Geometria. a.a. 2022–23

Prova scritta del 8 Febbraio 2023

Esercizio 1. Data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

calcolare:

(1) il rango di A,
(2) la matrice $I - A^2$,
(3) la matrice $(I + A)^{-1}$.

Soluzione. Tramite riduzione a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ricava che il rango è 1. Si verifica poi che $A^2 = AA$ (prodotto righe per colonne) è la matrice nulla quindi $I - A^2 = (I + A)(I - A) = I - 0 = I$ da cui segue anche che

$$(I + A)^{-1} = I - A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -2 & -3 & 10 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema di 4 equazioni nelle incognite $x_1, \ldots, x_4$, dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = t \\ x_1 - tx_2 - tx_4 = t \end{cases}$$

Determinare per quali valori di t il sistema è compatibile.

Soluzione Applichiamo eliminazione di Gauss e Rouché–Capelli:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & t \\ 1 & -t & 0 & -t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operazioni sulle righe}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t \\ 0 & 0 & 0 & -t+3 & \frac{t^2-3t}{2} \end{pmatrix}.$$

Dunque per $t \neq 3$ la matrice dei coefficienti ha rango massimo ed il sistema è compatibile (con soluzione unica). Per $t = 3$ sia la matrice dei coefficienti che la matrice completa hanno rango 3 e quindi il sistema è ancora compatibile (con infinite soluzioni).

Esercizio 3. Calcolare rango e segnatura della forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 + 78(x_1y_4 + x_4y_1) - 36(x_2y_3 + x_3y_2).$$

Soluzione La forma è definita positiva sul sottospazio generato dai primi due vettori della base canonica, quindi l'indice di positività è ≥ 2. Similmente, la forma è definita negativa sul sottospazio generato dagli ultimi due vettori della base canonica, quindi l'indice di negatività è ≥ 2. Dunque la forma bilineare è coatta ad avere rango 4 (il massimo possibile) e segnatura $(2, 2)$.

Esercizio 4. Sul campo reale, determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -t^3 + 36t = -t(t^2 - 36) = -t(t-6)(t+6)$$

e quindi gli autovalori sono $0, 6, -6$. Risolvendo i corrispettivi sistemi lineari $Ax = 0$, $Ax = 6x$ e $Ax = -6x$ troviamo i tre autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Siccome la matrice è simmetrica con autovalori distinti, sappiamo dalla teoria che v_1, v_2, v_3 è una base ortogonale. Per ottenere una base ortonormale basta dividere ciascun vettore per la sua norma.

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Consideriamo, al variare di $k \in \mathbb{R}$ le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k-1 & 1 \\ -2 & k & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e}\,, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Dimostrare che esiste *al più* un unico $k \in \mathbb{R}$ per cui A e A' sono simili[1].
(2) Determinare, spiegando il ragionamento, *se* esiste un $k \in \mathbb{R}$ per cui A e A' siano simili.

Soluzione Dato che matrici simili hanno la stessa traccia, per $k \neq 3$ le due matrici non sono simili. Per $k = 3$ le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico

$$p_A(t) = p_{A'}(t) = -t^3 + 5t^2 - 7t + 3 = (1-t)^2(3-t)$$

e quindi lo stesso determinante e gli stessi autovalori (con le stesse molteplicità algebriche). Guardiamo adesso alle molteplicità geometriche dell'autovalore 1.

$$rg(A - I) = 1, \qquad rg(A' - I) = 2.$$

Dunque A è diagonalizzabile, mentre A' non è diagonalizzabile. In conclusione A non è mai simile a A'.

[1] Equivalentemente, A e A' appartengono alla stessa classe di coniugio.