Geometria. a.a. 2022–23

Prova scritta del 12 Settembre 2023

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{C}^3$:

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \{iz_1 + z_2 - z_3 = 0\}.$$

(1) Determinare basi per ognuno di essi.
(2) Determinare una base di $U \cap W$.
(3) Determinare la dimensione di $U + W$.

Soluzione. (1) I vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e formano una base di U. Una base di W è data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) Dato che $u_1 = w_1$ e $u_2 \notin W$ si ha che $\dim(U \cap W) = 1$. Una base è formata dal vettore u_1.

(3) Dalla formula di Grassmann

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 1.$$

□

Esercizio 2. Discutere la compatibilità, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, del seguente sistema lineare a coefficienti reali di 3 equazioni nelle 4 incognite x, y, z, w

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ ky + w = k \\ x + y + kz + kw = 2. \end{cases}$$

Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, determinarne le soluzioni.

Soluzione. Riducendo a scala otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ ky + w = k \\ kw = 1. \end{cases}$$

Per $k \neq 0$ il sistema è compatibile e otteniamo la soluzione

$$x = \frac{1}{k^2} - kz, \quad y = 1 - \frac{1}{k^2}, \quad w = \frac{1}{k}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Per $k = 0$ il sistema non è compatibile. □

Esercizio 3. Sia $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$b(x, y) = x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1) + 5(x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_1).$$

(1) Stabilire se b è degenere o meno.
(2) Stabilire se b è (semi)definita positiva, (semi)definita negativa o indefinita.

Soluzione. (1) La matrice associata a b nella base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} .$$

Dato che $\det S = 20$, b è non degenere.

(2) Si ha che $b(e_1, e_1) = 1$ e $b(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = -2$, quindi b è indefinita.

□

Esercizio 4. Sul campo reale, determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soluzione. Gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21}) , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{21}) , \quad \lambda_3 = 1 .$$

I corrispondenti autovettori sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sono tra loro ortogonali per il teorema spettrale. Abbiamo

$$\|u_1\|^2 = \frac{1}{2}(21 + \sqrt{21}) , \quad \|u_2\|^2 = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{21}) , \quad \|u_3\| = 5 ,$$

e una base ortonormale di autovettori è data da $v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$, $i = 1, 2, 3$. □

Esercizio 5. (1) Dire se è possibile o meno, giustificando la risposta, determinare un'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ iniettiva e tale che $\operatorname{Im} g = \operatorname{Span}\{e_1 + e_2\}$, dove e_1, e_2 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(2) Sia $V \subseteq M_{2,3}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici A tali che il nucleo dell'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ contenga il vettore $e_1 - e_2 + e_3$, ossia tali che $L_A(e_1 - e_2 + e_3) = 0$, dove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) dire, motivando la risposta, se esiste $A \in V$ tale che L_A sia surgettiva;

(b) verificare che V è un sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

Soluzione.

(1) Una tale g è iniettiva se e solo se è suriettiva, ma $\dim(\operatorname{Im} g) = 1$, quindi $\operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}^2$.

(2) La condizione che $L_A(e_1 - e_2 + e_3) = 0$ equivale a dire $L_A(e_2) = L_A(e_1) + L_A(e_3)$, ossia che la seconda colonna è uguale alla somma della prima e della terza.

(a) basta prendere una matrice con le colonne 1 e 3 una base di $\mathbb{R}^2$ e con la colonna 2 uguale alla loro somma; ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) l'applicazione

$$M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,3}(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & a+b & b \\ c & c+d & d \end{pmatrix}$$

è lineare e iniettiva ed ha come immagine V, che quindi è un sottospazio vettoriale. In particolare, la restrizione $M_{2,2}(\mathbb{R}) \to V$ è lineare bigettiva e quindi $\dim V = \dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$.

□