\phi} M \xrightarrow{f} B,$$

non sono isomorfe.

La DGLA di Kodaira-Spencer ha un ruolo centrale nello studio delle deformazioni. Supponiamo B un piccolo disco aperto in $\mathbb{C}$ e sia t una coordinata olomorfa su B. Possiamo deformare la struttura complessa di X in maniera dipendente da t considerando come "nuove" funzioni olomorfe le f che soddisfano l'equazione

$$(\bar{\partial} + \mathcal{L}_\xi)f = 0,$$

dove $\mathcal{L}_\xi$ è la derivata di Lie nella direzione ξ e

$$\xi = t\xi_1 + t^2\xi_2 + t^3\xi_3 + \cdots , \quad \xi_n \in A^{0,1}(\Theta_X).$$

Le funzioni definite sopra sono delle "vere" funzioni olomorfe (provengono da una struttura complessa) se e solo se (Teorema di Newlander-Nirenberg) ξ soddisfa la *equazione di Maurer-Cartan*

$$\bar{\partial}\xi + \frac{1}{2}[\xi, \xi] = 0.$$

L'equazione precedente si traduce in una successione infinita di equazioni quadratiche:

1 $\bar\partial\xi_1 = 0$,

2 $\bar\partial\xi_2 + \frac{1}{2}[\xi_1, \xi_1] = 0$,

3 $\bar\partial\xi_3 + [\xi_1, \xi_2] = 0$

$\vdots$ $\quad\dots$

n $\bar\partial\xi_n + \frac{1}{2}\sum_i[\xi_i, \xi_{n-i}] = 0$

- Quindi l'ostruzione per l'esistenza di ξ_2 è che $[\xi_1, \xi_1]$ sia nullo in coomologia, l'ostruzione per l'esistenza di ξ_3 è che $[\xi_1, \xi_2]$ sia nullo in coomologia ecc.

Maurer-Cartan in ambito astratto!
Data una DGLA L definita su di un campo $\mathbb{K}$ (caratteristica 0) ed una $\mathbb{K}$-algebra locale artiniana A con campo residuo $\mathbb{K}$ definiamo

$$\mathrm{MC}_L(A) = \{\xi \in L^1 \otimes \mathfrak{m}_A \mid d\xi + \frac{1}{2}[\xi, \xi] = 0\},$$

dove $\mathfrak{m}_A$ è l'ideale massimale di A.
(Nelle pagine precedenti $L = KS_X$ e $A = \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$.) Otteniamo un funtore, detto di Maurer-Cartan

$$\mathrm{MC}_L \colon \mathbf{Art} \to \mathbf{Set}$$

(**Art** =categoria $\mathbb{K}$-algebre locali artiniane con campo residuo $\mathbb{K}$).

Idealmente, il funtore di Maurer-Cartan corrisponde alle deformazioni. Se vogliamo tenere conto degli isomorfismi tra di esse dobbiamo quozientare per *l'azione di gauge* e definire

$$\mathrm{Def}_L(A) = \frac{\mathrm{MC}_L(A)}{\sim}$$

dove $x \sim y$ se esiste $a \in L^0 \otimes \mathfrak{m}_A$ tale che

$$y = x + \sum_{n \geq 0} \frac{[a, -]^n}{(n+1)!}([a, x] - da)$$

Anche se non è chiaro a prima vista si tratta di un'azione del gruppo $L^0 \otimes \mathfrak{m}_A$ dotato del prodotto $\bullet$ di Baker-Campbell-Hausdorff.

Example

Prendendo l'algebra di Kodaira-Spencer come DGLA il funtore Def_{KS_X} classifica le deformazioni di X come varietà.

Ad essere onesti stiamo barando un po'.

Il funtore Def riguarda deformazioni su una base B che è un "punto grasso", ossia lo Spec di un anello locale Artiniano. Tuttavia, per criteri generali, queste deformazioni su base "molto piccola" (dette infinitesimali) determinano il larga misura tutte le altre. In alternativa possiamo completare KS_X rispetto a opportune norme di Sobolev e fare la teoria convergente.

Un morfismo di DGLA è un'applicazione lineare che commuta con i differenziali e con i brackets. Ogni morfismo di DGLA $f\colon L \to N$ induce in maniera naturale un morfismo di funtori

$$f\colon \operatorname{Def}_L \to \operatorname{Def}_M .$$

Un morfismo di DGLA si dice un quasiisomorfismo se induce un isomorfismo tra i gruppi di coomologia.

Theorem

Se $f\colon L \to M$ è un quasiisomorfismo di DGLA, allora la trasformazione naturale

$$f\colon \operatorname{Def}_L \to \operatorname{Def}_M$$

è un isomorfismo.

Deformazioni immerse di sottovarietà.

Sia adesso Z una sottovarietà liscia e compatta di X. Indichiamo con n la dimensione di X e con p la codimensione di Z. Una deformazione immersa di Z in X su base $(B, 0)$ è una sottovarietà $\mathcal{Z} \subset X \times B$ tale che

- La proiezione $\mathcal{Z} \to B$ è una submersione.
- $\mathcal{Z} \cap X \times \{0\} = Z$, $0 \in B$.

Due deformazioni immerse sono isomorfe se sono uguali a meno di restringimenti di B attorno a 0.

Anche in questo caso le deformazioni infinitesimali determinano le altre.

Problema: qual è la DGLA che le controlla? (o meglio qual è la classe di quasiisomorfismo di DGLA che le controlla?)

Un po' di pazienza: prima una costruzione generale.
Dato una DGLA L sul campo $\mathbb{K}$ indichiamo

$$L[t, dt] = L \otimes \mathbb{K}[t, dt],$$

dove $\mathbb{K}[t, dt] = \mathbb{K}[t] + \mathbb{K}[t]dt$ è il complesso di De Rham delle forme differenziali algebriche sulla retta affine.
Data $x(t) \in L[t, dt]$ e $a \in \mathbb{K}$ poniamo $x(a) \in L$ la valutazione di $x(t)$ per $t = a$ (e $dt = da = 0$).
Per ogni $a \in \mathbb{K}$ l'applicazione

$$L[t, dt] \to L, \qquad x(t) \mapsto x(a)$$

è un quasiisomorfismo di DGLA.

Dato un morfismo di DGLA $\chi\colon L \to M$ si definisce la *fibra omotopica* come

$$K(\chi) = \{(l, m(t)) \in L \times M[t, dt] \mid m(0) = 0,\ m(1) = \chi(l)\}.$$

La sua coomologia è uguale a quella del mapping cone di χ con i gradi shiftati di 1. In particolare se χ è iniettivo, allora

$$H^i(K(\chi)) = H^{i-1}(\mathrm{coker}(\chi)).$$

A che serve? Poiché non esistono strutture naturali di DGLA sul conucleo, la fibra omotopica è un ottimo surrogato.

Torniamo alla sottovarietà $Z \subset X$ con fibrato normale $N_{Z|X}$ e consideriamo la successione esatta

$$0 \to A_X^{0,*}(\Theta_X)(-\log Z) \xrightarrow{\eta} A_X^{0,*}(\Theta_X) \xrightarrow{\pi} A_Z^{0,*}(N_{Z|X}) \to 0.$$

dove π è la proiezione naturale. Allora η è una inclusione di DGLA.

Theorem

Il funtore $\mathrm{Def}_{K(\eta)}$ *è isomorfo al funtore* $Hilb_Z$ *delle deformazioni immerse di* Z *in* X*.*

Formule di Cartan, ovvero come definire il differenziale di De Rham senza usare le coordinate.
Sia X varietà differenziabile. Per ogni campo di vettori η è definito il prodotto di contrazione forma-vettore

$$\mathrm{i}_\eta\colon A_X^p \to A_X^{p-1}, \quad \mathrm{i}_\eta(\omega) = \eta \lrcorner \omega,$$

Ossia $\mathrm{i}_\eta \in \mathrm{Hom}^{-1}(A_X^*, A_X^*)$.
Valgono le celebri *Formule di Cartan* (d differenziale di De Rham)

1. $\mathcal{L}_\eta = d\mathrm{i}_\eta + \mathrm{i}_\eta d = [d, \mathrm{i}_\eta]$ (derivata di Lie);
2. $\mathrm{i}_{[\eta,\rho]} = [\mathrm{i}_\eta, \mathcal{L}_\rho]$;
3. $0 = [\mathrm{i}_\eta, \mathrm{i}_\rho]$.

dove il $[,]$ a destra nelle formule è il commutatore graduato nella DGLA $\mathrm{Hom}^*(A_X^*, A_X^*)$.

Le formule di Cartan possono essere generalizzate al contesto delle DGLA:

Definizione: Siano L, M due DGLA, un'applicazione lineare $\mathrm{i}\colon L \to M$ di grado -1 si dice **omotopia di Cartan** se

$$[\mathrm{i}_a, \mathrm{i}_b] = 0, \qquad \mathrm{i}_{[a,b]} = [\mathrm{i}_a, d_M \mathrm{i}_b], \quad a, b \in L$$

Definizione: La derivata di Lie associata ad una omotopia di Cartan $\mathrm{i}\colon L \to M$ è l'applicazione

$$\mathcal{L}\colon L \to M, \qquad \mathcal{L}_a = d_M \mathrm{i}_a + \mathrm{i}_{d_L a}.$$

Facile esercizio: $\mathcal{L}$ è un morfismo di algebre di Lie (omotopo a 0 e quindi banale in coomologia)

Data una omotopia di Cartan $\mathfrak{i}\colon L \to M$ ed una sottoalgebra di Lie differenziale graduata $N \subset M$ tale che $\mathcal{L}(L) \subset N$ si ha:
Facile: $\mathfrak{i}\colon L \to M/N[-1]$ è un morfismo di complessi ($[-1]$ significa che i gradi sono abbassati di 1).
Difficile: Sia $\chi\colon N \to M$ l'inclusione. Esiste una costruzione canonica di morfismi di DGLA

$$L \xleftarrow{p} \Omega B(L) \xrightarrow{\mathfrak{i}_\infty} K(\chi),$$

con p quasiisomorfismo e $\mathfrak{i}_\infty$ uguale ad $\mathfrak{i} \circ p$ in coomologia (recall: $H^*(K(\chi)) = H^*(\operatorname{Coker}\chi[-1])$).

IL quasiisomorfismo di DGLA $p\colon \Omega B(L) \to L$ è chiamato in letteratura *costruzione Bar-Cobar*. (In pratica conviene usare le algebre L_∞ al posto della Bar-Cobar, ma in teoria è la stessa cosa.)

Conseguenza: data una omotopia di Cartan $\mathfrak{i}\colon L \to M$ ed un inclusione di DGLA $\chi\colon N \to M$ tale che $\mathcal{L}(L) \subset N$, è definita in maniera canonica una trasformazione naturale

$$\mathrm{Def}_L \simeq \mathrm{Def}_{\Omega B(L)} \xrightarrow{\mathfrak{i}_\infty} \mathrm{Def}_{K(\chi)}\,.$$

Esempio: L'applicazione dei periodi (variazione strutture di Hodge) può essere espressa in questo modo (Fiorenza - M. 2007), con $L = KS_X$ e M, N opportune.