Esame di Geometria,
corso di Laurea in Fisica

Anno accademico 2024/25

Prova scritta - 27 gennaio 2025

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Esercizio 1. Dato il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2kz = 1 \\ kx + (k+1)z = 2 \\ x - ky - z = -1 \\ 2kx + y = 3, \end{cases}$$

determinare

(a) al variare del parametro k il determinante della matrice completa;

(b) per quali valori del parametro k il sistema ha soluzione;

(c) per tali valori di k il numero delle soluzioni del sistema.

Traccia di soluzione: Il determinante della matrice completa è $3k^2 + 4k$, che si annulla per $k = 0$ e $k = -4/3$.

La matrice dei coefficienti del sistema ha 3 colonne e quindi può avere al massimo rango 3. Per Rouché–Capelli il sistema è incompatibile quando la matrice completa ha rango 4, ossia quando $3k^2 + 4k \neq 0$.

Mettendo al posto di k i due valori $k = 0$ e $4 = -4/3$ otteniamo due sistemi lineari a coefficienti numerici, e si verifica facilmente che entrambi hanno soluzione unica.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado al più 2 nella variabile t e sia $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ tale che $f(1+t) = 1+4t+5t^2$, $f(-t^2) = -2+t-t^2$ e $f(t+t^2) = 1+2t+3t^2$.

(a) Dire se f è unicamente determinata ;

(b) determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

Traccia di soluzione: I tre vettori $v_1 = 1+t$, $v_2 = -t^2$ e $v_3 = t+t^2$ formano una base di $\mathbb{R}_2[t]$: sia A è la matrice che ha come coefficienti le coordinate dei v_i nella base canonica $1, t, t^2$; allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Sappiamo dalla teoria che ogni applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume in una base.

L'immagine di f è lo span dei tre polinomi $1+4t+5t^2$, $-2+t-t^2$ e $1+2t+3t^2$, che nella base canonica corrispondono ai vettori colonna della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0 e quindi rango < 3. Il minore 2×2 di nord-ovest ha determinante $9 \neq 0$, quindi le prime due colonne sono linearmente indipendenti e formano una base dello span. Riepilogando, $1+4t+5t^2$ e $-2+t-t^2$ sono una base di $1+4t+5t^2$, $-2+t-t^2$.

Per il teorema del rango il nucleo ha dimensione 1, ed una base sarà data da un vettore $av_1 + bv_2 + cv_3$ con (a, b, c) soluzione non nulla dell'equazione

$$f(av_1 + bv_2 + cv_3) = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Già sappiamo che il minore 2×2 nord-ovest di B è invertibile, e quindi possiamo già fissare $c = -1$ e calcolare a, b risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ 4a + b = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a = 5/9, \quad b = -2/9.$$

In conclusione, una base del nucleo è il polinomio

$$\frac{5}{9}(1+t) - \frac{2}{9}(-t^2) + (t+t^2) = \frac{11}{9}t^2 + \frac{14}{9}t + \frac{5}{9}.$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) := (2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z)$.

(a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base standard;

(b) Determinare gli autovalori della matrice associata a f

(c) determinare, se esiste, una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per f.

Traccia di soluzione: La matrice che rappresenta f nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

che è simmetrica. Per il teorema spettrale reale A è diagonalizzabile ed esistono basi ortonormali di autovettori.

Il polinomio caratteristico è $-t(3-t)^2$ e quindi gli autovalori sono $\lambda = 0$ con molteplicità 1 (dato che A è diagonalizzabile non serve specificare: le molteplicità algebriche e quelle geometriche coincidono), e $\lambda = 3$ con molteplicità 2. Gli autospazi sono

$$V_0 = \ker(f) = \text{Span}(1, -1, -1), \qquad V_3 = \ker(f - 3I) = \{(x, y, z) \mid x = y + z\}.$$

Ogni base ortonormale di autovettori si ottiene scegliendo una base ortonormale per ogni autospazio e poi unirle assieme.

Il normalizzato di $(1, -1, -1)$, ossia $u_1 = (1, -1, -1)/\sqrt{3}$ è una base ortonormale di V_0.

I due vettori $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 1)$ sono una base di V_3 alla quale si può applicare il POGS:

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),$$

$$w_3 = v_3 - < v_3, u_2 > u_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (1/2, -1/2, 1),$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2).$$

Esercizio 4. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$\begin{aligned}\phi((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) :=& 2(x_1y_1 + x_3y_4 + x_4y_3) - x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4(x_1y_2 + x_2y_1 - x_4y_4) \\ & - x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.\end{aligned}$$

Determinare

(a) la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$;

(b) se ϕ è degenere o non-degenere;

(c) la segnatura di ϕ.

Traccia di soluzione: La matrice associata a ϕ è quella di coefficienti $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$, dove $e_1, \ldots, e_4$ è la base canonica; nella fattispecie

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

La restrizione di ϕ al sottospazio generato da e_1, e_3 è rappresentata dall matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ed è definita positiva: dunque l'indice di positività è $\phi_+ \geq 2$.

La restrizione di ϕ al sottospazio generato da e_2, e_4 è rappresentata dall matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ed è definita negativa: dunque l'indice di negatività è $\phi_- \geq 2$.

Dato che $\phi_+ + \phi_- = \mathrm{rk}(\phi) \leq 4$, l'unica possibilità è che la segnatura sia $(2, 2)$ e ϕ nondegenere.