Geometria. a.a. 2024-25, canale

Prova di autovalutazione 19 Novembre 2024

Esercizio 1. Si consideri il sistema di 4 equazioni in 5 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 4t \end{cases}$$

Scrivere la matrice A dei coefficienti del sistema. Scrivere la matrice completa C del sistema.
Studiare la compatibilità del sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$. Per $t = 1$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Esercizio 2. Sia $M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici due per due a coefficienti reali. Determinare un'applicazione lineare iniettiva $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ la cui immagine contenga le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare un'applicazione lineare $S\colon M_{22}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che l'applicazione composta $S \circ T$ sia l'identità.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano U e W i sottospazi di V definiti da

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right), \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

Determinare la dimensione di U e quella di W. Determinare una base per $U + W$. Determinare la dimensione di $U \cap W$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 4. Calcolare il prodotto $C = AB$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare le dimensioni di $\ker L_A$, $\mathrm{Im} L_B$, $\ker L_A \cap \mathrm{Im} L_B$, $\ker L_A + \mathrm{Im} L_B$ e dire se C è invertibile.

Esercizio 5 Calcolare per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da 0 e calcolare la matrice inversa di A_2