1

I teoremi di Hilbert

Nello studio delle soluzioni di un sistema di equazioni algebriche

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)=0,\qquad i=1,\ldots,m,\quad f_i\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n],$$

è naturale adottare alcune manipolazioni algebriche in modo da ottenere nuove equazioni di più facile comprensione; un caso tipico è il metodo di riduzione a forma trapezoidale dei sistemi di equazioni lineari (eliminazione di Gauss). È generalmente utile considerare delle espressioni $g_j=\sum h_{ji}f_i$ nelle quali alcune delle variabili $x_1,\ldots,x_n$ non compaiono. Le ricette per esplicitare, se esistono, dei polinomi g_j come sopra fanno parte della teoria dell'eliminazione. In termini un po' più astratti possiamo dire che la teoria dell'eliminazione si occupa del seguente problema.

Dato un anello A ed un ideale $I\subset A[x_1,\ldots,x_n]$, determinare quando l'ideale $I\cap A$ è diverso da 0, ed in tal caso esplicitarne elementi non banali.

Lo strumento "basic" per eccellenza in teoria dell'eliminazione è il risultante, con il quale si riesce a dare una risposta più che soddisfacente al suddetto problema nel caso $n=1$. Il risultante sarà inoltre uno degli strumenti tecnici più usati nel resto di queste note. Il risultato di maggior rilievo teorico in teoria dell'eliminazione è invece il teorema degli zeri di Hilbert, del quale daremo una dimostrazione nella Sezione 1.5.

1.1 Il risultante di due polinomi

Sia A un anello, per ogni intero non negativo n indichiamo con $A[x]_{<n}$ il sottomodulo libero dei polinomi di grado minore di n. Possiamo identificare $A[x]_{<n}$ con A^n tramite l'isomorfismo di A-moduli che associa ad ogni vettore riga $p=(a_0,\ldots,a_{n-1})\in A^n$ il polinomio $p=\sum a_ix^{n-1-i}\in M$. Ricordiamo che il grado del polinomio nullo è posto per convenzione uguale a $-\infty$.

Definizione 1.1.1. *Siano A un anello e*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\qquad g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,\qquad a_0,b_0\neq 0,$$

due polinomi in $A[x]$ di gradi n e m rispettivamente, con $n,m\geq 0$. La ***matrice di Sylvester*** *della coppia (f,g) è la matrice quadrata di ordine $n+m$*

$$S(f,g)=\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & a_n & & & \\
 & a_0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & a_n & & \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 & & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & \cdot & b_m & & & & & & & \\
 & b_0 & \cdots & \cdot & \cdot & b_m & & & & & & \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
 & & & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & & & \\
 & & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdot & b_m & & & \\
 & & & & & b_0 & \cdots & \cdot & \cdot & b_m & & \\
 & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 & & & & & & & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m
\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Osservazione 1.1.2. Rispetto alle identificazioni $A[x]_{<n} = A^n$ descritte precedentemente, la trasposta della matrice di Sylvester è la matrice che rappresenta l'applicazione A-lineare

$$A[x]_{<m} \oplus A[x]_{<n} \to A[x]_{<n+m}, \qquad (p,q) \mapsto fp + gq.$$

Definizione 1.1.3. *Il **risultante** $R(f,g)$ di due polinomi $f,g \in A[x]$ è il determinante della matrice di Sylvester della coppia (f,g), ossia $R(f,g) = \det S(f,g)$.*

Ad esempio il risultante dei polinomi x^2-2 e $2x^2-x$ è uguale a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 14$$

Se f,g hanno entrambi grado 0, ossia se sono costanti diverse da 0, allora $S(f,g)$ è la matrice vuota e $R(f,g)=1$.

Osservazione 1.1.4. La matrice di Sylvester (1.1) ha senso anche se g ha grado minore di m, ossia se $b_0 = 0$. In tal caso, se $a_0 \neq 0$ segue dallo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna, e dall'induzione su $m-\deg(g)$, che il determinante di (1.1) è uguale a $a_0^{m-\deg(g)}R(f,g)$.

Proposizione 1.1.5. *Nelle notazioni precedenti vale:*

1. $R(f,g) = (-1)^{nm}R(g,f)$.
2. $R(1,g)=1$, $R(x^n,g) = g(0)^n$ *e* $R(xf,g) = g(0)R(f,g)$.
3. $R(af,bg) = a^m b^n R(f,g)$ *per ogni* $a,b \in A$ *tali che* $aa_0 \neq 0$, $bb_0 \neq 0$.
4. *Esistono* $F,G \in A[x]$ *polinomi tali che* $\deg(F) \leq n-1$, $\deg(G) \leq m-1$ *e* $R(f,g) = Gf + Fg$*; in particolare* $R(f,g)$ *appartiene all'intersezione di* A *con l'ideale generato da* f *e* g.

Dimostrazione. Le proprietà 1, 2 e 3 seguono da 1.1 e dalle proprietà elementari del determinante. Al fine di dimostrare il punto 4 calcoliamo il determinante della matrice di Sylvester nell'anello $A[x]$. Tale determinante non cambia se all'ultima colonna sommiamo la penultima colonna moltiplicata per x, la terzultima moltiplicata per x^2 e così via. Alla fine l'ultima colonna diventa

$$\begin{pmatrix} x^{m-1}f \\ \vdots \\ f \\ x^{n-1}g \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$$

e lo sviluppo di Laplace rispetto all'ultima colonna fornisce il risultante come una combinazione linere a coefficienti in A dei polinomi

$$x^{m-1}f, x^{m-2}f, \dots, f, x^{n-1}g, \dots, g.$$

$\square$

Lemma 1.1.6. *Siano $f, g \in A[x]$ e sia $\mathfrak{q}$ un ideale primo di A tale che $R(f, g) \in \mathfrak{q}$. Allora esistono $F, G \in A[x]$ non entrambi in $\mathfrak{q}[x]$ tali che $\deg(F) < \deg(f)$, $\deg(G) < \deg(g)$ e $Gf + Fg \in \mathfrak{q}[x]$.*

Dimostrazione. Siano n, m i gradi di f e g. Per ipotesi la riduzione della matrice di Sylvester nel dominio di integrità $\dfrac{A}{\mathfrak{q}}$ ha determinante nullo e quindi le sue righe sono linearmente dipendenti nel campo delle frazioni. Moltiplicando per un denominatore comune possiamo dire che le righe sono linearmente dipendenti in $\dfrac{A}{\mathfrak{q}}$. Sollevando i coefficienti ad A troviamo $n + m$ elementi $c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_n \in A$, non tutti appartenenti all'ideale $\mathfrak{q}$ e tali che tali che

$$c_1x^{m-1}f + \cdots + c_mf + d_1x^{n-1}g + \cdots + d_ng$$

è un polinomio a coefficienti in $\mathfrak{q}$. $\square$

Teorema 1.1.7. *Siano $f, g \in A[x]$ con f polinomio monico di grado n.*

1. *Sia (a_{ij}) è la matrice quadrata di ordine n a coefficienti in A tale che per ogni $i = 0, \dots, n-1$ vale*

$$x^ig = h_if + \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}x^j, \qquad \textit{con } h_i \in A[x].$$

   Allora $R(f, g) = \det(a_{ij})$. In particolare per ogni polinomio monico f il risultante $R(f, g)$ dipende solo dalla classe di g in $A[x]/(f)$.
2. *Sia $\phi\colon A[x] \to B[x]$ un omomorfismo di anelli tale che $\phi(x) = x$ e $\phi(A) \subset B$, allora vale $R(\phi(f), \phi(g)) = \phi(R(f, g))$.*

Dimostrazione. Se m è il grado di g, allora ogni polinomio h_if è una combinazione lineare a coefficienti in A di $f, xf, \dots, x^{m-1}f$. È dunque possibile sommare ad ognuna delle ultime n righe della matrice $S(f, g)$ dei multipli delle prime m righe in modo tale che diventi una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} T & * \\ 0 & a_{ij} \end{pmatrix},$$

dove T è una matrice triangolare superiore di ordine m con i coefficienti della diagonale tutti uguali a 1.

Il secondo item segue immediatamente dal primo. $\square$

Proposizione 1.1.8 (Invarianza per traslazione). *Per ogni $f, g \in A[x]$ e per ogni $a \in A$ vale*

$$R(f(x-a), g(x-a)) = R(f(x), g(x)).$$

Dimostrazione. Sia $M_d \subset A[x]$ il modulo dei polinomi di grado $\leq d-1$; Il modulo M_d è libero ed ha come una base canonica $1, x, \dots, x^{d-1}$. Il risultante è esattamente il determinante dell'applicazione

$$M_m \oplus M_n \to M_{n+m}, \qquad (p,q) \mapsto fp + gq,$$

calcolato rispetto alle basi canoniche. Basta quindi osservare che l'isomorfismo di traslazione $T_a \colon A[x] \to A[x]$, dove $T_a(x) = x - a$ e $T_a(b) = b$ per ogni $b \in A$, preserva i sottomoduli M_d e su ciascuno di essi si rappresenta nella base canonica con una matrice triangolare con tutti 1 sulla diagonale ed ha quindi determinante 1. □

Corollario 1.1.9. *Siano $f, g \in A[x]$ polinomi. Se $f = a_0 \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$, allora*

$$R_{n,m}(f,g) = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i)$$

e quindi se $g = b_0 \prod_{i=1}^m (x - \beta_i)$, allora vale

$$R_{n,m}(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

In particolare valgono le relazioni di bilinearità:

$$R_{n+n',m}(ff', g) = R_{n,m}(f,g) R_{n',m}(f',g), \quad R_{n,m+m'}(f, gg') = R_{n,m}(f,g) R_{n,m'}(f,g').$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.1.5 non è restrittivo supporre $a_0 = 1$; dimostriamo che vale $R_{n,m}(f,g) = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i)$ per induzione su n: se $n = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Sia dunque $n > 0$ e scriviamo $f = (x - \alpha_1) f'$; l'invarianza per traslazione dà

$$R_{n,m}(f,g) = R_{n,m}((x - \alpha_1) f'(x), g(x)) = R_{n,m}(x f'(x + \alpha_1), g(x + \alpha_1)),$$

e per 1.1.5 si ha dunque

$$R_{n,m}(f,g) = g(\alpha_1) R_{n-1,m}(f'(x + \alpha_1), g(x + \alpha_1)) = g(\alpha_1) R_{n-1,m}(f'(x), g(x)).$$

Le relazioni di bilinearità sono chiaramente funtoriali, si può quindi assumere senza perdita di generalità che $A = \mathbb{Z}[a_i, a'_i, b_i]$ dove a_i, a'_i, b_i sono indeterminate che rappresentano i coefficienti di f, f' e g. Dunque non è restrittivo assumere A dominio di integrità. Basta adesso immergere A in una chiusura algebrica del suo campo delle frazioni per avere la completa riducibilità di f, f' e g. La dimostrazione della bilinearità è allora una conseguenza immediata della rappresentazione di R come funzione della differenza delle radici. □

Corollario 1.1.10. *Sia A un dominio a fattorizzazione unica e $f, g \in A[x]$. Allora f e g possiedono un fattore comune di grado positivo se e solo se $R(f,g) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{K}$ la chiusura algebrica del campo delle frazioni di A, è allora ben noto che f e g hanno un fattore comune di grado positivo se e solo se hanno una radice comune in $\mathbb{K}$. La tesi segue immediatamente da 1.1.9. □

Teorema 1.1.11. *Siano A un anello, $\mathfrak{p} \subset A[x]$ un ideale primo e $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{p}$. Supponiamo $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}[x]$ e sia f un polinomio di grado minimo in $\mathfrak{p} - \mathfrak{q}[x]$. Allora vale $R(f,g) \notin \mathfrak{q}$ per ogni $g \notin \mathfrak{p}$.*

Dimostrazione. Sia $g \notin \mathfrak{p}$ e supponiamo per assurdo $R(f,g) \in \mathfrak{q}$. Per il Lemma 1.1.6 esistono $F, G \in A[x]$, non entrambi in $\mathfrak{q}[x]$ e tali che

$$Gf + Fg \in \mathfrak{q}[x], \qquad \deg(F) < \deg(f).$$

Siccome $f \in \mathfrak{p}$ si ha $Fg \in \mathfrak{p}$ e siccome $g \notin \mathfrak{p}$ si ha $F \in \mathfrak{p}$. Dato che f ha grado minimo in $\mathfrak{p} - \mathfrak{q}[x]$ si ha $F \in \mathfrak{q}[x]$ e di conseguenza $G \notin \mathfrak{q}[x]$ e $Gf \in \mathfrak{q}[x]$ in contraddizione con il fatto che $\mathfrak{q}[x]$ è un ideale primo. □

Corollario 1.1.12. *Siano* $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset A[x]$ *ideali primi tali che* $1 \notin \mathfrak{p}_2$ *e* $\mathfrak{p}_1$ *contenga un polinomio monico. Allora* $\mathfrak{p}_1 \cap A = \mathfrak{p}_2 \cap A$ *se e solo se* $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$.

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1 \cap A = \mathfrak{p}_2 \cap A$, siccome $\mathfrak{q}$ è un ideale proprio di A, $\mathfrak{q}[x]$ non contiene polinomi monici e quindi $\mathfrak{q}[x] \neq \mathfrak{p}_1$. Se per assurdo esistesse $g \in \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1$, allora per il Teorema 1.1.11 esisterebbe $f \in \mathfrak{p}_1$ tale che $R(f, g) \notin \mathfrak{q}$ in contraddizione con il fatto che $R(f, g) \in (f, g) \subset \mathfrak{p}_2$. □

Esercizi

1.1 (k-risultanti). Sia A un dominio a fattorizzazione unica, $f, g \in A[x]$ polinomi, $\deg(f) = n$, $\deg(g) = m$. Per ogni $k \geq 0$ si definisce il k-risultante $R_k(f, g)$ come il determinante della matrice quadrata di ordine $n + m - 2k$ ricavata eliminando dalla matrice di Sylvester $S_{n,m}(f, g)$ le righe $1, 2, \dots, k, m + 1, \dots, m + k$ e le colonne $1, 2, \dots, k, n + m, n + m - 1, \dots, n + m - k + 1$.

Dimostrare che f e g hanno un fattore comune di grado $> k$ se e solo se $R_0(f, g) = R_1(f, g) = \cdots = R_k(f, g) = 0$. (Sugg.: induzione su k: la condizione $R_k(f, g) = 0$ equivale all'esistenza di due polinomi A_k, B_k di grado $< m - k, n - k$ rispettivamente tali che $A_k f + B_k g$ ha grado $< k$.)

1.2. Calcolare esplicitamente il risultante di due polinomi di secondo grado.

1.3. Sia A un dominio di integrità, $f, g \in A[x]$ e $s \in (f, g) \cap A$. Provare che $s^3 \in (f^2, g^2) \cap A$ e che $R(f^2, g^2) = R(f, g)^4$. Dedurre che, in generale, il risultante non genera l'ideale contratto $(f, g) \cap A$.

1.2 Il discriminante

Per semplicità espositiva consideriamo esclusivamente il caso in cui A è un dominio di integrità perfetto oppure di caratteristica sufficientemente alta, lasciando le possibili generalizzazioni per esercizio al lettore interessato.

Dato un polinomio $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in A[x]$, con $a_0 \neq 0$, e considerando la sua derivata formale $f'(x) = n a_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$ si osserva che la prima colonna della matrice di Sylvester della coppia (f, f') è divisibile per a_0. Esiste dunque unico un elemento $\Delta(f) \in A$ detto **discriminante** di f, tale che

$$\Delta(f) = \frac{1}{a_0} R(f, f') = \frac{1}{a_0} R(f', f).$$

Se A è un dominio a fattorizzazione unica, segue dal Corollario 1.1.10 che f possiede un fattore multiplo di grado positivo se e solo se $\Delta(f) = 0$. Dato che la derivazione rispetto ad x ed il risultante commutano con le traslazioni $x \mapsto x - a$, si ha $\Delta(f(x)) = \Delta(f(x - a))$ per ogni $a \in A$; se

$$f = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i), \qquad f' = a_0 \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x - \alpha_j)$$

allora $f'(\alpha_i) = a_0 \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)$ e, per il Corollario 1.1.9, si ha

$$\Delta(f) = a_0^{-1} R(f, f') = a_0^{n-2} \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i) = a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Naturalmente, se $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ sono le radici della derivata f', allora vale anche la formula $\Delta(f) = n^n a_0^{n-1} \prod f(\beta_i)$.

Esempio 1.2.1. (caratteristica$\neq 2$) Se $f = ax^2 + bx + c$, allora $-\dfrac{b}{2a}$ è la radice di f' e vale

$$\Delta(f) = 2^2 af\left(-\frac{b}{2a}\right) = 4ac - b^2.$$

Esempio 1.2.2. (caratteristica $\neq 2, 3$) Se $f = x^3 - px - q$, allora le radici di f' sono $\pm\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ e quindi il discriminante vale

$$\Delta(f) = 27f\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right) f\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right) = 27q^2 - 4p^3.$$

Esempio 1.2.3. Per la Proposizione 1.1.5, vale $\Delta(x^n + a) = n^n a^{n-1}$.

Un utile trucco per calcolare $\Delta(f)$ quando f è un polinomio monico, consiste nell'applicare l'algoritmo euclideo per determinare il massimo comune divisore fra f e f' e poi moltiplicare per uno scalare in modo da avere la relazione dell'Esempio 1.2.3 soddisfatta. Ad esempio se $f = x^4 + cx^2 + bx + a$ si ha $27\Delta(f) = 4(c^2 + 12a)^3 - (2c^3 - 72ac + 27b^2)^2$.

Esercizi

1.4. Siano $\mathbb{K}$ un campo perfetto e $f, g \in \mathbb{K}[x]$ polinomi senza fattori comuni. Dimostrare che vale una delle seguenti possibilità:

1. Il polinomio $tf(x) + g(x)$ ha radici multiple per al più finiti valori di $t \in \mathbb{K}$.
2. La caratteristica di $\mathbb{K}$ è $p > 0$ ed esistono $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathbb{K}[x]$ tali che $f = \tilde{f}^p$, $g = \tilde{g}^p$.

1.5. (caratteristica 0) Sia A un dominio di integrità di caratteristica 0 e $f \in A[x]$ un polinomio di grado n. Provare che

$$\Delta(f) = \frac{R_{n-1,n-1}(nf - xf', f')}{n^{n-1}}.$$

1.3 Anelli Noetheriani

In questa sezione dimostreremo il teorema della base di Hilbert. Per future applicazioni è conveniente inquadrare il teorema in un ambito più astratto di quello considerato precedentemente.

Definizione 1.3.1. *Un anello in cui ogni ideale è finitamente generato si dice **Noetheriano**.*

Lemma 1.3.2. *Per un anello A le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *A è Noetheriano.*
2. *Ogni catena ascendente di ideali in A è stazionaria.*
3. *Ogni catena ascendente numerabile di ideali in A è stazionaria.*
4. *Ogni famiglia di ideali di A contiene un elemento massimale.*

Dimostrazione. [$1 \Rightarrow 2$] Sia $\{I_v \mid v \in V\}$ una catena ascendente di ideali e sia $I = \cup\{I_v \mid v \in V\}$. L'ideale I è finitamente generato, diciamo da $a_1, \ldots, a_n$. Se $a_i \in I_{v_i}$, per $i = 1, \ldots, n$, allora detto w il massimo di $v_1, \ldots, v_n$ si ha che $I \subset I_w \subset I_v \subset I$ per ogni $v \geq w$ e quindi la catena è stazionaria.

[$2 \Rightarrow 3$] è ovvio e [$3 \Rightarrow 4$] è una immediata applicazione del Lemma **??**.

[4 $\Rightarrow$ 1] Sia I un ideale e sia $J \subset I$ un elemento massimale della famiglia degli ideali finitamente generati contenuti in I, dimostriamo che $J = I$. Sia $a \in I$ allora l'ideale $J+(a) \subset I$ è ancora finitamente generato e per la massimalità di J si deve avere $a \in J$. $\square$

Emmy Noether è stata la prima a introdurre nel 1923 la nozione di catena ascendente di ideali ed a studiare la classe degli anelli, oggi chiamati in suo onore, Noetheriani. I campi e gli anelli ad ideali principali sono tutti Noetheriani.

Teorema 1.3.3 (Della base di Hilbert). *Se A è un anello Noetheriano, allora anche $A[x]$ è Noetheriano.*

Dimostrazione. Dato un polinomio $f \in A[x]$ di grado $r \geq 0$ chiameremo coefficiente direttore di f il coefficiente di x^r in f; è utile osservare che i polinomi $f, xf, x^2f, \ldots$ hanno tutti lo stesso coefficiente direttore.

Sia $I \subset A[x]$ un ideale e, per ogni $m \geq 0$, denotiamo con $J_m \subset A$ l'insieme formato dallo 0 e dai coefficienti direttori dei polinomi di grado m contenuti in I. Si osserva immediatamente che J_m è un ideale e che $J_m \subset J_{m+1}$ per ogni m. Per ipotesi l'anello A è Noetheriano, dunque gli ideali J_m sono tutti finitamente generati e la catena ascendente $\{J_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ è stazionaria. Sia $N > 0$ tale che $J_m = J_N$ per ogni $m \geq N$ e, per ogni $i = 0, \ldots, N$, siano $f^i_1, \ldots, f^i_j \in I$ polinomi di grado i i cui coefficienti direttori generano J_i. Sia $H \subset I$ l'ideale generato dai polinomi f^i_j, per $i = 0, \ldots, N$, e proviamo che $H = I$. Infatti, sia $f \in I$ e scriviamo $f = h + g$ con $h \in H$, g di grado minimo e si assuma per assurdo $g \neq 0$. Sia $r = \min(\deg(g), N)$, allora il coefficiente direttore di g appartiene a J_r e quindi esistono $a_1, \ldots, a_j \in A$ tali che, detto $s = \deg(g) - r$, il polinomio $g - (a_1 f^r_1 + \cdots + a_j f^r_j)x^s$ ha grado minore del grado di g. Dato che $\sum a_i f^r_i \in H$ l'assurdo è servito. $\square$

Proposizione 1.3.4. *Sia A un anello Noetheriano e I un ideale. Allora l'anello quoziente A/I è Noetheriano.*

Dimostrazione. Sia $\pi\colon A \to A/I$ la proiezione al quoziente, una catena ascendente di ideali $\{J_v\} \subset A/I$ è stazionaria se e solo se la catena $\{\pi^{-1}(J_v)\} \subset A$ è stazionaria. $\square$

Corollario 1.3.5. *Per ogni campo $\mathbb{K}$ e per ogni ideale $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, l'anello quoziente $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ è Noetheriano.*

Dimostrazione. Il campo $\mathbb{K}$ è Noetheriano, per il teorema della base di Hilbert e per induzione su n si ha che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è Noetheriano. Basta adesso applicare la Proposizione 1.3.4. $\square$

Teorema 1.3.6 (Lemma di Artin-Rees). *Sia A un anello Noetheriano e siano $I, M \subset A$ ideali. Allora esiste un intero $k \geq 0$ tale che, per ogni $n \geq k$ vale*

$$I \cap M^n = M^{n-k}(I \cap M^k)$$

e quindi $M^n I \subset I \cap M^n \subset M^{n-k} I$.

Dimostrazione. L'inclusione $\supset$ è evidente per ogni n, k, proviamo che vale $\subset$. Fissiamo un insieme di generatori $a_1, \ldots, a_r$ dell'ideale M e consideriamo l'omomorfismo di anelli $f\colon A[t_1, \ldots, t_r] \to A$ tale che $f(t_i) = a_i$ per $i = 1, \ldots, r$ e $f(a) = a$ per ogni $a \in A$. Notiamo che M^n è l'immagine tramite f dell'insieme dei polinomi omogenei di grado n. Per ogni $n \geq 0$ sia $J_n \subset A[t_1, \ldots, t_r]$ l'ideale generato dai polinomi omogenei p di grado $\leq n$ tali che $f(p) \in I$; per il teorema della base l'anello $A[t_1, \ldots, t_r]$ è Noetheriano e la catena $J_0 \subset J_1 \subset \cdots$ è stazionaria.

Fissiamo un intero k tale che $J_k = J_n$ per ogni $n \geq k$. Dato $n \geq k$ e $a \in I \cap M^n$ esiste $p \in J_n$ polinomio omogeneo di grado n tale che $a = f(p)$; siccome $J_n = J_k$ vale $p = \sum p_i q_i$, dove ogni $p_i \in J_k$ è omogeneo di grado k e ogni q_i è omogeneo di grado $n-k$; quindi $f(p_i) \in I \cap M^k$, $f(q_i) \in M^{n-k}$ e la tesi è dimostrata. □

Corollario 1.3.7. *Sia A un anello Noetheriano e $M \subset A$ un ideale. Se $1 + M$ non contiene divisori di 0 allora*

$$\bigcap_{n \geq 0} M^n = 0$$

Dimostrazione. Sia $J = \cap_{n \geq 0} M^n$; per il lemma di Artin-Rees 1.3.6 esiste $k \geq 0$ tale che $J = J \cap M^{k+1} = M(J \cap M^k) = MJ$. Per il lemma di Nakayama esiste $a \in M$ tale che $(1-a)J = 0$ e quindi $J = 0$. □

Corollario 1.3.8. *Sia A un anello locale Noetheriano con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Allora per ogni ideale $I \subset \mathfrak{m}$ vale*

$$\bigcap_{n \geq 0} (I + \mathfrak{m}^n) = I.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Corollario 1.3.7 all'anello quoziente A/I ed al suo ideale massimale. □

Esercizi

1.6. Provare che l'anello delle funzioni continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ non è Noetheriano.

1.7. Siano A un anello Noetheriano ed $E \subset A$ un sottoinsieme. Provare che esiste un sottoinsieme finito $E_0 \subset E$ tale che $(E) = (E_0)$.

1.8. Siano A un anello Noetheriano e $f\colon A \to A$ un endomorfismo surgettivo di anelli. Provare che f è un isomorfismo.

1.9 (Moduli Noetheriani). Un modulo si dice **Noetheriano** se ogni suo sottomodulo è finitamente generato. Si provi:

1. Sia M un modulo e $N \subset M$ un sottomodulo. Allora M è Noetheriano se e solo se N e M/N sono Noetheriani.
2. Se M, N sono Noetheriani, allora $M \oplus N$ è Noetheriano.
3. Se A è un anello Noetheriano, allora ogni A-modulo finitamente generato è Noetheriano. (Sugg.: ogni modulo finitamente generato è quoziente di un modulo libero di rango finito.)

1.10. Sia A un anello locale Noetheriano con ideale massimale $\mathfrak{m}$ tale che $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ per qualche intero $n \geq 0$. Provare che $\mathfrak{m}^n = 0$ (Sugg.: Nakayama) e che ogni catena discendente di ideali è stazionaria (Sugg.: induzione su n). Un anello con queste caratteristiche si dice **locale Artiniano**.

1.11. Sia A un anello e denotiamo con $\mathcal{V}$ la famiglia degli ideali di A che non sono finitamente generati. Provare che se $\mathcal{V} \neq \emptyset$, cioè se A non è Noetheriano, allora $\mathcal{V}$ contiene elementi massimali rispetto all'inclusione. Dimostrare inoltre gli elementi massimali di $\mathcal{V}$ sono ideali primi di A. (Sugg.: se I è un ideale, $xy \in I$ e $J \subset I$ un ideale tale che $I + (x) = J + (x)$, allora vale $I = J + x(I : x)$, dove $(I : x) = \{y \in A \mid xy \in I\}$.)

1.4 La topologia di Zariski

Sia $\mathbb{K}$ un campo (infinito) fissato e $\mathbb{A}^n \cong \mathbb{K}^n$ lo spazio affine su $\mathbb{K}$ di dimensione n. L'anello $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ è un'algebra di funzioni su $\mathbb{A}^n$ a valori in $\mathbb{K}$ ed è naturale pensare ogni sottoinsieme di $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ come un insieme di equazioni algebriche nelle variabili $x_1,\dots,x_n$.

Il **luogo di zeri** di un sottoinsieme $E \subset \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ è definito come

$$V(E) = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(a_1,\dots,a_n) = 0 \text{ per ogni } f \in E\}.$$

Dalla definizione appare chiaro che, se (E) è l'ideale generato da E, allora E ed (E) hanno lo stesso luogo di zeri, cioè $V(E) = V((E))$. Ne segue che non è restrittivo considerare esclusivamente luoghi di zeri di ideali di $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$.

Definizione 1.4.1. *Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{A}^n$ si dice* ***algebrico*** *se è $X = V(I)$ per qualche ideale $I \subset \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$.*

Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{A}^n$ sono algebrici: ad esempio un sottoinsieme proprio di $\mathbb{A}^1$ è algebrico se e solo se è finito. Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

1. $V(0) = \mathbb{A}^n$ e $V(\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]) = \emptyset$.
2. Se $I \subset J$ sono ideali, allora $V(J) \subset V(I)$.
3. Per ogni ideale I, vale $V(I) = V(\sqrt{I})$.
4. Dati I, J ideali, vale $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.
5. Data una famiglia qualsiasi $\{I_\alpha\}$ di ideali, vale $V(\sum I_\alpha) = \cap V(I_\alpha)$.

Le proprietà 1), 4) e 5) mostrano che i sottoinsiemi algebrici di $\mathbb{A}^n$ sono i chiusi di una topologia, detta **topologia di Zariski**.

6. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ è algebricamente chiuso e $I \subset \mathbb{K}[t]$ è un ideale proprio, allora il luogo di zeri $V(I) \subset \mathbb{A}^1$ è non vuoto (poiché $\mathbb{K}[t]$ è un anello ad ideali principali ogni ideale proprio è della forma (f), con f polinomio di grado positivo e $V(f)$ è l'insieme delle radici di f).
7. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ è algebricamente chiuso, $n \geq 2$ e $f \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ è un polinomio di grado positivo, allora $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ è infinito. Infatti se, tanto per fissare le idee, f ha grado $d > 0$ nella variabile x_n, allora $f = f_0(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^d + \cdots$ e per ogni $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ tale che $f_0(a) \neq 0$ esiste $a_n \in \mathbb{K}$ tale che $f(a, a_n) = 0$.

Lemma 1.4.2 (di preparazione). *Siano $\mathbb{K}$ un campo infinito e $f \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ un polinomio non nullo di grado $d \geq 0$. Allora:*

1. *L'aperto $\mathbb{A}^n_f = \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) \neq 0\}$ è non vuoto.*
2. *Esiste un cambio lineare di coordinate $x_i = \sum a_{ij}y_j$ ed una costante $c \in \mathbb{K}$ tale che il polinomio cf è monico di grado d rispetto alla variabile y_n.*

Dimostrazione. [1] Lavoriamo per induzione su n, assumiamo l'enunciato vero per polinomi in $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_{n-1}]$ e scriviamo $f = \sum f_i x_n^i$, con i polinomi $f_i \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_{n-1}]$ non tutti nulli. Sia $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ tale che i valori $f_0(a), f_1(a), \dots$ non siano tutti nulli. Allora il polinomio $f(a, x_n)$ non è nullo in $\mathbb{K}[x_n]$ ed ha al più un numero finito di radici.

[2] Sia f_d la componente omogenea di grado d di f. Per il punto 1) esiste un punto $a \in \mathbb{A}^n$ tale che $f_d(a) \neq 0$; scegliamo un sistema di coordinate $y_1,\dots,y_n$ tale che il punto a corrisponda a $(0,0,\dots,0,1)$. Nel nuovo sistema di coordinate il polinomio $f(0,\dots,0,y_n)$ ha grado d e basta quindi prendere come costante $c = 1/f_d(0,\dots,0,1)$. □

Le proiezioni affini non sono applicazioni chiuse; consideriamo ad esempio l'iperbole $X = V(xy-1) \subset \mathbb{A}^2$ e sia $\pi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ la proiezione sulla prima coordinata. Si vede immediatamente che $\pi(X)$ non è un chiuso di Zariski. Similmente se facciamo la proiezione sulla seconda coordinata. Però, se prima si effettua un cambio lineare di coordinate $x = au + bv$, $y = cu + dv$, con $ad - bc \neq 0$, si trova che $X = V(bdv^2 + vu(ad + bc) + acu^2 - 1)$ e, se $bd \neq 0$, allora la proiezione di X sul primo asse coordinato è $\mathbb{A}^1$, che è quindi chiuso. Abbiamo quindi sperimentato che *la generica proiezione di X su di un sottospazio affine è un chiuso*. Quanto appena visto è un caso particolare di un fatto molto più generale che viene detto *Lemma di normalizzazione di Noether*.

Lemma 1.4.3 (di proiezione). *Siano $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ un campo algebricamente chiuso, $J \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideale, $J^c = J \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e $\pi \colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ la proiezione sulle prime coordinate. Se esiste un polinomio $F \in J$ monico rispetto a x_n (e.g. se $\deg_{x_n} F = \deg F$), allora $\pi \colon V(J) \to V(J^c)$ è chiusa e surgettiva.*

Dimostrazione. Se $(a_1, \ldots, a_n) \in V(J)$, allora $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ per ogni $f \in J^c$ e quindi $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in V(J^c)$.

Proviamo adesso la surgettività: si consideri un punto $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in V(J^c)$ e sia $M \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ l'ideale generato da $x_1 - a_1, \ldots, x_{n-1} - a_{n-1}$. Siccome

$$V(J + M) = V(J) \cap V(M) \subset V(M) = \pi^{-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

basta dimostrare che $V(J + M)$ è non vuoto. Mostriamo come primo passo che $1 \notin J + M$: infatti, se per assurdo $1 = f + \sum(x_i - a_i)g_i$ per qualche $f \in J$ e $g_1, \ldots, g_{n-1} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, allora $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{K}$ e quindi, se

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) = \sum f_i(x_1, \ldots, x_{n-1})t^i,$$

deve essere $f_0(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 1$ e $f_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$ per ogni $i > 0$. Si consideri adesso il risultante $R = R(F, f) \in J^c$ dell'eliminazione della variabile x_n da F e f. Vale $R = \det S(F, f)$, dove $S(F, f)$ è la matrice di Sylvester della coppia F, f. Siccome $S(F, f)(a_1, \ldots, a_{n-1})$ è una matrice triangolare superiore con tutti 1 sulla diagonale si ha $R(F, f)(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 1$ in contraddizione con l'appartenenza a J^c, dunque $1 \notin J + M$.

Si consideri adesso l'omomorfismo surgettivo $\phi \colon \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[t]$ definito da $\phi(x_n) = t$ e $\phi(x_i) = a_i$; è chiaro che $M = \operatorname{Ker}(\phi)$ (cfr. Esercizio **??**) e quindi che $\phi^{-1}(\phi(J)) = J + M$. Dato che $1 \notin J + M$ ne segue che $\phi(J)$ è un ideale proprio e quindi esiste $a_n \in \mathbb{K}$ tale che per ogni $f \in J$ vale $f(a_1, \ldots, a_n) = \phi(f)(a_n) = 0$.

Sia $X \subset V(J)$ un chiuso di Zariski, allora $X = V(I) \cap V(J) = V(I + J)$; a meno di sostituire I con $I + J$ non è restrittivo supporre $J \subset I$: in particolare $F \in I$ e $\pi(X) = V(I^c)$. □

Due dimostrazioni alternative del lemma di proiezione saranno presentate negli Esercizi 1.16 e 1.40.

Esercizi

1.12. Provare che la topologia di Zariski non è di Hausdorff.

1.13. Provare che i sottoinsiemi $\mathbb{A}^n_f = \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) \neq 0\}$ formano, al variare di $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, una base di aperti della topologia di Zariski.

1.14. Sia $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideale e $X \subset \mathbb{A}^n$ un sottoinsieme finito tale che $X \cap V(I) = \emptyset$. Provare che esiste un polinomio $f \in I$ tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$. Provare inoltre che se I è un ideale omogeneo, allora è possibile scegliere f omogeneo. (Sugg.: poiché X è finito esistono $f_1, \ldots, f_s \in I$ tali che, per ogni $x \in X$, esiste un indice i per cui $f_i(x) \neq 0$. Ne segue che l'insieme dei vettori $a = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{K}^s$ per cui $V(\sum a_i f_i) \cap X \neq \emptyset$ è unione di un numero finito di iperpiani.)

1.15. Sia $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ la proiezione sulle prime coordinate. Mostrare che, nella topologia di Zariski, π è aperta. (Sugg.: se $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_i f_i(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^i$ mostrare che $\pi(\mathbb{A}^n_f)=\cup_i \mathbb{A}^{n-1}_{f_i}$.)

1.16. *Prima dimostrazione alternativa del lemma di proiezione 1.4.3.* Questa dimostrazione è interamente basata sulle proprietà del risultante. Nelle notazioni del Lemma 1.4.3 sia $a=(a_1,\dots,a_{n-1})\in V(J^c)$ e denotiamo $X=V(F)\cap\pi^{-1}(a)$. Mostrare che X è un insieme finito. Supponiamo quindi per assurdo che $X\cap V(I)=\emptyset$; per l'Esercizio 1.14 esiste $f\in I$ tale che $X\cap V(f)=\emptyset$: questo significa che i due polinomi $F(a,x_n), f(a,x_n)\in\mathbb{K}[x_n]$ non hanno zeri comuni ed il loro risultante $R(F,f)$ non si annulla in a.

1.5 Il teorema degli zeri di Hilbert

Dato un qualsiasi sottoinsieme $X\subset\mathbb{A}^n$, si definisce

$$I(X)=\{f\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]\mid f(a)=0 \quad \text{per ogni } a\in X\}.$$

L'insieme $V(I(X))$ è uguale alla chiusura di X nella topologia di Zariski. Infatti si ha $X\subset V(I(X))$ e, se $V(J)$ è un chiuso che contiene X, allora $J\subset I(X)$ e quindi $V(I(X))\subset V(J)$.

L'applicazione $X\mapsto I(X)$ soddisfa inoltre le proprietà:

1. $I(\emptyset)=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ e $I(\mathbb{A}^n)=0$.
2. Se $X\subset Y$, allora $I(Y)\subset I(X)$.
3. Per ogni sottoinsieme chiuso $X\subset\mathbb{A}^n$, vale $I(X)=\sqrt{I(X)}$ e $X=V(I(X))$.
4. Per ogni ideale $J\subset\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$, vale $\sqrt{J}\subset I(V(J))$.

L'inclusione del punto 4) è in generale propria: ad esempio, se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $n=1$ e $J=(x^2+1)$, allora $V(J)=\emptyset$ e $I(V(J))=\mathbb{R}[x]\neq\sqrt{J}$.

Teorema 1.5.1 (degli zeri di Hilbert (1892), forma debole). *Se il campo $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso e $J\subset\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ è un ideale, allora vale $V(J)=\emptyset$ se e solo se $1\in J$.*

Dimostrazione. L'enunciato è ovvio se $1\in J$ oppure se $J=0$. Supponiamo quindi $0\neq J\neq\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ e proviamo che $V(J)$ è non vuoto.

Se $n=1$, allora l'ideale J è principale, diciamo $J=(f)$, e quindi $V(J)$ è l'insieme delle radici di f. Siccome f non è invertibile deve avere grado positivo e quindi possiede radici.

Se $n>1$, ragioniamo per induzione e supponiamo il teorema vero in $\mathbb{A}^{n-1}$. Sia $F\in J$ un polinomio di grado $m>0$. Per il lemma di preparazione 1.4.2, a meno di un cambio lineare di coordinate e di moltiplicazione per una costante, possiamo supporre che F sia un polinomio monico di grado m rispetto a x_n. Consideriamo l'ideale $J^c=J\cap\mathbb{K}[x_1,\dots,x_{n-1}]$; per l'ipotesi induttiva $V(J^c)\neq\emptyset$. Denotando con $\pi\colon\mathbb{A}^n\to\mathbb{A}^{n-1}$ la proiezione sulle prime $n-1$ coordinate, per il Lemma 1.4.3, vale $\pi(V(J))=V(J^c)$ e perciò $V(J)\neq\emptyset$. □

Corollario 1.5.2. *Se il campo $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, allora gli ideali massimali di $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ sono tutti e soli gli ideali del tipo $I(p)$, per $p\in\mathbb{A}^n$. Esiste dunque una bigezione naturale fra $\mathbb{A}^n$ e l'insieme degli ideali massimali di $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{m}\subset\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ massimale e $p\in V(\mathfrak{m})$; allora $\mathfrak{m}\subset I(p)$ da cui segue $\mathfrak{m}=I(p)$. Viceversa se $p\in\mathbb{A}^n$ e $I(p)\subset\mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m}$ massimale, allora esiste $q\in\mathbb{A}^n$ tale che $I(p)\subset\mathfrak{m}=I(q)$, da cui $\{q\}\subset\{p\}$ e quindi $p=q$. □

Teorema 1.5.3 (degli zeri di Hilbert (1892), forma forte). *Se il campo $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, allora per ogni ideale $J \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ vale $\sqrt{J} = I(V(J))$.*

Dimostrazione. Siccome $X = V(J) = V(\sqrt{J})$ si può supporre senza perdita di generalità che $J = \sqrt{J}$, cioè che $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/J$ non possieda elementi nilpotenti. Dobbiamo dimostrare che se $F \notin J$ allora esiste $x \in X$ tale che $F(x) \neq 0$. Sia F come sopra fissato, $\alpha\colon \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to S$ la proiezione al quoziente, $f = \alpha(F)$. Si noti che $1 - tf$ è invertibile in $S[[t]]$ con inverso $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} t^i f^i$ e quindi $1 - tf$ è invertibile in $S[t]$ se e solo se f è nilpotente. Per ipotesi S è ridotto e quindi $(1 - tf)$ è un ideale proprio di $S[t]$ e di conseguenza J e $1 - tF$ generano un ideale proprio di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, t]$. Per la forma debole del teorema degli zeri esistono $a_0, \ldots, a_n, t_0$ tali che $g(a_0, \ldots, a_n) = 0$ per ogni $g \in J$ e $1 - t_0 F(a_0, \ldots, a_n) = 0$. Dunque $x = (a_0, \ldots, a_n) \in X$ e $F(x) \neq 0$. $\square$

Corollario 1.5.4. *Supponiamo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e siano $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ con f irriducibile. Se $V(f) \subset V(g)$, allora f divide g.*

Dimostrazione. Per il teorema degli zeri vale $g \in I(V(f)) = \sqrt{(f)} = (f)$. $\square$

Ricordiamo che un ideale $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si dice omogeneo se è generato da polinomi omogenei; se $S_d \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è il sottospazio dei polinomi omogenei di grado d si verifica facilmente che I è omogeneo se e solo se $I = \oplus(I \cap S_d)$. Sia infine $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^n$; notiamo che se I è omogeneo e $V(I) \neq \emptyset$, allora $0 \in V(I)$.

Corollario 1.5.5 (Teorema degli zeri omogeneo). *Se il campo $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso e $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è un ideale omogeneo proprio, allora $V(I) = \{0\}$ se e solo se esiste $d > 0$ tale che $S_d \subset I$.*

Dimostrazione. Se $S_d \subset I$, allora per ogni i si ha $x_i^d \in I$, quindi $x_i \in \sqrt{I}$ e perciò $V(I) = V(\sqrt{I}) = \{0\}$.

Viceversa, se $V(I) = \{0\}$, allora per il teorema degli zeri $\sqrt{I} = I(\{0\}) = (x_1, \ldots, x_n)$. Esiste dunque $d > 0$ tale che $x_i^d \in I$ per ogni i e quindi $S_{dn-n+1} \subset I$. $\square$

Un risultato collegato al teorema degli zeri omogeneo, che riportiamo senza dimostrazione è il seguente.

Teorema 1.5.6. *Sia $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ un ideale generato da $n+1$ polinomi omogenei di gradi $d_0, \ldots, d_n$. Se $\sqrt{I} = (x_0, \ldots, x_n)$, allora la dimensione di $S_h \cap I$ dipende solo dai numeri $h, n, d_0, \ldots, d_n$ e non dall'ideale I. In particolare $S_d \subset I$ se e solo se $d \geq \sum d_i - n$.*

Dimostreremo più avanti tale risultato come semplice corollario del Teorema **??** (vedi Esercizio **??**).

Esercizi

1.17. Sia $Y \subset \mathbb{A}^3$ l'unione dei tre piani coordinati e $X \subset \mathbb{A}^3$ l'unione dei tre assi coordinati. Provare che $I(Y) = (xyz)$ e che $I(X) = (xy, yz, zx)$. (Sugg.: se $f \in I(X)$ considerare $f(x,y,z) - f(0,y,z) - f(x,0,z) - f(x,y,0)$.)

1.18. Sia $J \subset S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideale e $X = V(J)$. Provare che se $f \in I(X)$ allora $1 + f$ è invertibile in S/J.

1.19. Dimostrare che ogni ideale primo di $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ è intersezione di ideali massimali.

1.6 Esercizi complementari

1.20. Sia $f \in A[x]$ un polinomio monico. Provare che per ogni coppia di polinomi $g, h \in A[x]$ vale $R(f,g) = R(f, g+hf)$.

1.21. Sia A un dominio a fattorizzazione unica e siano $f, g \in A[x]$ polinomi di gradi $\deg(f) = n$, $\deg(g) = m$. Dimostrare che f e g hanno un fattore comune di grado $> k$, con $0 \leq k \leq \min(n,m)$, se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} x^{m-k-1}f \\ \vdots \\ f \\ x^{n-k-1}g \\ \vdots \\ g \end{pmatrix} \in M(n+m-2k, n+m-k, A)$$

non ha rango massimo.

1.22 (Sistemi risultanti). Siano A un dominio a fattorizzazione unica, $f, g_1, \ldots, g_r \in A[x]$ polinomi, $a_1, \ldots, a_r$ indeterminate e sia $R \in A[a_1, \ldots, a_r]$ il risultante dell'eliminazione di x dai polinomi f e $a_1g_1 + \cdots + a_rg_r$. Provare che $R = 0$ se e solo se gli $r+1$ polinomi $f, g_1, \ldots, g_r$ hanno un fattore comune di grado positivo. Provare inoltre che i coefficienti di $R(a_1, \ldots, a_r)$ appartengono a $A \cap (f, g_1, \ldots, g_r)$.

1.23. Dato un polinomio monico f a coefficienti reali, senza radici multiple, determinare la relazione tra il segno del discriminante, il grado del polinomio e la classe di resto modulo 4 del numero di radici reali. In particolare si provi che se il grado di f è 3 allora f possiede tre radici reali distinte se e solo se $\Delta(f) < 0$.

1.24. Provare che se $f, g \in \mathbb{K}[x]$ hanno gradi n, m allora vale la formula di polarizzazione

$$R(f,g)^2 = (-1)^{nm} \frac{\Delta(fg)}{\Delta(f)\Delta(g)}.$$

1.25. Sia $f = \sum a_i x^{n-i} y^i$ un polinomio omogeneo di grado n a coefficienti in un campo di caratteristica 0 e siano f_x, f_y le derivate di f rispetto a x e y rispettivamente. Provare che:

$$R_{n,n-1}(f, f_x) = \frac{a_0}{n^{n-2}} R_{n-1,n-1}(f_x, f_y), \qquad \Delta(f) = \frac{1}{n^{n-2}} R_{n-1,n-1}(f_x, f_y).$$

1.26. Siano $f, g, q \in \mathbb{K}[x]$ polinomi senza fattori comuni di gradi n, n, m rispettivamente, con $m < n$. Provare che $R(f + \lambda q, g + \mu q) \in \mathbb{K}[\lambda, \mu]$ è un polinomio di grado $\leq n$. (Sugg.: non è restrittivo supporre $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, si considerino allora gli omomorfismi $\mathbb{K}[\lambda, \mu] \to \mathbb{K}[t]$ dati da $\lambda \mapsto at$, $\mu \mapsto bt$, al variare di $a, b \in \mathbb{K}$.)

1.27 (Implicitizzazione delle curve razionali nel piano). Dati $f, g, q \in \mathbb{K}[t]$ polinomi senza fattori comuni, provare che esiste $F \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ polinomio irriducibile tale che

$$\left\{ \left(\frac{f(t)}{q(t)}, \frac{g(t)}{q(t)} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{K},\, q(t) \neq 0 \right\} \subset V(F).$$

(Sugg.: Esercizio 1.26.)

1.28 (∗). Un anello si dice **Artiniano** se ogni catena discendente di ideali è stazionaria. Dimostrare che ogni anello Artiniano è anche Noetheriano ma che non vale il viceversa.

1.29. Sia $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideale proprio, $\mathbb{K} \subset L$ una estensione di campi e $I^e = IL[x_1, \dots, x_n]$ l'estensione di I. Mostrare che $1 \notin I^e$.
Più in generale mostrare che $I^e \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = I$. (Sugg.: teorema di Rouché-Capelli.)

1.30. Sia $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideale proprio. Dimostrare che esiste una estensione finita di campi $\mathbb{K} \subset L$ tale che $V(I^e) \neq \emptyset$, dove I^e denota l'ideale esteso $I^e = IL[x_1, \dots, x_n]$.

1.31. Dimostrare che se $\mathbb{K} \subset L$ è una estensione di campi e L è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, allora L è una estensione algebrica finita di $\mathbb{K}$. (Sugg.: sia $L = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$; mostrare che esiste un omomorfismo di $\mathbb{K}$ algebre $\phi\colon \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \overline{\mathbb{K}}$ tale che $\phi(I) = 0$.)

1.32 (caso particolare del Teorema 1.5.6, $*$). Siano $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$ omogenei di grado d senza fattori comuni. Provare che $S_n \subset (f, g)$ se e solo se $n \geq 2d - 1$. (Sugg.: usare 1.1.5.4.)

1.33. Dimostrare che nel Teorema 1.5.6 non è restrittivo supporre $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso.

1.34 (Lemma di Gieseker). Sia $I \subset \mathbb{K}[x, y]$ un ideale omogeneo e scriviamo $I = \oplus_{d \geq 0} I_d$, dove $I_d = I \cap S_d$. Dimostrare che se $\dim I_{d+1} \leq \dim I_d + 1$, allora esistono $h \leq d$ e $f \in S_{d-h}$ tale che $I_d = fS_h$. (Sugg.: sia $f_0, \dots, f_n$ una base di I_d tale che $f_i = x^{r_i} g_i$ con $g_i(0, 1) = 1$ e $r_i < r_{i+1}$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Si consideri l'insieme $A = \{i \mid g_n \not| g_i\} \cup \{i \mid r_{i+1} \geq r_i + 2\}$; se $A \neq \emptyset$ sia $s = \max(A)$ e si provi che $yf_0, xf_0, \dots, xf_s, yf_{s+1}, xf_{s+1}, \dots, xf_n$ sono linearmente indipendenti.)

1.35. Nelle notazioni di 1.5.6, siano $V \subset S_a$, $W \subset S_b$ sottospazi vettoriali e $\mu\colon V \otimes W \to S_{a+b}$ la mappa di moltiplicazione $\mu(f \otimes g) = fg$. Provare che il rango di μ è almeno $\dim V + \dim W - 1$. (Sugg.: usare la fattorizzazione unica in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.)

1.36 (Teorema di Hopf). Siano A, B, C spazi vettoriali di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso e sia $\mu\colon A \otimes B \to C$ un'applicazione lineare e separatamente iniettiva, cioè tale che $\mu(a \otimes b) = 0$ se e solo se $a \otimes b = 0$.

1. ($*$) Provare che se $\dim A = 2$, allora $\dim C > \dim B$. (Sugg.: sia per assurdo $\mu\colon A \otimes B \to B$ come sopra, e_1, e_2 una base di A, $f_i(b) = \mu(e_i \otimes b)$ e si considerino gli endomorfismi $\lambda f_1 + \eta f_2$, con $[\lambda, \eta] \in \mathbb{P}^1$.)
2. ($**$?) Provare che $\dim C \geq \dim A + \dim B - 1$ (vedi Esercizio **??**).

1.37. Sia $\mathbb{K}$ un campo sul quale vale il teorema di Hopf (punto 2 dell'Esercizio 1.37) e siano A, B, C, μ come in 1.37. Mostrare che, se vale $\dim C = \dim A + \dim B - 1$, allora per ogni $c \in C$ esistono a, b tali che $c = \mu(a \otimes b)$. Utilizzare questo fatto per mostrare che ogni forma binaria di grado ≥ 2 a coefficienti in $\mathbb{K}$ non è irriducibile e quindi che $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso.

1.38. Sia A un anello, $I \subset A[x]$ un ideale e $B = A[x]/I$. Provare che I contiene un polinomio monico se e solo se B è un A-modulo finitamente generato.

1.39 (Seconda dimostrazione alternativa del lemma di proiezione 1.4.3). Questa dimostrazione sostituisce, grazie all'Esercizio 1.39, l'utilizzo del risultante con il lemma di Nakayama **??** (cfr. [**?**, Esercizio II.3.15]).

Per dimostrare che $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in V(J^c)$ appartiene alla proiezione di $V(J)$ occorre dimostrare, come in 1.4.3, che $1 \notin \phi(J)$. Considerare, nelle notazioni di **??**, $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$, $M = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/J$, $N = 0$ e $I = (x_1 - a_1, \dots, x_{n-1} - a_{n-1}) \subset A$. Se per assurdo $1 \in J + I\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ allora $IM = M$ e applicare **??** per arrivare ad una contraddizione.

1.40. Siano $A \subset B$ anelli Noetheriani con B finitamente generato come A-modulo. Provare:

1. Ogni $x \in B$ è radice di un polinomio monico a coefficienti in A. (Sugg.: polinomio caratteristico della moltiplicazione per x.)
2. Se $I \subset A$ è un ideale proprio, allora $IB \neq B$. (Sugg. Nakayama.)
3. Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso, allora ogni morfismo $A \to \mathbb{K}$ si estende ad un morfismo $B \to \mathbb{K}$. (Sugg.: usare il lemma di Zorn ed il punto 2 per ricondursi al caso A campo e $B = A[x]$, con x algebrico su A.)

1.7 Un lungo esercizio: il teorema di Lüroth

Gli esercizi di questa sezione, svolti nella sequenza proposta forniranno una dimostrazione del seguente celebre teorema.

Teorema 1.7.1 (Lüroth (1875)). *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $L \subset \mathbb{K}(x)$ un sottocampo. Se $\mathbb{K}$ è strettamente contenuto in L, allora L è una estensione puramente trascendente di $\mathbb{K}$.*

Esercizi

1.41 (versione geometrica, $*$). Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $F(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ un polinomio con le seguenti proprietà:

1. La relazione $\sim$ cosi definita:
   $$a \sim b \quad \text{se e solo se } (a, b) \in V(F) \subset \mathbb{K}^2,$$
   è una relazione di equivalenza su $\mathbb{K}$.
2. F è combinazione lineare di monomi $x^a y^b$, con $a, b \leq n$.
3. Esiste $x_0 \in \mathbb{K}$ tale che il polinomio $F(x_0, y) \in \mathbb{K}[y]$ possiede n radici semplici distinte.

Provare che esistono $f, g \in \mathbb{K}[t]$ di grado $\leq n$ tali che $F(x, y) = f(x)g(y) - f(y)g(x)$. (Sugg.: svolgere nell'ordine i seguenti punti:

1. Non è restrittivo supporre che F non contenga fattori del tipo $x - a$, $y - b$.
2. Il polinomio F è ridotto e $F(x, y) = \delta F(y, x)$, con $\delta \in \mathbb{K}$ tale che $\delta^2 = 1$.
3. Esistono n punti distinti $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $F(a_i, y) = c_i F(a_1, y)$ per opportune costanti $c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$.
4. Sia $V \subset \mathbb{K}[y]$ il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$; dimostrare che l'immagine dell'applicazione $\mathbb{K} \to V$, $a \mapsto F(a, y)$, è contenuta in un piano $P \subset V$.
5. Sia f, g una base di P. Per ogni $a \in \mathbb{K}$ esistono costanti α, β tali che $F(a, y) = \alpha f(y) - \beta g(y)$. Se $g(a)f(a) \neq 0$ esiste una costante c_a tale che $F(a, y) = c_a(g(a)f(y) - f(a)g(y))$.
6. Utilizzare la simmetria di F (punto 2) per mostrare che $c_a = c$ non dipende da a.)

1.42 ($*$). Siano $p, q \in \mathbb{K}[x]$ senza fattori comuni e sia n il massimo dei gradi di p e q. Si ponga $\phi = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{K}(x)$, $F(x, y) = p(x)q(y) - p(y)q(x)$ e

$$\varSigma(F) = \left\{ \frac{r(x)}{s(x)} \;\middle|\; F(x, y) \text{ divide } r(x)s(y) - r(y)s(x) \right\}.$$

Provare che $\varSigma(F) = \mathbb{K}(\phi)$ e che $\varSigma(F) \subset \mathbb{K}(x)$ è una estensione algebrica finita di grado n. Si noti che n è il grado di F rispetto alla variabile y. (Sugg.: provare nell'ordine i seguenti punti:

1. Σ è un campo contenente $\mathbb{K}(\phi)$.
2. L'estensione $\mathbb{K}(\phi) \subset \mathbb{K}(x)$ ha grado $\leq n$.
3. Siano $r, s \in \mathbb{K}[x]$ senza fattori comuni, se $r(x)s(y) - r(y)s(x)$ non è ridotto, allora $char\mathbb{K} = p > 0$ e $r, s \in \mathbb{K}[x]^p = \mathbb{K}[x^p]$; dedurre che in caratteristica p vale $\Sigma(F^p) = \Sigma(F)^p$ e quindi che le estensioni $\Sigma(F^p) \subset \mathbb{K}(x^p)$ e $\Sigma(F) \subset \mathbb{K}(x)$ hanno lo stesso grado.
4. Se F è ridotto, allora l'estensione $\Sigma(F) \subset \mathbb{K}(x)$ ha grado $\geq n$: se
$$g(t, x) = t^h + \sum_{i=0}^{h-1} t^i \frac{r_i(x)}{s_i(x)}$$
è il polinomio minimo di x su $\Sigma(F)$, e se $a \in \mathbb{K}$ è tale che $s_i(a) \neq 0$ e $F(x, a)$ possiede n radici distinte $a = a_1, \ldots, a_n$, allora $g(a_i, a) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.)

1.43 (versione algebrica effettiva, $*$). Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e siano $f_1, \ldots, f_d \in \mathbb{K}(x)$; scriviamo $f_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, con $p_i, q_i \in \mathbb{K}[x]$ senza fattori comuni. Poniamo $F_i(x, y) = p_i(x)q_i(y) - p_i(y)q_i(x)$ e sia F il massimo comune divisore di $F_1, \ldots, F_d$. Se il polinomio F_1 soddisfa le ipotesi della versione geometrica (Esercizio 1.42), allora anche F le soddisfa e, nelle notazioni dell'Esercizio 1.43, vale $\mathbb{K}(f_1, \ldots, f_d) = \Sigma(F) = \mathbb{K}(\phi)$ per qualche $\phi \in \mathbb{K}(x)$. (Sugg.: basta dimostrare che $\mathbb{K}(f_1, \ldots, f_d) = \Sigma(F)$, essendo le rimanenti asserzioni conseguenze immediate della versione geometrica del teorema di Lüroth. Dall'Esercizio 1.43 segue che $\mathbb{K}(f_i) = \Sigma(F_i) \subset \Sigma(F)$ e quindi $\mathbb{K}(f_1, \ldots, f_d) \subset \Sigma(F)$. Per il lemma di Gauss (**??**) F coincide con il massimo comune divisore di $F_1, \ldots, F_d$ nell'anello $\mathbb{K}(x)[y]$. Sia $g(y) \in \mathbb{K}(f_1, \ldots, f_d)[y]$ il polinomio minimo di x; dato che g divide i polinomi $p_i(y) - f_i q_i(y)$ in $\mathbb{K}(x)[y]$, ne segue che g divide F in $\mathbb{K}(x)[y]$ e quindi il grado dell'estensione $\mathbb{K}(f_1, \ldots, f_d) \subset \mathbb{K}(x)$ è minore o uguale al grado di F rispetto ad y. Applicare adesso l'Esercizio 1.43.)

1.44 (versione nazionalpopolare). Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $L \subset \mathbb{K}(x)$ un sottocampo. Provare che se $\mathbb{K}$ è strettamente contenuto in L, allora L è una estensione puramente trascendente di $\mathbb{K}$. (Sugg.: sia $f_1 \in L - \mathbb{K}$, allora $\mathbb{K}(f_1) \subset \mathbb{K}(x)$ è una estensione finita; a maggior ragione $\mathbb{K}(f_1) \subset L$ è finita e quindi $L = \mathbb{K}(f_1, \ldots, f_d)$. Se $\mathbb{K}$ ha caratteristica $p > 0$, allora a meno di sostituire x con x^{p^e} per un opportuno $e \geq 0$, si può prendere $f_1 \notin \mathbb{K}(x^p)$.)

2

La topologia di Zariski

In tutto il capitolo $\mathbb{K}$ denoterà un campo algebricamente chiuso. Chiameremo quasicompatto uno spazio topologico tale che ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito: riserveremo il termine compatto agli spazi quasicompatti di Hausdorff. Diremo che un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici è una **immersione topologica** se $f\colon X \to f(X)$ è un omeomorfismo, dove $f(X)$ ha la topologia di sottospazio. Notiamo che una applicazione continua $f\colon X \to Y$ è iniettiva e chiusa se e solo se è una immersione topologica e $f(X)$ è chiuso in Y. Similmente f è iniettiva ed aperta se e solo se è una immersione topologica e $f(X)$ è aperto in Y.

2.1 Esempi di spazi topologici

Ricordiamo che il luogo di zeri di un ideale $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è definito come

$$V(I) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \text{ per ogni } f \in I\}$$

e che l'ideale di un sottoinsieme $X \subset \mathbb{A}^n$ è

$$I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a) = 0 \text{ per ogni } a \in X\}.$$

Il Teorema degli Zeri di Hilbert 1.5.3 afferma che per ogni ideale $J \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ vale $I(V(J)) = \sqrt{J}$. Abbiamo inoltre già osservato che gli insiemi $V(I) = V(\sqrt{I})$ formano, al variare di I tra gli ideali di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, la famiglia dei chiusi di una topologia su $\mathbb{A}^n$ detta **topologia di Zariski**.

Definizione 2.1.1. *Un sottoinsieme non vuoto $X \subset \mathbb{A}^n$ si dice una **ipersuperfice affine** se $X = V(f)$ per qualche polinomio f di grado positivo.*

Siccome ogni ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è finitamente generato, si ha che ogni chiuso di Zariski è intersezione finita di ipersuperfici. Inoltre gli aperti $\mathbb{A}^n_f := \mathbb{A}^n - V(f)$, con $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, formano una base della topologia di Zariski.

In modo analogo è possibile definire la topologia di Zariski anche nello spazio proiettivo. Sia $x_0, \ldots, x_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n$ e denotiamo

$$S = \oplus S_d = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n],$$

dove S_d denota lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d. Dato un polinomio omogeneo $f \in S$ è ben definita **l'ipersuperfice proiettiva**

$$V_{\mathbb{P}}(f) = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0\}$$

e si definiscono i chiusi di Zariski come i sottoinsiemi che sono intersezione di ipersuperfici. Se $I \subset S$ è un ideale omogeneo si definisce $V_{\mathbb{P}}(I)$ come l'intersezione di tutte le ipersuperfici $V_{\mathbb{P}}(f)$ al variare di f tra gli elementi omogenei di I. Per definizione gli insiemi $V_{\mathbb{P}}(I)$, al variare di I tra gli ideali omogenei, sono tutti e soli i chiusi di Zariski. la verifica che i chiusi di Zariski sono realmente i chiusi di una topologia è lasciata per esercizio.

Da ora in poi, salvo avviso contrario, qualsiasi affermazione riguardante la topologia dello spazio affine e/o proiettivo si intende relativa alla topologia di Zariski.

Denotiamo con $\pi\colon \mathbb{A}^{n+1}-\{0\} \to \mathbb{P}^n$, $\pi(x_0,\dots,x_n) = [x_0,\dots,x_n]$, la proiezione al quoziente. Per ogni sottoinsieme $X \subset \mathbb{P}^n$ si definisce il **cono affine** di X come

$$C(X) = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}.$$

Si verifica immediatamente che se $I \subset S_+ := \oplus_{d>0} S_d$ è un ideale omogeneo allora $C(V_{\mathbb{P}}(I)) = V(I)$. Viceversa se $X \subset \mathbb{P}^n$ si definisce $I(X) \subset S_+$ come l'ideale generato dai polinomi omogenei di grado positivo che si annullano su X.

Lemma 2.1.2. *Nelle notazioni precedenti, per ogni sottoinsieme $X \subset \mathbb{P}^n$ vale $I(X) = I(C(X))$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione che $I(X)$ e $I(C(X))$ contengono gli stessi polinomi omogenei, basta quindi dimostrare che l'ideale $I(C(X))$ è omogeneo. Sia $f \in I(C(X))$ di grado m e $f = f_1 + \cdots + f_m$ la decomposizione di f nelle sue componenti omogenee; bisogna dimostrare che $f_i \in I(C(X))$ per ogni $i = 1,\dots,m$. Dato che $C(X)$ è un cono di centro 0, per ogni $t \in \mathbb{K}$ il polinomio $f_t(x_0,\dots,x_n) = f(tx_0,\dots,tx_n)$ appartiene ancora all'ideale $I(C(X))$. Dato che $f_t = tf_1 + \ldots + t^m f_m$, prendendo m valori distinti $t_1,\dots,t_m \in \mathbb{K}-\{0\}$ e invertendo la matrice di Vandermonde (t_i^j) si può scrivere $f_1,\dots,f_m$ come combinazione lineare dei polinomi $f_{t_1},\dots,f_{t_m}$. ☐

Teorema 2.1.3 (Teorema degli zeri proiettivo). *Per ogni ideale omogeneo $J \subset S_+$ vale $I(V_{\mathbb{P}}(J)) = \sqrt{J}$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Lemma 2.1.2 ed dal teorema degli zeri affine. ☐

Si osservi che l'enunciato del teorema degli zeri proiettivo sarebbe falso senza l'ipotesi $J \subset S_+$: ad esempio $V_{\mathbb{P}}(S) = V_{\mathbb{P}}(S_+) = \emptyset$.

Corollario 2.1.4. *Sia $J = \oplus J_d \subset S_+ = \oplus_{d>0} S_d$ un ideale omogeneo. Allora vale $V_{\mathbb{P}}(J) = \emptyset$ se e solo se esiste k tale che $S_d = J_d$ per ogni $d \geq k$.*

Dimostrazione. Se $S_d = J_d$ per qualche d allora $V(J) = \emptyset$. Viceversa se $V(J) = \emptyset$, allora per il teorema degli zeri $\sqrt{J} = S_+$ e dato che S_+ è finitamente generato esiste $k > 0$ tale che $S_+^k \subset J$. ☐

Corollario 2.1.5. *Nelle notazioni precedenti, siano $f_0,\dots,f_r \in S_+$ polinomi omogenei di gradi $d_0 \geq d_1 \geq \cdots \geq d_r > 0$ e, per ogni intero $d > 0$, si consideri l'applicazione lineare*

$$\phi_d\colon S_{d-d_0} \oplus \cdots \oplus S_{d-d_r} \to S_d, \qquad \phi_d(g_0,\dots,g_r) = g_0 f_0 + \cdots + g_r f_r.$$

Allora vale $V(f_0) \cap \cdots \cap V(f_r) = \emptyset$ se e solo se ϕ_d è surgettiva per qualche $d > 0$.

Dimostrazione. Ovvia conseguenza di 2.1.4. ☐

Osservazione 2.1.6. È possibile dimostrare (Esercizio **??**) che, nelle notazioni del Corollario 2.1.5, se $V(f_0,\dots,f_r) = \emptyset$, allora $r \geq n$ e ϕ_d è surgettiva per ogni $d \geq d_0 + d_1 + \cdots + d_n - n$.

Molto utili per le applicazioni sono gli spazi misti affino-multiproiettivi

$$\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m$$

sui quali si definisce la topologia di Zariski come l'unica topologia avente la seguente proprietà: *per ogni scelta di iperpiani $H_1 \subset \mathbb{P}^{n_1}, \dots, H_s \subset \mathbb{P}^{n_s}$, la topologia indotta sul sottospazio $(\mathbb{P}^{n_1} - H_1) \times \cdots \times (\mathbb{P}^{n_s} - H_s) \times \mathbb{A}^m$ coincide con la topologia di Zariski su $\mathbb{A}^{m+\sum n_i}$.*

In analogia con il caso di $\mathbb{P}^n$, possiamo definire una ipersuperfice in $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m$ come il luogo di zeri di un polinomio separatamente omogeneo nelle coordinate omogenee di ciascun fattore $\mathbb{P}^{n_i}$ e quindi definire i chiusi come intersezioni di ipersuperfici. Consideriamo per esempio il caso $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$. Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ risulta essere omogeneo rispetto alle variabili $x_0, \dots, x_n$ se e solo se si può scrivere $f(x, y) = \sum h_i(x)k_i(y)$, con i polinomi h_i omogenei dello stesso grado. Per un tale polinomio è ben definita la corrispondente ipersuperfice $V(f) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$. Ricordiamo (vedi il Capitolo **??**) che ogni fattore irriducibile di f è ancora omogeneo rispetto alle variabili $x_0, \dots, x_n$ e quindi, se $f = gh$, allora $V(f) = V(g) \cup V(h)$.

Teorema 2.1.7. *La proiezione sul secondo fattore $\pi\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ è un'applicazione chiusa.*

Dimostrazione. Sia $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ un chiuso e siano $x_0, \dots, x_n$ coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n$. Allora X è intersezione di un numero finito di ipersuperfici $V(f_0), \dots, V(f_r)$, con i polinomi $f_i(x, y)$ omogenei nelle variabili $x_0, \dots, x_n$. Un punto $a \in \mathbb{A}^m$ appartiene a $\pi(X)$ se e solo se i polinomi omogenei $f_0(x, a), \dots, f_r(x, a) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ hanno uno zero comune in $\mathbb{P}^n$ e questo equivale a dire che per ogni intero positivo d l'applicazione lineare $\phi_d(a)$, definita nel Corollario 2.1.5, non è surgettiva. Se Y_d denota l'insieme dei punti a tali che $\phi_d(a)$ non è surgettiva, allora vale $X = \cap_d Y_d$ e quindi è sufficiente dimostrare che Y_d è chiuso per ogni d. L'applicazione lineare $\phi_d(a)$ è rappresentata da una matrice i cui coefficienti dipendono in modo polinomiale da a e la condizione $\phi_d(a)$ non surgettiva equivale all'annullarsi dei determinanti minori di ordine uguale alla dimensione di S_d. Questo prova la chiusura di Y_d. □

Corollario 2.1.8. *La proiezione*

$$\mathbb{P}^{n_0} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m$$

è un'applicazione chiusa.

Dimostrazione. Basta osservare che $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m$ è ricoperto da un numero finito di spazi affini $\mathbb{A}^{m+\sum n_i}$. □

Esercizi

2.1. Provare che $\mathbb{A}^n$, inteso come spazio topologico, è quasicompatto.

2.2. Dimostrare che per ogni scelta di $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, l'applicazione $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^s$, definita da $a \mapsto (p_1(a), \dots, p_s(a))$ è continua: in particolare le affinità di $\mathbb{A}^n$ in sé sono omeomorfismi.

2.3. Mostrare che l'applicazione $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n+1}$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n, 0)$, è una immersione topologica chiusa.

2.4. Utilizzando la bigezione naturale $\mathbb{A}^{n+m} \cong \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$, confrontare la topologia di Zariski su $\mathbb{A}^{n+m}$ con la topologia prodotto su $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ e provare che se $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ sono chiusi, allora $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$ è chiuso.

Osservazione 2.1.9. Il fatto che la topologia di Zariski su $\mathbb{A}^{n+m}$ è strettamente più fine della topologia prodotto permette di supplire a certi inconvenienti tipici delle topologie non-Hausdorff. Ad esempio il grafico dell'applicazione definita nell'Esercizio 2.2 è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{A}^{n+s}$.

2.5. Dimostrare che le proiettività $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ sono omeomorfismi e che l'applicazione $\mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n$ definita da $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto [1, a_1, \ldots, a_n]$ è una immersione topologica aperta.

2.6. Provare che la proiezione sul secondo fattore $\mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ è aperta. (Sugg.: applicare l'Esercizio 1.15 ad un opportuno ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n$.)

2.7. Siano $X \subset \mathbb{A}^n$ un chiuso, $I = I(X)$ il suo ideale, $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio e $\Gamma \subset X \times \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^{n+1}$ il grafico dell'applicazione $f \colon X \to \mathbb{A}^1$. Dimostrare che Γ è chiuso e che $I(\Gamma)$ è l'ideale generato da I e da $x_{n+1} - f(x_1, \ldots, x_n)$.

2.2 L'immersione di Veronese

Siano $f_0, \ldots, f_s \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ polinomi omogenei dello stesso grado d senza zeri comuni, cioè tali che $V(f_0, \ldots, f_s) = \emptyset$. Possiamo definire un'applicazione

$$f \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^s, \qquad f([x]) = [f_0(x), \ldots, f_s(x)],$$

che si verifica immediatamente essere continua.

Definizione 2.2.1. *La* ***d-esima immersione di Veronese***

$$v_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

è l'applicazione definita in coordinate omogenee da

$$v_d([x_0, \ldots, x_n]) = [\ldots, x^I, \ldots],$$

al variare di $I = (i_0, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tra tutti i multiindici di grado $|I| = i_0 + \cdots + i_n = d$ e dove $x^{(i_0,\ldots,i_n)} = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$. Il numero $N+1$ è perciò uguale al numero di monomi di grado d nelle variabili $x_0, \ldots, x_n$ e quindi $N = \binom{n+d}{d} - 1$.

Ad esempio la seconda immersione di Veronese $v_2 \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ è data da

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2].$$

Proposizione 2.2.2. *Per ogni coppia di interi positivi n e d, la d-esima immersione di Veronese $v_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ è una immersione topologica chiusa e la sua immagine $v_d(\mathbb{P}^n)$ è intersezione finita di quadriche proiettive.*

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che per ogni proiettività ϕ di $\mathbb{P}^n$ esiste una proiettività indotta ψ su $\mathbb{P}^N$ tale che $v_d\phi = \psi v_d$. Dato che v_d non è costante ed il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}^n$ agisce in modo doppiamente transitivo (significa che $\mathrm{PGL}(n+1)$ agisce transitivamente su $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n -$Diagonale) ne segue immediatamente che v_d è iniettiva. Il fatto che v_d è una applicazione chiusa può essere dedotto da un risultato generale non costruttivo che dimostreremo in seguito. Per motivi didattici preferiamo dare qui una dimostrazione costruttiva della chiusura di v_d.

Sia $y_{I_0}, \ldots, y_{I_N}$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}^N$ tale che l'equazioni $y_{I_j} = x^{I_j}$ definiscono l'immersione di Veronese. Poniamo $X = v_d(\mathbb{P}^n)$ dotato della topologia di sottospazio e proviamo prima che $v_d \colon \mathbb{P}^n \to X$ è un omeomorfismo e poi che X è intersezione finita di quadriche in $\mathbb{P}^N$. Dato che ogni chiuso di $\mathbb{P}^n$ è intersezione di ipersuperfici, è sufficiente provare che $v_d(V(g))$ è chiuso in X per ogni polinomio omogeneo g. A meno di sostituire g con una sua potenza non è restrittivo supporre che il grado di g sia un multiplo di d. Esiste allora un polinomio $P \in \mathbb{K}[y_0, \ldots, y_N]$ tale che $P(x^{I_0}, \ldots, x^{I_N}) = g$. È allora evidente che $v_d(V(g)) = X \cap V(P)$. Consideriamo il chiuso di $\mathbb{P}^N$, intersezione di (finite) quadriche

$$Y = \bigcap \{V(y_{I_1} y_{I_2} - y_{J_1} y_{J_2}) \mid I_1 + I_2 = J_1 + J_2\}.$$

È chiaro che $X \subset Y$; proviamo che vale $X = Y$. Sia $[y] \in Y$ e sia $I = (i_0, \ldots, i_n)$ un multiindice tale che $y_I \neq 0$. A meno di permutazioni degli indici si può supporre $i_0 > 0$; se $i_0 < d$ possiamo trovare due multiindici $J = (j_0, \ldots, j_n)$ e H, di grado d, tali che $2I = J + H$ e $j_0 > i_0$. Siccome $y_I^2 = y_J y_H$ si ha $y_J \neq 0$. Non è quindi restrittivo supporre $I = (d, 0, 0, \ldots, 0)$ e se definiamo $x_0 = y_{(d,0,0,\ldots,0)} = 1$ e $x_j = y_{(d-1,0,\ldots,1,\ldots,0)}$ dove 1 è posto alla j-esima posizione si verifica facilmente che $f([x_0, \ldots, x_n]) = [y]$ (si noti che lo stesso argomento mostra che $v_d \colon \mathbb{P}^n \to Y$ è bigettiva). □

Esercizi

2.8 (Definizione intrinseca dell'immersione di Veronese). Sia V uno spazio vettoriale e denotiamo con V_d lo spazio vettoriale delle forme $f \colon V \to \mathbb{K}$ omogenee di grado d (cioè f si rappresenta con un polinomio omogeneo di grado d in ogni sistema di coordinate su V). Per ogni $p \in \mathbb{P}(V)$ denotiamo con $L(-p) \subset V_d$ il sottospazio vettoriale delle forme che si annullano in p. Dimostrare che $L(-p)$ è un iperpiano e che, in opportuni sistemi di coordinate, l'applicazione

$$\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}({V_d}^\vee), \qquad p \mapsto L(-p),$$

è la d-esima immersione di Veronese. (Sugg.: isomorfismi canonici $(V^\vee)_d = (V_d)^\vee$.)

2.9. Il complementare in $\mathbb{P}^n$ di una ipersuperfice proiettiva è omeomorfo ad un chiuso di uno spazio affine. (Sugg.: immersione di Veronese.)

2.10. Provare che l'immagine della n-esima immersione di Veronese

$$\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n, \qquad [x_0, x_1] \to [x_0^n, \ldots, x_1^n]$$

è il chiuso determinantale di equazione

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \leq 1.$$

2.3 Componenti irriducibili

In questa sezione svilupperemo alcune nozioni di topologia generale che ben si adattano alla topologia di Zariski.

Sia X uno spazio topologico, un sottoinsieme $Z \subset X$ si dice **localmente chiuso** se per ogni $z \in Z$ esiste un aperto $U \subset X$ tale che $z \in U$ e $Z \cap U$ è chiuso in U. Ad esempio i sottoinsiemi aperti ed i sottoinsiemi chiusi sono anche localmente chiusi.

Lemma 2.3.1. *Siano X uno spazio topologico e $Z \subset X$ un sottoinsieme. Allora sono fatti equivalenti:*

1. *Z è localmente chiuso.*
2. *Z è aperto in $\overline{Z}$ (rispetto alla topologia di sottospazio).*
3. *Z è intersezione di un chiuso e di un aperto di X.*

Dimostrazione. [1 ⇒ 2] Per ogni punto $z \in Z$ esiste un aperto $z \in U \subset X$ tale che $Z \cap U$ è chiuso in U e quindi esiste un chiuso $C \subset X$ tale che $C \cap U = Z \cap U$; a meno di sostituire C con $C \cup (X - U)$ non è restrittivo supporre $Z \subset C$. Quindi $Z \cap U \subset \overline{Z} \cap U \subset C \cap U = Z \cap U$ che implica $\overline{Z} \cap U \subset Z$.

Le implicazioni [2 ⇒ 3] e [3 ⇒ 1] sono banali. □

Definizione 2.3.2. *Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice* ***costruibile*** *se è unione finita di sottoinsiemi localmente chiusi.*

Lemma 2.3.3. *(??) Sia Z un sottoinsieme costruibile di uno spazio topologico. Allora Z contiene un aperto denso di $\overline{Z}$.*

Dimostrazione. Sara vero?

2.11. Sia Z un sottoinsieme costruibile di uno spazio topologico. Provare che Z contiene un aperto di $\overline{Z}$.

□

Definizione 2.3.4. *Uno spazio topologico si dice* ***irriducibile*** *se ogni coppia di aperti non vuoti ha intersezione non vuota. Equivalentemente uno spazio è irriducibile se non è unione finita di chiusi propri. Un sottospazio di uno spazio topologico si dice irriducibile se è irriducibile per la topologia indotta.*

Ad esempio l'insieme vuoto, i punti e, più in generale, qualsiasi spazio topologico dotato della topologia indiscreta è irriducibile.

Lemma 2.3.5. *Siano X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottospazio irriducibile. Allora:*

1. *La chiusura topologica $\overline{Y}$ è irriducibile.*
2. *Se $U \subset X$ è un aperto, allora $Y \cap U$ è irriducibile.*
3. *Se $f \colon X \to Z$ è continua, allora $f(Y)$ è irriducibile.*

Dimostrazione. [1] Siano U, V due aperti non vuoti di $\overline{Y}$, siccome Y è denso nella sua chiusura si ha $U \cap Y \neq \emptyset$, $V \cap Y \neq \emptyset$; siccome Y è irriducibile si ha $U \cap V \cap Y \neq \emptyset$ ed a maggior ragione $U \cap V \neq \emptyset$.

[2] Ogni aperto di $U \cap Y$ è aperto anche in Y. Se V_1, V_2 sono aperti non vuoti di $Y \cap U$ allora V_1 e V_2 sono aperti non vuoti di Y e quindi hanno intersezione non vuota.

[3] Basta osservare che se $U \subset f(Y)$ è un aperto non vuoto, allora $f^{-1}(U)$ è un aperto non vuoto di X. □

Lemma 2.3.6. *Sia U un aperto in uno spazio topologico X. Esiste una bigezione naturale tra l'insieme $\mathcal{A}$ dei chiusi irriducibili non vuoti di U e l'insieme $\mathcal{B}$ dei chiusi irriducibili di X che intersecano U. Più precisamente, le applicazioni*

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \qquad W \mapsto \overline{W},$$

$$\mathcal{B} \to \mathcal{A}, \qquad Z \mapsto Z \cap U,$$

sono una l'inversa dell'altra.

Dimostrazione. Per ogni chiuso C di X vale $C = (C - U) \cup \overline{(C \cap U)}$ e quindi se C è irriducibile e $C \cap U \neq \emptyset$ si ha $C = \overline{(C \cap U)}$. Viceversa, se B è un chiuso di U, esiste un chiuso D di X tale che $B = D \cap U$, dunque $\overline{B} \subset D$ e quindi $B = \overline{B} \cap U$. Per concludere basta applicare i punti 1 e 2 del Lemma 2.3.5. □

Lemma 2.3.7. *Siano dati due spazi topologici irriducibili X, Y ed una topologia sul prodotto cartesiano $X \times Y$ tale che per ogni $(x_0, y_0) \in X \times Y$ le inclusioni*

$$X \to X \times Y, \qquad x \mapsto (x, y_0),$$

e

$$Y \to X \times Y, \qquad y \mapsto (x_0, y),$$

siano continue. Allora anche $X \times Y$ è irriducibile.

Dimostrazione. Siano $U_1, U_2 \subset X \times Y$ aperti non vuoti, $(x_1, y_1) \in U_1$, $(x_2, y_2) \in U_2$. Per ipotesi i sottoinsiemi $V_1 = \{y \in Y \mid (x_1, y) \in U_1\}$ e $V_2 = \{y \in Y \mid (x_2, y) \in U_2\}$ sono aperti non vuoti di Y e quindi esiste $y_0 \in Y$ tale che $(x_1, y_0) \in U_1$ e $(x_2, y_0) \in U_2$. Ne segue che $W_1 = \{x \in X \mid (x, y_0) \in U_1\}$ e $W_2 = \{x \in X \mid (x, y_0) \in U_2\}$ sono aperti non vuoti di X e quindi esiste $x_0 \in X$ tale che $(x_0, y_0) \in U_1 \cap U_2$. □

Definizione 2.3.8. *Le* ***componenti irriducibili*** *di uno spazio topologico sono gli elementi massimali della famiglia dei chiusi irriducibili, ordinata rispetto all'inclusione.*

Definizione 2.3.9. *Uno spazio topologico X si dice* ***Noetheriano*** *se ogni famiglia di aperti possiede un elemento massimale rispetto all'inclusione.*

Per il Lemma **??** uno spazio topologico è Noetheriano se e solo se ogni catena numerabile ascendente di aperti è stazionaria: per passaggio al complementare si ha che uno spazio topologico è Noetheriano se e solo se ogni catena numerabile discendente di chiusi è stazionaria. Tutti gli spazi considerati nella Sezione 2.1 sono Noetheriani: infatti, ad una catena discendente di chiusi X_i dello spazio affine $\mathbb{A}^n$ corrisponde una catena ascendente di ideali $I(X_i)$ che, per il teorema della base di Hilbert, è stazionaria.

Lemma 2.3.10. *Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora:*

1. *X è quasicompatto.*
2. *Ogni immagine continua di X è Noetheriana.*
3. *Ogni sottospazio topologico di X è Noetheriano.*

Dimostrazione. [1] Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento di X; per trovare un sottoricoprimento finito basta prendere un elemento massimale nella famiglia delle unioni finite di aperti di $\mathcal{U}$.

[2] È banale.

[3] Sia $Y \subset X$ un sottospazio. Denotiamo con $\mathcal{T}(X)$ e $\mathcal{T}(Y) = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}(X)\}$ le famiglie di aperti di X e Y rispettivamente e con $r \colon \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(Y)$ la naturale mappa di restrizione. Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}(Y)$ una collezione di aperti e sia $U \in \mathcal{T}(X)$ un elemento massimale della famiglia $r^{-1}(\mathcal{F})$; proviamo che $r(U) = U \cap Y$ è massimale in $\mathcal{F}$. Se $r(U) \subset r(V)$ e $r(V) \in \mathcal{F}$ allora $U \cup V \in r^{-1}(\mathcal{F})$ e per la massimalità di U vale $V \subset U$ e quindi $r(U) = r(V)$. □

Teorema 2.3.11. *Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora:*

1. *X possiede un numero finito di componenti irriducibili $X_1, \ldots, X_n$.*
2. *$X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$.*

3. Per ogni indice i, la componente X_i non è contenuta nell'unione delle componenti X_j, per $j \neq i$.

Dimostrazione. Dimostriamo per cominciare che ogni chiuso di X si può scrivere come unione finita di chiusi irriducibili; a tal fine consideriamo la famiglia $\mathcal{C}$ di tutti i chiusi di X e la sottofamiglia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ dei chiusi che sono unioni finite di chiusi irriducibili. Se per assurdo $\mathcal{F} \neq \mathcal{C}$, allora esiste $Z \in \mathcal{C} - \mathcal{F}$ minimale; poiché $Z \notin \mathcal{F}$, il chiuso Z non è irriducibile e quindi esistono due chiusi propri Z_1, Z_2 tali che $Z = Z_1 \cup Z_2$. Per la minimalità di Z si ha che $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ e quindi anche $Z \in \mathcal{F}$. Possiamo quindi scrivere $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, dove ogni X_i è un chiuso irriducibile ed in modo tale che la condizione 3) sia soddisfatta. Dimostriamo che $X_1, \ldots, X_n$ sono tutte e sole le componenti irriducibili di X. Sia $Z \subset X$ un chiuso irriducibile, allora $Z = (Z \cap X_1) \cup \cdots \cup (Z \cap X_n)$ e quindi i chiusi $Z \cap X_i$ non possono essere tutti propri, ovvero esiste un indice i tale che $Z \subset X_i$. Lo stesso vale se Z è una componente irriducibile e quindi, tenendo presente la massimalità deduciamo che ogni componente irriducibile di X è uguale ad un X_i.

Viceversa se X_i non è massimale esiste una inclusione propria $X_i \subset Z$ con Z irriducibile; per l'argomento precedente Z è contenuto in qualche X_j in contraddizione con la condizione 3). □

Esercizi

2.12. Dimostrare che l'intersezione finita di sottoinsiemi localmente chiusi è localmente chiusa.

2.13. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{A}^2$ sono localmente chiusi?

$$X = \{xy \neq 0\} \cup \{(0,0)\}, \qquad Y = (\{xy = 1\} \cap \{x \neq y\}) \cup \{(1,1)\},$$

$$Z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid \begin{pmatrix} x & 2x \\ y & y \end{pmatrix} \text{ è diagonalizzabile} \right\}.$$

2.14. Dimostrare che la famiglia dei sottoinsiemi costruibili è la più piccola famiglia di sottoinsiemi che contiene gli aperti ed è chiusa per le operazioni di complemento e di unione finita.

2.15. Dimostrare che unione finita di spazi topologici Noetheriani è Noetheriana.

2.16. Dimostrare che in uno spazio topologico di Hausdorff ogni sottospazio irriducibile non vuoto è formato da un solo punto.

2.17. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua ed aperta. Se le fibre di f sono irriducibili e $Z \subset Y$ è irriducibile, provare che $f^{-1}(Z)$ è irriducibile.

2.18. Sia $\{Y_i\}$ una catena ascendente di sottospazi irriducibili di uno spazio topologico (non necessariamente Noetheriano). Dimostrare che $\cup Y_i$ e $\overline{\cup Y_i}$ sono irriducibili. Utilizzare il Lemma di Zorn per dedurre che ogni chiuso irriducibile è contenuto in una componente irriducibile e che ogni spazio topologico è unione delle sue componenti irriducibili.

2.19. Sia $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 aperti irriducibili non vuoti. Dimostrare che X è irriducibile se e solo se $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

2.20. Provare che ogni spazio topologico Noetheriano di Hausdorff è finito.

2.4 La dimensione combinatoria di uno spazio topologico

Definizione 2.4.1. *La **dimensione combinatoria** di uno spazio topologico*

$$\dim X \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$$

è l'estremo superiore dell'insieme dei numeri interi $n \geq -1$ per i quali esiste una catena $Z_{-1} \subset Z_0 \subset \cdots \subset Z_n \subset X$, dove gli Z_i sono chiusi irriducibili e $Z_i \neq Z_{i-1}$ per ogni i.

Lemma 2.4.2. *L'insieme vuoto ha dimensione -1. La dimesione di uno spazio topologico non vuoto X è maggiore od oguale a 0 ed è uguale all'estremo superiore dell'insieme dei numeri interi $n \geq 0$ per i quali esiste una catena $Z_0 \subset \cdots \subset Z_n \subset X$, dove gli Z_i sono chiusi irriducibili non vuoti e $Z_i \neq Z_{i-1}$ per ogni i.*

Dimostrazione. Siccome il vuoto è irriducibile, che la dimensione dell'insieme vuoto sia -1 segue immediatamente dalla definizione. Se X non è vuoto, allora per ogni punto $p \in X$ la sua chiusura $\overline{p}$ è un chiuso irriducibile e $\emptyset \subset \overline{p}$ è una inclusione propria di chiusi irriducibili; questo prova che $\dim X \geq 0$. □

Definizione 2.4.3. *La dimensione combinatoria di uno spazio topologico X in un punto $p \in X$ è l'estremo inferiore delle dimensioni degli aperti di X contenenti p, ossia*

$$\dim_p X = \inf\{\dim U \mid p \in U \text{ e } U \subset X \text{ aperto }\}.$$

Da ora in poi, quando non ci sarà rischio di confusione, scriveremo semplicemente dimensione intendendo la dimensione combinatoria. Conveniamo inoltre che se $p \notin X$, allora $\dim_p X = -1$.

Lemma 2.4.4. *Siano X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottospazio. Allora*

$$\dim Y \leq \dim X$$

e per ogni punto $p \in Y$ vale

$$\dim_p Y \leq \dim_p X.$$

Dimostrazione. Sia $Z \subset Y$ chiuso irriducibile e $\overline{Z}$ la chiusura di Z in X. Dalla formula $Z = Y \cap \overline{Z}$ segue che la chiusura in X trasforma inclusioni proprie di chiusi irriducibili di Y in inclusioni proprie di chiusi irriducibili di X. Questo prova che $\dim Y \leq \dim X$. Lo stesso argomento mostra che per ogni aperto U di X vale $\dim(Y \cap U) \leq \dim U$ e quindi che $\dim_p Y \leq \dim_p X$. □

Segue immediatamente dalla definizione e dal Lemma 2.4.4 che la dimensione in un punto è un invariante locale cioè, se $U \subset X$ è un aperto contenente un punto p, allora $\dim_p U = \dim_p X$.

Lemma 2.4.5. *Sia $Z_n \subset Z_{n-1} \subset \cdots \subset Z_0 \subset X$ una catena di inclusioni proprie di chiusi irriducibili di uno spazio topologico X, allora $\dim_p X \geq n$ per ogni $p \in Z_n$. In particolare vale*

$$\dim X = \sup_{p \in X} \dim_p X.$$

Dimostrazione. Sia U un aperto che contiene p. Per il Lemma 2.3.6 la restrizione ad U trasforma inclusioni proprie di chiusi irriducibili di X contenenti p in inclusioni proprie di chiusi irriducibili di U. Quindi $\dim U \geq n$ e quindi $\dim_p X \geq n$. □

Uno spazio avente la stessa dimensione in tutti i suoi punti è detto **equidimensionale** o di **dimensione pura**.

Lemma 2.4.6. *Sia X uno spazio topologico irriducibile di dimensione finita. Allora per ogni chiuso proprio $Y \subset X$ vale $\dim Y < \dim X$.*

Dimostrazione. Sia $n < +\infty$ la dimensione di X e si assuma per assurdo che esista una catena di n inclusioni proprie di chiusi irriducibili di Y, diciamo $Z_n \subset Z_{n-1} \subset \cdots \subset Z_0 \subset Y$. Poiché $X \neq Y$ si avrebbe che la catena di chiusi irriducibili $Z_n \subset \cdots \subset Z_0 \subset X$ sarebbe propria e quindi $\dim X \geq n+1$. □

Lemma 2.4.7. *Sia $\pi \colon X \to Y$ un'applicazione continua, chiusa e surgettiva tra spazi topologici Noetheriani. Allora:*

1. $\dim X \geq \dim Y$;
2. *se $y \in Y$ e la fibra $\pi^{-1}(y)$ è formata da un sol punto x, allora $\dim_x X \geq \dim_y Y$.*

Dimostrazione. [1] È sufficiente dimostrare che per ogni catena finita $Z_n \subset \cdots \subset Z_0$ di chiusi irriducibili di Y esiste una catena $H_n \subset \cdots \subset H_0$ di chiusi irriducibili di X tali che $\pi(H_i) = Z_i$. Essendo $\pi^{-1}(Z_0)$ un chiuso in uno spazio Noetheriano esso è unione di un numero finito di componenti irriducibili, diciamo $\pi^{-1}(Z_0) = W_1 \cup \cdots \cup W_s$. I chiusi $\pi(W_j)$ ricoprono Z_0 e per l'irriducibilità esiste un indice j tale che $\pi(W_j) = Z_0$. Poniamo $H_0 = W_j$ e ripetiamo il ragionamento con H_0 al posto di X e Z_1 al posto di Z_0.

[2] Se $\dim_x X = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare; se $\dim_x X < +\infty$ scegliamo un aperto $p \in U \subset X$ tale che $\dim_x X = \dim U$. Sia $V = Y - \pi(X - U)$, allora V è un aperto che contiene y e $x \in \pi^{-1}(V) \subset U$. Siccome $\pi^{-1}(V) \to V$ è continua, chiusa e surgettiva, per la prima parte del lemma si ha

$$\dim_y Y \leq \dim V \leq \dim \pi\pi^{-1}(V) \leq \dim U = \dim_x X.$$

□

Lemma 2.4.8. *Siano $\{X_i \mid i \in I\}$ le componenti irriducibili di uno spazio topologico Noetheriano X. Allora*

$$\dim X = \sup\{\dim X_i \mid i \in I\}$$

e per ogni punto $p \in X$ vale

$$\dim_p X = \sup\{\dim_p X_i \mid p \in X_i\}.$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Esercizi

2.21. Trovare una topologia su $\mathbb{N}$ che lo rende uno spazio topologico Noetheriano di dimensione infinita.

2.22. Dato uno spazio topologico X, un'applicazione $f \colon X \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ si dice semicontinua superiormente se per ogni $p \in X$ esiste un aperto $U \subset X$ tale che $p \in U$ e $f(q) \leq f(p)$ per ogni $q \in U$. Equivalentemente f è semicontinua superiormente se per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ il sottoinsieme $\{p \in X \mid f(p) \geq n\}$ è chiuso. Dimostrare che l'applicazione $p \mapsto \dim_p X$ è semicontinua superiormente.

2.5 La dimensione dello spazio affine

Dimostriamo adesso che la dimensione di $\mathbb{A}^n$ è uguale a n. Tale risultato, associato all'esistenza delle proiezioni normalizzate, permetterà di trovare un'utile caratterizzazione della dimensione dei chiusi affini e proiettivi.

Lemma 2.5.1. *Un sottoinsieme chiuso $X \subset \mathbb{A}^n$ è irriducibile se e solo se $I(X)$ è un ideale primo.*

Dimostrazione. Se $X = X_1 \cup X_2$ con X_i chiusi propri, allora esistono $f_i \in I(X_i) - I(X)$, $i = 1, 2$. Chiaramente $f_1 f_2 \in I(X)$ e quindi $I(X)$ non è primo.

Viceversa se $f_1, f_2 \notin I(X)$ e $f_1 f_2 \in I(X)$ allora possiamo scrivere $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_i = X \cap V(f_i)$ è un chiuso proprio e dunque X non è irriducibile. □

Corollario 2.5.2. *Lo spazio affine $\mathbb{A}^n$ è uno spazio topologico Noetheriano irriducibile.*

Dimostrazione. L'ideale $I(\mathbb{A}^n) = 0$ è primo. □

Definizione 2.5.3. *Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un chiuso di Zariski. Diremo che la proiezione lineare sulle prime $n-1$ coordinate $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ è **normalizzata** rispetto a X se esiste un polinomio $f \in I(X)$ che è monico di grado positivo rispetto alla variabile x_n.*

Segue dal Lemma di Proiezione 1.4.3 che, se $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ è normalizzata rispetto a X, allora $\pi\colon X \to \mathbb{A}^{n-1}$ è un'applicazione chiusa e $I(\pi(X)) = I(X) \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

Lemma 2.5.4. *Supponiamo che la proiezione sulle prime $n-1$ coordinate $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ sia normalizzata rispetto ad un chiuso irriducibile non vuoto $X \subset \mathbb{A}^n$. Allora per ogni chiuso proprio $Z \subset X$ vale $\pi(Z) \neq \pi(X)$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.4.3, la proiezione $\pi\colon X \to \mathbb{A}^{n-1}$ è un applicazione chiusa, $I(\pi(X)) = I(X) \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e $I(\pi(Z)) = I(Z) \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Dato che $\pi(X)$ è irriducibile e Z è unione finita di irriducibili, non è restrittivo supporre Z irriducibile e non vuoto. Siccome $I(X) \subset I(Z)$ sono ideali primi, $1 \notin I(Z)$ e $I(X)$ contiene un polinomio monico in x_n, per il Corollario 1.1.12 si ha $I(X) \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}] \neq I(Z) \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e quindi $\pi(X) \neq \pi(Z)$. □

Proposizione 2.5.5. *Se la proiezione sulle prime coordinate $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ è normalizzata rispetto ad un chiuso irriducibile non vuoto $X \subset \mathbb{A}^n$, allora $\dim X = \dim \pi(X)$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 2.5.4, la proiezione π trasforma inclusioni proprie di chiusi irriducibili di X in inclusioni proprie di chiusi irriducibili di $\pi(X)$ contenenti $\pi(p)$: questo prova che $\dim X \leq \dim \pi(X)$. D'altronde per il Lemma 2.4.7 $\dim X \geq \dim \pi(X)$ e quindi $\dim X = \dim \pi(X)$. □

Teorema 2.5.6. *Per ogni intero $n \geq 0$ lo spazio affine $\mathbb{A}^n$ ha dimensione pura n. Se $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ sono chiusi irriducibili, allora $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$ è irriducibile di dimensione $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.*

Dimostrazione. Lo spazio affine ha dimensione pura in quanto il gruppo degli omeomorfismi agisce transitivamente. Proviamo inizialmente, per induzione su n che $\dim \mathbb{A}^n = n$. Gli unici chiusi propri irriducibili di $\mathbb{A}^1$ sono i punti, quindi il teorema è vero per $n = 1$; per induzione possiamo supporre il teorema vero per $\mathbb{A}^{n-1}$. Esiste una ovvia catena di chiusi irriducibili $0 = Z_n \subset \cdots \subset Z_1 \subset Z_0 = \mathbb{A}^n$, dove $Z_i = \{x_1 = \cdots = x_i = 0\}$, dalla quale segue che $\dim \mathbb{A}^n \geq n$. Per ogni chiuso proprio irriducibile $X \subset \mathbb{A}^n$ si ha $\dim X < n$; infatti a meno di un cambio lineare di coordinate la proiezione $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ è normalizzata rispetto a X e per la Proposizione 2.5.5 si ha $\dim X = \dim \pi(X) \le \dim \mathbb{A}^{n-1} = n-1$. Questo prova che $\dim \mathbb{A}^n = n$. Consideriamo adesso due chiusi irriducibili $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$; dal Lemma 2.3.7 segue che anche $X \times Y$ è irriducibile. Se $X = \mathbb{A}^n$ e $Y = \mathbb{A}^m$, allora $X \times Y = \mathbb{A}^{n+m}$ e la formula $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$. Altrimenti, supponiamo per fissare le idee che $X \neq \mathbb{A}^n$; a meno di un generico cambio di coordinate la proiezione $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ è normalizzata rispetto a X e quindi anche la proiezione

$$\pi \times Id\colon \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{A}^m$$

è normalizzata rispetto a $X \times Y$ e quindi $\dim(X \times Y) = \dim(\pi(X) \times Y)$. La conclusione segue per induzione.

□

La dimostrazione di 2.5.5 fornisce, assieme al Teorema 2.5.6, una ricetta per il calcolo della dimensione di un chiuso affine X; basta infatti eseguire una serie di proiezioni $\pi_n\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}, \ldots, \pi_{s+1}\colon \mathbb{A}^{s+1} \to \mathbb{A}^s$ normalizzate rispetto a X, $\pi_n(X)$ ecc... in modo tale che $\pi_{s+1}\pi_{s+2}\cdots\pi_n(X) = \mathbb{A}^s$. La dimensione di X sarà quindi uguale a s.

Concludiamo il paragrafo analizzando in dettaglio il caso delle ipersuperfici. Abbiamo già osservato che $V(f)$ è irriducibile se f è irriducibile. In generale se $f_1, \ldots, f_r$ sono i fattori irriducibili di f vale $V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_r)$ e i chiusi $V(f_i)$ sono esattamente le componenti irriducibili di $V(f)$.

Proposizione 2.5.7. *Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ una ipersuperfice, allora $\dim_p X = n-1$ per ogni $p \in X$. Viceversa se $X \subset \mathbb{A}^n$ è un chiuso irriducibile di dimensione $n-1$ allora X è un'ipersuperfice.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per induzione su n, essendo il risultato banalmente vero per $n = 1$; possiamo quindi supporre $n > 1$ ed assumere il teorema vero per ipersuperfici in $\mathbb{A}^{n-1}$. Sia $p \in X$ un punto qualsiasi, poiché ogni componente di X è infinita, possiamo trovare un iperpiano affine H passante per p tale che $H \cap X$ non contiene alcuna componente irriducibile di $X \cup H$. L'intersezione $X \cap H$ è un chiuso di X ed una ipersuperfice in $H = \mathbb{A}^{n-1}$; per induzione

$$n-2 = \dim_p(X \cap H) < \dim_p X < n = \dim \mathbb{A}^n.$$

Viceversa, se $X \subset \mathbb{A}^n$ è irriducibile di dimensione $n-1$, allora l'ideale $I(X) \neq 0$ è primo e contiene un polinomio irriducibile f. Dunque $X \subset V(f)$ e $\dim X = \dim V(f) < +\infty$. Dato che $V(f)$ è irriducibile, il Lemma 2.4.6 implica che $X = V(f)$. □

Esercizi

2.23 (Lemma di normalizzazione di E. Noether). Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un chiuso di Zariski. Diremo che la proiezione lineare sulle prime s coordinate $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^s$ è **normalizzata** rispetto a X se per ogni indice $i = s+1, s+2, \ldots, n$ esiste un polinomio $f_i \in I(X) \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_s][x_i] \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ che è monico di grado positivo rispetto alla variabile x_i.

Dimostrare:

1. Siano $\pi_1\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^s$, $\pi_2\colon \mathbb{A}^s \to \mathbb{A}^r$ proiezioni normalizzate rispetto a X e $\pi_1(X)$ rispettivamente. Allora $\pi_2 \circ \pi_1$ è normalizzata rispetto a X. (Sugg.: estensioni intere per gli esperti, induzione su $s-r$ e risultante per gli inesperti.)
2. Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un chiuso di dimensione s. Allora, a meno di un cambio lineare di coordinate, la proiezione sulle prime s coordinate è normalizzata rispetto a X.

2.6 La dimensione delle intersezioni

Una delle caratteristiche fondamentali degli spazi considerati nella geometria algebrica classica (pre teoria degli schemi) è che ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni omeomorfi a chiusi affini. D'altra parte ogni chiuso affine può essere pensato come un aperto di un chiuso proiettivo; è quindi possibile studiare le proprietà locali, come ad esempio la dimensione in un punto, restringendo la nostra attenzione alla classe dei chiusi proiettivi.

Teorema 2.6.1. *Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$, dotato della topologia di Zariski, è uno spazio irriducibile Noetheriano di dimensione pura n.*

Dimostrazione. Siccome ogni punto possiede un intorno omeomorfo ad $\mathbb{A}^n$ si deduce immediatamente che $\dim_p \mathbb{P}^n = n$ per ogni $p \in \mathbb{P}^n$. □

Uno dei vantaggi dei chiusi proiettivi è la mancanza di asintoti e quindi la normalizzazione automatica delle proiezioni.

Lemma 2.6.2. *Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso, $o \notin X$ un punto e $\pi\colon (\mathbb{P}^n - \{o\}) \to \mathbb{P}^{n-1}$ la proiezione di centro o. Allora:*

1. *Ogni fibra di $\pi\colon X \to \pi(X)$ ha cardinalità finita.*
2. *$\pi(X)$ è chiuso in $\mathbb{P}^{n-1}$ e* $\dim X = \dim \pi(X)$.
3. *Se $p \in X$ e la retta $\overline{op}$ interseca X solamente nel punto p, allora* $\dim_p X = \dim_{\pi(p)} \pi(X)$.

Dimostrazione. Siano $x_0, \ldots, x_n$ coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n$ tali che $o = [1, 0, \ldots, 0]$, allora la proiezione si esprime in coordinate omogenee come $\pi([x_0, \ldots, x_n]) = [x_1, \ldots, x_n]$. Dato che $o \notin X$, esiste un polinomio omogeneo $f \in I(X)$ tale che $f(o) \neq 0$. Necessariamente f è un multiplo scalare di un polinomio monico in x_0, basta quindi applicare i risultati del paragrafo precedente alle restrizioni $\pi_i\colon X \cap \mathbb{A}^n_i \to H \cap \mathbb{A}^n_i = \mathbb{A}^{n-1}$ dove $\mathbb{A}^n_i = \{x_i \neq 0\}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. □

Corollario 2.6.3. *Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso e sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n$ che non intersecano X. Se $K \in \mathcal{F}$ è un elemento massimale rispetto all'inclusione, allora* $\dim X + \dim K = n - 1$.

Dimostrazione. Il risultato è banalmente vero se $X = \emptyset, \mathbb{P}^n$ oppure $n = 1$. Se $X \neq \emptyset, \mathbb{P}^n$, allora prendiamo un punto $o \in K$ e denotiamo con $\pi\colon X \to \mathbb{P}^{n-1}$ la proiezione di centro o. Per il Lemma 2.6.2, i chiusi X e $\pi(X)$ hanno la stessa dimensione, mentre $\dim \pi(K) = \dim K - 1$. Dato che $\pi(K)$ è chiaramente massimale tra i sottospazi di $\mathbb{P}^{n-1}$ che non intersecano $\pi(X)$, l'induzione su n conclude la dimostrazione. □

Lemma 2.6.4. *Siano $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso di dimensione $\leq n - 2$ e $p \in X$ un punto qualsiasi. Allora esiste un punto $o \neq p$ tale che la retta $\overline{op}$ interseca X solamente nel punto p.*

Dimostrazione. Per il Corollario 2.6.3 esiste una retta $L \subset \mathbb{P}^n$ che non interseca X; indichiamo con P il piano proiettivo generato dalla retta L e dal punto p. Dato che $(X \cap P) \cap L = \emptyset$, per il Corollario 2.6.3 la dimensione di $X \cap P$ è uguale a 0. Dunque $X \cap P$ è un insieme finito di punti ed esistono al più finiti punti $o \in L$ che non soddisfano la condizione richiesta. □

Teorema 2.6.5. *Siano $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso, H un iperpiano e $p \in X \cap H$ un punto:*

1. *Se* $p \in Z \subset X$ *è un sottoinsieme chiuso irriducibile, allora* $\dim_p X \geq \dim Z$.
2. *Se* X *è irriducibile, allora* $\dim_p X = \dim X$.
3. $\dim_p(X \cap H) \geq \dim_p X - 1$. *In particolare se* X *è irriducibile tutte le componenti di* $X \cap H$ *hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione. Se $n = 1$ il teorema è evidente, per induzione su n possiamo assumere vero il teorema per chiusi di $\mathbb{P}^{n-1}$. Osserviamo che se il teorema vale per ogni componente irriducibile di X allora vale anche per X, non è quindi restrittivo assumere X chiuso proprio irriducibile e $Z = X$.

Se X è una ipersuperfice abbiamo già dimostrato che $\dim_p X = \dim X = n - 1$ e $X \cap H$ è ancora una ipersuperfice e quindi $\dim_p(X \cap H) \geq n - 2$.

Se X non è una ipersuperfice allora $\dim X < n - 1$ e per il Lemma 2.6.4 esiste una proiezione $\pi\colon X \to \mathbb{P}^{n-1}$ tale che $\pi^{-1}(\pi(p)) = p$; per induzione su n si ricava

$$\dim_p X = \dim_{\pi(p)} \pi(X) = \dim \pi(X) = \dim X.$$

Sia $Y = X \cap H$; se $X = Y$, allora il punto 3) è banale; se Y è un chiuso proprio di X, allora $\dim Y < \dim X$ e quindi $\dim Y \leq \dim H - 2$. Per 2.6.4 esiste una proiezione $\pi\colon X \to \mathbb{P}^{n-1}$ di centro $o \in H$ tale che $\pi^{-1}(\pi(p)) = p$. Dunque $\dim_p Y = \dim_{\pi(p)} \pi(Y)$ e la conclusione segue osservando che $\pi(Y)$ è una sezione iperpiana di $\pi(X)$. □

Corollario 2.6.6. *Sia* $U \subset \mathbb{P}^n$ *un sottoinsieme localmente chiuso irriducibile, allora* U *è equidimensionale.*

Dimostrazione. Sia $X = \overline{U}$ la chiusura proiettiva di U. Poiché U è aperto in X vale $\dim_p U = \dim_p X$; se U è irriducibile anche X è irriducibile e se X è equidimensionale anche U è equidimensionale. □

Grazie all'immersione di Veronese, che sappiamo essere una immersione topologica chiusa, possiamo generalizzare immediatamente e senza fatica i precedenti risultati alle intersezioni di chiusi di $\mathbb{P}^n$ con ipersuperfici.

Corollario 2.6.7. *Sia* $X \subset \mathbb{P}^n$ *chiuso e* $H \subset \mathbb{P}^n$ *ipersuperfice, allora se* $\dim X > 0$ *vale* $X \cap H \neq \emptyset$ *e per ogni* $p \in X \cap H$ *si ha* $\dim_p(X \cap H) \geq \dim_p X - 1$. *In particolare* n *ipersuperfici in* $\mathbb{P}^n$ *hanno intersezione non vuota.*

Dimostrazione. Supponiamo $H = V(f)$, con f polinomio omogeneo di grado d. Se $v_d\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ indica la d-esima immersione di Veronese, allora esiste un unico iperpiano $W \subset \mathbb{P}^N$ tale che $v_d^{-1}(W) = H$ e quindi $v_d(X \cap H)$ è omeomorfo all'intersezione di $v_d(X)$ con W. □

Corollario 2.6.8 (Versione geometrica del teorema dell'ideale principale di Krull). *Siano* $X \subset \mathbb{A}^n$ *un chiuso e* $H \subset \mathbb{A}^n$ *ipersuperfice affine. Allora per ogni* $p \in X \cap H$ *vale* $\dim_p(X \cap H) \geq \dim_p X - 1$.

Dimostrazione. Immergiamo $\mathbb{A}^n$ in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ e prendiamo le chiusure di X e H. Basta osservare adesso che la chiusura proiettiva di una ipersuperfice è ancora una ipersuperfice, più precisamente se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ha grado d e $H = V(f)$, la chiusura di H in $\mathbb{P}^n$ è l'ipersuperfice definita dall'omogeneizzato di f in $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$. □

Teorema 2.6.9. *Sia* $X \subset \mathbb{A}^n$ *un chiuso affine. Allora la dimensione di* X *in un suo punto* p *è uguale al minimo intero* s *per il quale esistono* s *polinomi* $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ *ed un aperto* $U \subset X$ *tali che* $U \cap V(f_1, \dots, f_s) = p$.

Dimostrazione. Se $U \cap V(f_1, \ldots, f_s) = p$, allora per il Corollario 2.6.8 $0 = \dim\{p\} \geq \dim_p U - s$ e quindi $\dim_p X \leq s$. Viceversa se $\dim_p X = d > 0$, allora possiamo trovare un iperpiano $H_1 = V(f_1)$ passante per p e non contenente alcuna componente irriducibile di X. Abbiamo $\dim_p(X \cap H_1) = \dim_p X - 1$ e, ripetendo d volte il ragionamento, possiamo trovare d iperpiani $H_1, \ldots, H_d$ tali che $\dim_p X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_d = 0$ e quindi $d \geq s$. □

Osservazione 2.6.10. Il Teorema 2.6.9 è la versione geometrica del teorema [**?**, 11.14] di algebra commutativa secondo il quale la dimensione di un anello locale Noetheriano con ideale massimale $\mathfrak{m}$ è uguale al minimo numero di generatori di un ideale $\mathfrak{m}$-primario (vedi Esercizio **??**).

Corollario 2.6.11. *Siano $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ chiusi affini e $p \in X \cap Y$. Allora vale*

$$\dim_p(X \cap Y) \geq \dim_p X + \dim_p Y - n.$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $p = (0, \ldots, 0)$ e i chiusi X, Y irriducibili. L'applicazione diagonale $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$, $x \mapsto (x, x)$, è un'immersione topologica chiusa ed induce un omeomorfismo tra $X \cap Y$ e l'intersezione di $X \times Y$ con la diagonale Δ. Per Il Teorema 2.5.6 $\dim_0 X + \dim_0 Y = \dim_0(X \times Y)$ e, dato che Δ è data dall'intersezione di n iperpiani, per il Corollario 2.6.8

$$\dim_0(X \cap Y) = \dim_0(X \times Y \cap \Delta) \geq \dim_0 X + \dim_0 Y - n.$$

□

Esempio 2.6.12 (Il cono tangente ridotto). Consideriamo la moltiplicazione per scalare

$$\phi\colon \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n, \qquad \phi(t, x) = tx$$

e per ogni chiuso affine $X \subset \mathbb{A}^n$ denotiamo con $\hat{X} \subset \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n$ l'unione delle componenti irriducibili di $\phi^{-1}(X)$ che non sono contenute in $\{0\} \times \mathbb{A}^n$ e con $C_0(X) = \hat{X} \cap (\{0\} \times \mathbb{A}^n)$. Notiamo che $\hat{X}$ è la chiusura di Zariski dell'insieme delle coppie (t, x) tali che $t \neq 0$ e $tx \in X$ e di conseguenza che $C_0(X \cup Y) = C_0(X) \cup C_0(Y)$ per ogni coppia di chiusi X, Y. Se $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ scriviamo $f = f_m + f_{m+1} + \cdots$ con f_i omogeneo di grado i e $f_m \neq 0$; chiameremo $m = \operatorname{mult}_0(f)$ la molteplicità di f in 0 e f_m la forma iniziale di f. Vogliamo adesso dimostrare che:

1. Se $X = V(I)$ per qualche ideale $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, allora $C_0(X)$ è il luogo di zeri delle forme iniziali degli elementi di I.
2. $C_0(X) \neq \emptyset$ se e solo se $0 \in X$.
3. $\dim_0 X = \dim C_0(X)$.

Per dimostrare (1), osserviamo che se $X = V(I)$, allora $\phi^{-1}(X)$ è il luogo di zeri dei polinomi $g(t, x) = f(tx)$ al variare di $f \in I$ e quindi $\hat{X}$ è il luogo di zeri dei polinomi $\hat{f}(t, x) := \dfrac{f(tx)}{t^m}$, dove $m = \operatorname{mult}_0(f)$ e f varia in I. Ne segue che $C_0(X)$ è il luogo di zeri dei polinomi $\hat{f}(0, x)$, con $f \in I$. Basta adesso osservare che $\hat{f}(0, x)$ è esattamente la forma iniziale di f. Per dimostrare (2) notiamo che $0 \in X$ se e solo se ogni $f \in I$ ha molteplicità in 0 positiva e questo è equivalente a dire che 0 annulla tutte le forme iniziali degli elementi di I. Per dimostrare (3) possiamo assumere X irriducibile e $0 \in X$; in particolare $\dim_0 X = \dim X$. Siano $Y_1, \ldots, Y_s$ le componenti irriducibili di $\hat{X}$, è chiaro che nessuna delle Y_i è contenuta in un iperpiano $t =$costante. Applicando il Corollario 2.6.8 all'intersezione di $\hat{X}$ con gli iperpiani $t = 1$ e $t = 0$ otteniamo le uguaglianze $\dim \hat{X} - 1 = \dim X$ e $\dim C_0(X) = \dim \hat{X} - 1$. Il cono $C_0(X)$ si dice **cono tangente ridotto** a X nel punto 0.

Esempio 2.6.13 (Coni proiettivi). Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso: identifichiamo $\mathbb{P}^n$ con un iperpiano di $\mathbb{P}^{n+1}$ e prendiamo un punto $o \in \mathbb{P}^{n+1} - \mathbb{P}^n$. L'insieme $C_{\mathbb{P}}(X) \subset \mathbb{P}^{n+1}$, unione delle rette $\overline{op}$ al variare di $p \in X$ si dice **cono proiettivo** di X. Possiamo trovare coordinate omogenee $x_0, \ldots, x_{n+1}$ in $\mathbb{P}^{n+1}$ tali che $o = [1, 0, \ldots, 0]$ e l'iperpiano $\mathbb{P}^n$ abbia equazione $x_0 = 0$. Per costruzione, un polinomio omogeneo $f = \sum_i x_0^i f_i(x_1, \ldots, x_{n+1})$ si annulla su $C_{\mathbb{P}}(X)$ se e solo se tutti i f_i si annullano su X. Dunque $C_{\mathbb{P}}(X)$ è il chiuso proiettivo definito da tutti i polinomi omogenei in $x_1, \ldots, x_{n+1}$ che si annullano in X.

Mostriamo adesso che se X è irriducibile, allora anche $C_{\mathbb{P}}(X)$ è irriducibile di dimensione $\dim X + 1$. Se $U, V \subset C_{\mathbb{P}}(X)$ sono aperti non vuoti, allora esiste un iperpiano H che non contiene o e che li interseca entrambi; siccome la proiezione di centro o induce una proiettività tra X e $C_{\mathbb{P}}(X) \cap H$, ne segue che $U \cap V \cap H \neq \emptyset$. Il computo della dimensione segue dal fatto che X è una sezione iperpiana propria di $C_{\mathbb{P}}(X)$. Si noti che la restrizione di $C_{\mathbb{P}}(X)$ all'aperto affine $x_0 \neq 0$ è isomorfa al cono affine $C(X)$.

Teorema 2.6.14. *Siano $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ chiusi irriducibili. Se $\dim X + \dim Y \geq n$ allora $X \cap Y \neq \emptyset$ e in ogni punto $p \in X \cap Y$ vale $\dim_p X \cap Y \geq \dim X + \dim Y - n$.*

Dimostrazione. Basta mostrare che $X \cap Y \neq \emptyset$, essendo la stima sulla dimensione locale di $X \cap Y$ conseguenza immediata del Corollario 2.6.11. Nelle notazioni dell'Esempio 2.6.13

$$\dim_o(C_{\mathbb{P}}(X) \cap C_{\mathbb{P}}(Y)) \geq (\dim X + 1) + (\dim Y + 1) - (n + 1) > 0$$

e quindi $C_{\mathbb{P}}(X) \cap C_{\mathbb{P}}(Y)$ contiene almeno una retta passante per o che interseca l'iperpiano $\mathbb{P}^n$ in un punto di $X \cap Y$. $\square$

Esercizi

2.24. Siano $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomi omogenei non nulli dello stesso grado $d > 0$ e denotiamo $X = V(x_0^d + f, g) \subset \mathbb{P}^n$. Dimostrare che il chiuso X ha dimensione $n - 2$ e che il numero delle sue componenti irriducibili non supera d volte il numero di componenti irriducibili dell'ipersuperfice $V(g)$. In caratteristica 0, trovare f e g come sopra tali che X ha esattamente d^2 componenti irriducibili.

2.25. Mostrare con un esempio che, se X, Y, Z sono chiusi irriducibili di $\mathbb{P}^n$ con $X \cup Y \subset Z$ e $\dim X + \dim Y \geq \dim Z$, è generalmente falso che $X \cap Y \neq \emptyset$.

2.26. Nelle notazioni dell'Esempio 2.6.12, mostrare che, se $g_1, \ldots, g_r$ sono generatori dell'ideale $I(X)$, allora in generale $C_0(X)$ non è definito dalle parti iniziali di $g_1, \ldots, g_r$.

2.7 La dimensione delle fibre

Il principale risultato di questa sezione è noto come teorema sulla dimensione delle fibre ed è la versione moderna dell'ottocentesco **principio di Plücker-Clebsch** sul quale rimandiamo a [**?**, Libro I, p. 149] per maggiori informazioni.

Teorema 2.7.1. *Sia $X \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n$ un chiuso, $\pi \colon X \to \mathbb{A}^m$ la proiezione sul primo fattore e per ogni $q \in \mathbb{A}^m$ denotiamo $X_q = \pi^{-1}(q) = X \cap (\{q\} \times \mathbb{P}^n)$. Allora:*

1. *Per ogni $p \in X$ vale $\dim_p X \leq \dim_p X_q + \dim_q \pi(X)$, dove $q = \pi(p)$.*
2. *Per ogni intero h, l'insieme $Y_h = \{q \in \mathbb{A}^n \mid \dim X_q \geq h\}$ è un chiuso di Zariski.*
3. *Se X è irriducibile, allora esiste un aperto denso $U \subset \pi(X)$ tale che $\dim X_q = \dim X - \dim \pi(X)$ per ogni $q \in U$.*

Dimostrazione. [1] Sia $r = \dim_q \pi(X)$, esistono allora r iperpiani $H_1, \ldots, H_r$ di $\mathbb{A}^m$ passanti per q tali che q è un punto isolato di $\pi(X) \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r$; si ha quindi $\dim_p X_q = \dim_p(X \cap (H_1 \times \mathbb{P}^n) \cap \cdots \cap (H_r \times \mathbb{P}^n))$ e, dato che $H_i \times \mathbb{P}^n$ è un iperpiano per ogni i, si ha che $\dim_p X_q \geq \dim_p X - r$.

[2] Sappiamo che π è una applicazione chiusa: per ogni sottoinsieme $Z \subset \pi(X)$ denotiamo con $d_Z = \min\{\dim X_q \mid q \in Z\} \in \mathbb{N}$. Poniamo $X_0 = X$, $Z_0 = \pi(X)$ e sia $q \in Z_0$ tale che $\dim X_q = d_{Z_0}$. Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un sottospazio proiettivo massimale che non interseca X_q e poniamo $Z_1 = \pi(X_0 \cap (\mathbb{A}^m \times H))$, $X_1 = \pi^{-1}(Z_1)$. Segue immediatamente dalla costruzione che, se $Z_0 \neq \emptyset$, allora Z_1 è un chiuso proprio di Z_0 e vale$\dim X_q = d_{Z_0}$ per ogni $q \in Z_0 - Z_1$. Ripetiamo il procedimento con X_1, Z_1 al posto di X_0, Z_0 e costruiamo X_2, Z_2 al posto di X_1, Z_1. Iterando il procedimento troviamo una catena discendente di chiusi $Z_0 \supset Z_1 \supset \cdots \supset Z_i \supset \cdots$ con le proprietà che $Z_{i+1} \neq Z_i$, eccetto il caso in cui $Z_i = \emptyset$, e $\dim X_q = d_{Z_i}$ per ogni $q \in Z_i - Z_{i+1}$. Per Noetherianità $Z_i = \emptyset$ per $i >> 0$ e gli insiemi Y_h corrispondono ai chiusi Z_i tali che $d_{Z_i} > d_{Z_{i-1}}$.

[3] Segue da [1] e [2] che l'insieme U dei punti $q \in \pi(X)$ tali che $\dim X_q = \dim X - \dim \pi(X)$ è aperto; dato che $\pi(X)$ è irriducibile basta dimostrare che U non è vuoto. Siano $s = \dim X$, $r = \dim \pi(X)$ e dimostriamo il risultato per induzione su r. Se $r = 0$ allora $\pi(X)$ è un punto e l'asserto è banale. Si assuma $r > 0$, sia $Z \subset \pi(X)$ un chiuso irriducibile di dimensione $r - 1$ e denotiamo $W = X \cap \pi^{-1}(Z)$. Osserviamo che W è un chiuso di $\mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n$ di dimensione strettamente minore di s e che la proiezione $\pi\colon W \to Z$ è surgettiva. Scriviamo $W = X_1 \cup \cdots \cup X_a \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_b$, dove X_i, Y_j sono le componenti irriducibili divise in modo tale che $\pi(X_i) = Z$ e $\pi(Y_j) \neq Z$. Dato che π è chiusa e Z è irriducibile necessariamente dovrà aversi $a > 0$. Per l'ipotesi induttiva, per ogni $i = 1, \ldots, a$, esiste un aperto non vuoto $U_i \subset Z$ tale che le fibre di X_i sopra U_i hanno dimensione esattamente $\dim X_i - r + 1 \leq s - r$. Per qualsiasi punto $q \in (U_1 \cap \cdots \cap U_a) - (\pi(Y_1) \cup \cdots \cup \pi(Y_b))$ vale $\dim X_q = s - r$. $\square$

Corollario 2.7.2. *Nelle notazioni del Teorema 2.7.1, se $\pi(X)$ è irriducibile e se, al variare di $q \in \pi(X)$, le fibre X_q sono tutte irriducibili e della stessa dimensione, allora X è irriducibile.*

Dimostrazione. Siano $Z_1, \ldots, Z_a, W_1, \ldots, W_b$ le componenti irriducibili di X ordinate in modo tale che $\pi(Z_i) = \pi(X)$, $\pi(W_i) \neq \pi(X)$ e $\dim Z_1 \geq \dim Z_i$ per ogni i. Proviamo che $X = Z_1$. Dato che Y è irriducibile e π è chiusa deve essere $a > 0$, denotiamo con s e r le dimensioni di Z_1 e $\pi(X)$ rispettivamente. Per il Teorema 2.7.1 esiste un aperto denso $U \subset \pi(X)$ tale che, per ogni $q \in U$, vale $(W_i)_q = \emptyset$ e $\dim(Z_i)_q = \dim Z_i - r$; ne segue in particolare che se $q \in U$, allora la dimensione di X_q è esattamente $s - r$. Per ipotesi le fibre X_q sono tutte irriducibili di dimensione $s - r$ e quindi per ogni $q \in \pi(X)$ vale $(Z_1)_q \subset X_q$, $\dim(Z_1)_q \geq s - r = \dim X_q$ e di conseguenza $(Z_1)_q = X_q$. Questo implica che $Z_1 = X$. $\square$

Lo stesso argomento usato in 2.1.8 mostra che il Teorema 2.7.1 ed il suo Corollario 2.7.2 restano validi per sottoinsiemi chiusi $X \subset \mathbb{P}^{n_0} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m$ e per la proiezione $\pi\colon X \to \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m$.

Vediamo adesso alcune applicazioni dei precedenti risultati.

Esempio 2.7.3 (Insiemi costruibili). Proviamo adesso che, nelle stesse notazioni di 2.7.1, se $Z \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n$ è costruibile allora anche $\pi(Z)$ è costruibile. Chiaramente non è restrittivo supporre Z localmente chiuso ed irriducibile, ovvero $Z = X \cap V$ con X chiuso irriducibile e V aperto. Se $Z = \emptyset$ non c'è nulla da dimostrare; se $Z \neq \emptyset$ allora vale $X = Z \cup C$ con C chiuso di dimensione $\dim C < \dim X$. Per il Teorema 2.7.1 esiste un aperto non vuoto $U \subset \pi(X)$ tale che per ogni $q \in U$ vale $\dim X_q = \dim X - \dim \pi(X)$ e $\dim C_q < \dim X - \dim Y$. Dunque $U \subset \pi(Z)$ e quindi $\pi(Z) = U \cup \pi(Z \cap \pi^{-1}(\pi(X) - U))$; siccome la chiusura di $Z \cap \pi^{-1}(\pi(X) - U)$ è strettamente contenuta in X basta ragionare per induzione sulla dimensione di $\overline{Z}$ per dedurre che $\pi(Z \cap \pi^{-1}(\pi(X) - U))$ è costruibile e quindi che anche $\pi(Z)$ è costruibile.

Esempio 2.7.4 (Curve piane singolari). Sia n un intero maggiore di 1 e sia $\mathbb{P}^N$, con $N = \frac{1}{2}n(n+3)$, lo spazio proiettivo delle curve piane di grado n. Dimostriamo che l'insieme $Y \subset \mathbb{P}^N$ delle curve singolari è una ipersuperfice irriducibile. Consideriamo infatti l'insieme $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N$ formato dalle coppie (p, C) tali che p è un punto singolare di C. Si vede facilmente che X è un chiuso, infatti la coppia di punti di coordinate omogenee $([x], [F])$, con F equazione di C, appartiene a X se e solo se $F(x) = F_0(x) = F_1(x) = F_2(x) = 0$. Fissato un punto $p \in \mathbb{P}^2$ le curve piane singolari in p formano un sistema lineare di dimensione $N - 3$, per i Teoremi 2.7.1 e 2.7.2 applicati alla proiezione $X \to \mathbb{P}^2$, o più precisamente alle restrizioni agli aperti affini di $\mathbb{P}^2$, abbiamo che X è irriducibile di dimensione $N-1$. La fibra di $\pi\colon X \to \mathbb{P}^N$ sopra la curva C consiste nell'insieme dei punti singolari di C, e siccome esiste almeno una curva di grado n con un punto singolare, per il Teorema 2.7.1 ricaviamo che $Y = \pi(X)$ è un chiuso irriducibile di dimensione $N - 1$ e quindi una ipersuperfice.

Esempio 2.7.5 (Luoghi determinantali, cfr. Esercizio **??***).* Sia n un intero positivo fissato: per ogni coppia di interi $m \geq k \geq \max(0, m-n)$ denotiamo con $M(n, m)$ lo spazio vettoriale delle matrici $n \times m$ a coefficienti nel campo base $\mathbb{K}$ e con $M_{m,k} \subset \mathbb{P}(M(n, m))$ l'insieme delle classi di omotetia di matrici il cui nucleo ha dimensione $\geq k$. Proviamo per induzione su k che $M_{m,k}$ è un chiuso irriducibile di dimensione $(m-k)(n+k)-1$.

Se $k = \max(0, m-n)$ allora $M_{m,k} = \mathbb{P}(M(n, m))$, $(m-k)(n+k)-1 = nm-1$ e l'asserto è banalmente verificato. Supponiamo quindi $k > \max(0, m-n)$ e consideriamo

$$X_{m,k} = \{([A], [x]) \in \mathbb{P}(M(n, m)) \times \mathbb{P}^{m-1} \mid [A] \in M_{m,k},\ Ax = 0\}.$$

Le fibre della proiezione $X_{m,k} \to \mathbb{P}^{m-1}$ sono tutte isomorfe a $M_{m-1,k-1}$ e quindi per l'ipotesi induttiva ed il Corollario 2.7.2 $X_{m,k}$ è irriducibile di dimensione $(m-k)(n+k-1)+(m-1)-1$. La proiezione $X_{m,k} \to M_{m,k}$ è surgettiva e quindi $M_{m,k}$ è irriducibile. Inoltre le fibre sui punti dell'aperto non vuoto $M_{m,k} - M_{m,k+1}$ sono isomorfe a $\mathbb{P}^{k-1}$; per il Teorema 2.7.1 vale $\dim M_{m,k} = \dim X_{m,k} - (k-1) = (m-k)(n+k)-1$.

Altre significative applicazioni di 2.7.1 e 2.7.2 saranno esposte prossimamente utilizzando il linguaggio delle varietà algebriche.

Esercizi

2.8 Esercizi complementari

2.27. Uno spazio topologico si dice **Artiniano** se ogni famiglia di aperti contiene un elemento minimale. Sia X uno spazio topologico Artiniano, provare che:

1. X contiene un numero finito di punti chiusi.
2. Ogni chiuso di X è unione finita di componenti irriducibili.
3. Se X è irriducibile, l'unione dei chiusi propri di X è un chiuso proprio.
4. $(*)$ Se X è anche Noetheriano allora contiene un numero finito di aperti. (Sugg.: uno spazio Artiniano con infiniti chiusi contiene una catena discendente non stazionaria di chiusi.)

2.28. Mostrare che esistono spazi topologici Artiniani di dimensione infinita.

2.29. Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Provare che un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se e solo se per ogni chiuso irriducibile $E \subset X$ esiste un sottoinsieme $S \subset E$ aperto in E tale che $S \subset A \cap E \subset \overline{S}$. (Sugg.: si consideri la famiglia dei chiusi C di X tali che $C - A$ non è chiuso.)

2.30. Descrivere l'immagine dell'applicazione $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $f(x, y) = (x, xy)$ e dire se è chiusa, aperta, localmente chiusa, costruibile o niente di tutto ciò.

2.31. (caratteristica $\neq 2$) Determinare le componenti irriducibili di

$$X = \{x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 1 - y^2 - z^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^3.$$

2.32. Nelle notazioni del Corollario 2.1.5, se $n = 2, r = 1$ e f_0, f_1 sono senza fattori comuni, determinare la dimensione del conucleo di ϕ_d per $d >> 0$. (Sugg.: descrivere il nucleo di ϕ_d.)

2.33. Siano $p, q \in \mathbb{N}$ senza fattori comuni, $X = \{x^p = y^q\} \subset \mathbb{A}^2$ e $\phi\colon \mathbb{A}^1 \to X$ definita da $\phi(t) = (t^q, t^p)$. Provare che ϕ è un omeomorfismo. (Sugg.: esistono interi n, m tali che $np + mq = 1$.)

2.34. Si consideri l'applicazione $\phi\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$, $\phi(t) = (t, t^2, t^3)$; dimostrare che $X = \phi(\mathbb{A}^1)$ è chiuso e si determini $I(X)$.

2.35. Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri di Hilbert per $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

2.36. Dimostrare che:

1. Ogni sottoinsieme costruibile di $\mathbb{A}^n$ è della forma $\pi(X)$, dove $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$ è un sottoinsieme chiuso e π è la proiezione sulle prime n coordinate. (Sugg.: mostrare prima che ogni sottoinsieme localmente chiuso di $\mathbb{A}^n$ è della forma $\pi(X)$.)
2. Un sottoinsieme costruibile $Z \subset \mathbb{A}^n$ è chiuso se e solo se $Z \cap C$ è chiuso per ogni chiuso irriducibile $C \subset \mathbb{A}^n$ di dimensione 1.
3. Il risultato di 2) è generalmente falso senza l'ipotesi che Z sia costruibile.

2.37. Nelle stesse notazioni del Teorema 2.7.1 si provi che la funzione

$$\mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{Z}, \qquad p \mapsto \dim_p X_{\pi(p)}$$

è semicontinua superiormente. (Sugg.: se l'asserzione è vera per due sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n$ allora è vera anche per la loro unione; non è quindi restrittivo supporre X irriducibile. Ragionare per induzione sulla dimensione di $\pi(X)$ utilizzando 2.7.1.)

2.38. Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un chiuso e $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ la proiezione sulle prime $n-1$ coordinate. Provare che se $f = \sum_{i \geq 0} g_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^{d-i} \in I(X)$, allora $\pi(X) - V(g_0)$ è chiuso in $\mathbb{A}^{n-1} - V(g_0)$ e dedurne che $\pi(X)$ contiene un aperto di $\overline{\pi(X)}$. (Sugg.: si può ripetere sostanzialmente la dimostrazione del lemma di proiezione oppure si può considerare il chiuso $\tilde{X} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}$ definito da $I(X)$ e $1 - tg_0$.)

2.39. Provare che $\mathbb{A}^2$ e $\mathbb{P}^2$, dotati della topologia di Zariski, non sono omeomorfi. Più in generale se $n \geq 2$ e $X \subset \mathbb{P}^n$ è chiuso di dimensione $\leq n-3$, si provi che $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{P}^n - X$ non sono omeomorfi.

2.40. (caratteristica $\neq 2$) Sia $X \subset \mathbb{A}^3$ il chiuso definito dalle equazioni $xy - z^2 = y^3 - x^5 = 0$. Provare che X ha due componenti irriducibili.

2.41. (caratteristica 0) Sia $F(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio omogeneo di grado $m > 0$ senza fattori multipli; poniamo $C = V(F) \subset \mathbb{A}^n$ e sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottospazi affini di $\mathbb{A}^n$ contenuti in C. Definiamo infine C_0 come l'intersezione dei sottospazi in $\mathcal{A}$ che sono massimali rispetto all'inclusione. Provare:

1. C_0 è un sottospazio affine contenente l'origine $(0, \ldots, 0)$.
2. A meno di un cambio lineare di coordinate si può assumere che esista $s \le n$ tale che $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ per ogni $i > s$ e i polinomi $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_s}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$.
3. $(*)$ In un sistema di coordinate come al punto 2) vale $C_0 = \{x_1 = \cdots = x_s = 0\}$.

2.42. Sia $M = M(n, n, \mathbb{K})$ lo spazio affine delle matrici $n \times n$ e sia $X \subset \mathbb{P}(M)$ il proiettivizzato dell'insieme delle matrici A che hanno un autovalore $\lambda \neq 0$ tale che $\lambda^n + (-1)^n \det(A) = 0$. Provare che X è una ipersuperfice irriducibile.

2.43 $(*)$. Dimostrare che ogni chiuso proprio in $\mathbb{P}^n$ è intersezione (insiemistica) di al più $n+1$ ipersuperfici. (Sugg.: Esercizio 1.14.)

2.44. Sia $S_d \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d e $v_n \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ la n-esima immersione di Veronese. Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $V_d = \{f \in S_d \mid v_n(\mathbb{P}^1) \subset V(f)\}$ per ogni $d > 0$.

2.45. (caratteristica 0) Sia $X \subset M(4, 4, \mathbb{K}) = \mathbb{A}^{16}$ il sottoinsieme delle matrici A tali che I, A e A^2 sono vettori linearmente dipendenti in $M(4, 4, \mathbb{K})$. Dimostrare:

1. X è chiuso.
2. X non è irriducibile (Sugg.: polinomio caratteristico).

2.46 (Lo scoppiamento). Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un chiuso e denotiamo con: $Y = X - \{0\}$, con $\tilde{Y} \subset (\mathbb{A}^n - \{0\}) \times \mathbb{P}^{n-1}$ l'insieme dei punti $\{(y, [y])\}$ al variare di $y \in Y$, con $\tilde{X} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ la chiusura di Zariski di $\tilde{Y}$ e con $E = (\{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}) \cap \tilde{X}$.

1. Dimostrare che $\tilde{Y}$ è un chiuso di $(\mathbb{A}^n - \{0\}) \times \mathbb{P}^{n-1}$ omeomorfo a Y. (Sugg.: considerare dapprima il caso $X = \mathbb{A}^n$.)
2. Descrivere esplicitamente $\tilde{X}$ ed E nei casi $X = \mathbb{A}^n$ e X ipersuperfice.
3. Se X è unione di due chiusi X_1 e X_2, provare che $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$.
4. Mostrare che, se $0 \in X$, allora il cono affine di E coincide con il cono tangente ridotto $C_0(X)$ e quindi $\dim_0 X = \dim E + 1$.

2.47 (Scoppiamento lungo sottospazi proiettivi). Sia $K \subset \mathbb{P}^n$ un sottospazio proiettivo di codimensione $h+1$, con $h > 0$; denotiamo con $\mathbb{P}^h$ lo spazio proiettivo dei sottospazi di $\mathbb{P}^n$ di codimensione h che contengono K e con

$$\mathrm{Bl}_K \mathbb{P}^n = \{(p, H) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^h \mid p \in H\}.$$

(Si noti che $K \times \mathbb{P}^h \subset \mathrm{Bl}_K \mathbb{P}^n$.) Indichiamo con $\pi_1 \colon \mathrm{Bl}_K \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ e $\pi_2 \colon \mathrm{Bl}_K \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^h$ le proiezioni sui fattori.
1) Mostrare che per ogni sottospazio H di codimensione h vale $\pi_1 \pi_2^{-1}(H) = H$ e che, se $p \notin K$ allora $\pi_2 \pi_1^{-1}(p) = K + p$.
2) Se K è definito dalle $h+1$ equazioni lineari indipendenti $f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$, con $i = 0, \ldots, h$, provare che $\mathrm{Bl}_K \mathbb{P}^n$ è il chiuso definito dalle $\dbinom{h+1}{2}$ equazioni $y_i f_j(x_0, \ldots, x_n) = y_j f_i(x_0, \ldots, x_n)$, con $0 \le i < j \le h$.
3) Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso tale che alcuna componente irriducibile di X sia contenuta in K. Allora si definisce $\mathrm{Bl}_K X \subset \mathrm{Bl}_K \mathbb{P}^n$ come l'unione delle componenti irriducibili di $\pi_1^{-1}(X)$ che non sono contenute in $\pi_1^{-1}(K)$.

Dimostrare che la proiezione $\pi_1\colon \operatorname{Bl}_K X \to X$ è surgettiva ed induce una bigezione tra le rispettive famiglie di componenti irriducibili. Provare inoltre che $\dim \operatorname{Bl}_K X = \dim X$ e $\dim(\pi_1^{-1}(K) \cap \operatorname{Bl}_K X) < \dim X$.
4) Provare che $\pi_2 \operatorname{Bl}_K X = \overline{\pi_K(X - K)}$, dove π_K indica la proiezione di centro K.

2.48 (Varietà secante). Si considerino due spazi proiettivi $\mathbb{P}^{2n+1}$ e $\mathbb{P}^n$ aventi rispettivamente coordinate omogenee $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$ e $t_0, \ldots, t_n$. Dati due chiusi irriducibili non vuoti $X, Y \subset \mathbb{P}^n$, sia $\tilde{V}$ l'insieme delle coppie $([t], [x, y]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{2n+1}$ tali che $x \in C(X)$, $y \in C(Y)$ e $t_i(x_j - y_j) = t_j(x_i - y_i)$ per ogni i, j. Siano $p\colon \tilde{V} \to \mathbb{P}^n$, $q\colon \tilde{V} \to \mathbb{P}^{2n+1}$ le proiezioni sui fattori. Mostrare che $\tilde{V}$ è un chiuso ed esiste una unica componente irriducibile $V \subset \tilde{V}$ tale che $q(V)$ non è contenuta in $H = \{x_i = y_i \, \forall i\}$. Detti $S(X, Y) = p(V)$, $J(X, Y) = q(V)$, mostrare che $J(X, Y)$, $S(X, Y)$ sono chiusi irriducibili, $\dim S(X, Y) \le \dim J(X, Y) = \dim V = \dim X + \dim Y + 1$ e che $S(X, Y)$ contiene come sottoinsieme denso l'unione di tutte le rette $\overline{ab}$ al variare di $a \in X$, $b \in Y$, $a \neq b$.

I chiusi $S(X, Y)$ e $J(X, Y)$ sono detti rispettivamente **join** e **join astratto** di X e Y, mentre $S(X, X)$ è detto **varietà secante** di X. Descrivere la varietà secante dell'immagine della seconda immersione di Veronese $v_2\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$.