

## Esercizi del 30 settembre 2024

**Esercizio 1)** Siano  $A, B, C$  tre insiemi finiti contenenti rispettivamente  $a, b, c$  elementi.

1. se  $A \cap B$  contiene  $p$  elementi, quanti elementi contiene  $A \cup B$ ?
2. se  $A \cap B, A \cap C, B \cap C$  contengono rispettivamente  $p, q, r$  elementi e  $A \cap B \cap C = \emptyset$ , quanti elementi contiene  $A \cup B \cup C$ ?
3. se  $A \cap B, A \cap C, B \cap C$  e  $A \cap B \cap C = \emptyset$  contengono rispettivamente  $p, q, r$  e  $k$  elementi, quanti elementi contiene  $A \cup B \cup C$ ?

**Esercizio 2)** Determinare tutte le quaterne  $a, b, c, d$  di numeri razionali tali che

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0.$$

**Esercizio 3)** Denotiamo con  $\log$  il logaritmo in base 10. Determinare tutte le quaterne  $a, b, c, d$  di numeri razionali tali che

$$a + b \log 3 + c \log 5 + d \log 7 = 0.$$

**Esercizio 4)** Dimostrare che l'applicazione

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x,$$

è bigettiva. (Suggerimento: guardate la lezione sul principio di induzione per calcolare quanto vale  $\sum_{i=0}^{x+y} i$ .)

**Esercizio 5)** Siano  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$  tre applicazioni di insiemi disposte in serie. Prima convincetevi che il prodotto di composizione è associativo, ossia che  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ . Poi dimostrate che:

1. se  $g \circ f$  è iniettiva, allora  $f$  è iniettiva;
2. se  $g \circ f$  è surgettiva, allora  $g$  è surgettiva;
3. se  $g \circ f$  è bigettiva e  $h \circ g$  è iniettiva, allora  $f$  è bigettiva;
4. se  $g \circ f$  e  $h \circ g$  sono bigettive, allora  $f, g$  e  $h$  sono bigettive.

**Esercizio 6)** Sia  $f: A \rightarrow A$  un'applicazione di un insieme in sé. Dimostrare che se  $f \circ f$  è bigettiva allora anche  $f$  è bigettiva.

**Esercizio 7)** Siano  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$  due applicazioni di insiemi tali che  $g \circ f = \text{Id}_A$ . Dire, motivando la risposta se le seguenti tre affermazioni sono vere o false:

1.  $f \circ g = \text{Id}_B$ ;
2.  $(f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ g$ ;
3.  $((f \circ g) \circ (f \circ g)) \circ (f \circ g) = f \circ g$ .