INTRODUZIONE ALLA COOMOLOGIA DEI FASCI

MARCO MANETTI

Nota: *queste note sono state abbozzate dal docente e revisionate da alcuni studenti, in occasione del* ***Percorso di Eccellenza 2014****, rivolto a studenti del terzo anno del corso di laurea in Matematica della Sapienza. Sono scritte in uno stile succinto e sono intese in parte come base di lavoro autonomo per il lettore; in particolare alcune dimostrazioni sono lasciate per esercizio.*

Prima parte: algebra

1. Fasci, spighe e morfismi

Definizione 1.1. Sia X uno spazio topologico. Un **prefascio** $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su X è il dato di:

(1) un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ per ogni aperto $U \subset X$;
(2) un omomorfismo di gruppi $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ per ogni inclusione di aperti $V \subset U$.

Il dato precedente deve soddisfare le seguenti condizioni:

(F0) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;
(F1) $\rho_{UU} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ è l'identità per ogni U;
(F2) se $W \subset V \subset U$ sono inclusioni di aperti, allora $\rho_{UW} = \rho_{VW}\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(W)$.

Se $\mathcal{F}$ è un prefascio, gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ vengono usualmente detti le **sezioni** di $\mathcal{F}$ su U, in particolare gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(X)$ sono detti **sezioni totali**; i morfismi ρ_{UV} vengono detti morfismi di **restrizione**. A volte, per semplicità notazionale, se $s \in \mathcal{F}(U)$ e $V \subset U$ si scrive $\rho_{UV}(s) = s_{|V}$.

Naturalmente per descrivere un prefascio è sufficiente definire le sue sezioni ed i morfismi di restrizione esclusivamente per gli aperti non vuoti.

Definizione 1.2. Un prefascio $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su X si dice un **fascio** se per ogni famiglia di aperti $\{U_i\}$, $i \in I$, di X valgono le seguenti condizioni:

(F3) Siano $U = \bigcup_i U_i$ e $s \in \mathcal{F}(U)$. Allora $s = 0$ se e solo se $s_{|U_i} = \rho_{UU_i}(s) = 0$ per ogni i.
(F4) Data, per ogni i, una sezione $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ in modo tale che per ogni i, j le due restrizioni di s_i ed s_j all'aperto $U_i \cap U_j$ coincidono, allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s_{|U_i} = s_i$ per ogni i.

È immediato osservare che se vale la condizione (F3) allora la sezione s in (F4) è unica. Ribadiamo che ogni fascio è, per definizione, anche un prefascio. Esistono prefasci che non sono fasci, come nell'esempio seguente.

Esempio 1.3. Consideriamo un insieme sconnesso, ad esempio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per ogni aperto $U \neq \emptyset$ poniamo $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$. Sia $V \subset U$ se $V \neq \emptyset$ prendiamo come morfismo di restrizione l'identità, altrimenti se $V = \emptyset$ per la proprietà (F0) l'unico morfismo che possiamo prendere è quello banale. Mostriamo quindi che non vale la proprietà di incollamento (F4). Scelti gli aperti $U = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ e $V = \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$, presi due elementi $s \in \mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ e $p \in \mathcal{F}(V) = \mathbb{Z}$ diversi tra loro, le loro restrizioni coincidono sull'intersezione che è l'insieme vuoto, ma non esiste alcun elemento di $\mathbb{Z}$ tale che la restrizione su U valga s e su V valga p.

Osservazione 1.4. In teoria dei fasci esistono alcune variazioni sulle notazioni usate che devono essere conosciute per poter comprendere i testi scritti. In particolare, per il gruppo delle sezioni di un fascio $\mathcal{F}$ su di un aperto U vengono usate indistintamente le due notazioni:

$$\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F}) .$$

(Per i prefasci che non sono fasci si usa solo la notazione $\mathcal{F}(U)$).

Date: Roma, Agosto 2014.

Esempio 1.5. Il fascio $\mathcal{C}_X$ delle funzioni continue in uno spazio topologico X è definito come

$$\mathcal{C}_X(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ continue }\} \qquad \forall\, \emptyset \neq U \subset X,$$

e i morfismi ρ_{UV} sono quelli di restrizione usuale.

Esempio 1.6 (Fasci localmente costanti)**.** Sia X uno spazio topologico. Ad ogni gruppo abeliano G possiamo associare il fascio G_X delle funzioni localmente costanti a valori in G:

$$G_X(U) = \{f\colon U \to G \text{ localmente costante }\} \qquad \forall\, \emptyset \neq U \subset X.$$

Come sopra i morfismi ρ_{UV} sono quelli di restrizione. Poiché somma e differenza di due funzioni localmente costanti sono ancora localmente costanti, ogni $G_X(U)$ è in modo naturale un gruppo abeliano.

Esempio 1.7 (Fasci di sezioni discontinue)**.** Sia $\mathcal{U}$ un insieme (grande) di gruppi abeliani. Per ogni spazio topologico X e per ogni applicazione

$$\phi\colon X \to \mathcal{U}, \qquad x \mapsto \phi(x),$$

possiamo definire un fascio su X, che indicheremo $\mathcal{C}^0\phi$, ponendo, per ogni aperto non vuoto $U \subset X$:

$$\Gamma(U, \mathcal{C}^0\phi) = \mathcal{C}^0\phi(U) = \prod_{x\in U} \phi(x)\ .$$

Quindi dare un elemento $s \in \mathcal{C}^0\phi(U)$ equivale a dare un elemento $s_x \in \phi(x)$ per ogni punto $x \in U$.

Lemma 1.8. *Siano $\mathcal{F}$ un fascio su X e $\mathcal{G}$ un sottoprefascio di $\mathcal{F}$. Ossia, per ogni aperto U, $\mathcal{G}(U)$ è un sottogruppo di $\mathcal{F}(U)$ e $\rho_{UV}(\mathcal{G}(U)) \subset \mathcal{G}(V)$.*

Allora $\mathcal{G}$ è un fascio se e solo se per ogni famiglia di aperti $\{U_i\}$, $i \in I$, e per ogni sezione $s \in \mathcal{F}(\bigcup_i U_i)$ vale $s_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$ per ogni i se e solo se $s \in \mathcal{G}(\bigcup_i U_i)$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Dimostriamo la proprietà ($F3$): scegliamo gli aperti $\{U_i\}$ con $\bigcup U_i = U$. Scegliamo $s \in \mathcal{G}(U)$. $s \in \mathcal{F}(U)$, dunque vista come elemento di $\mathcal{F}(U)$, $s = 0 \iff s_{|U_i} = 0\ \forall i$. Ma per ogni aperto V, $\mathcal{G}(V)$ è un sottogruppo di $\mathcal{F}(V)$, dunque ha l'elemento nullo, da cui la tesi. Per dimostrare invece ($F4$) scegliamo gli elementi s_i in modo che coincidano sull'intersezione $\forall i, j$. Di nuovo, vediamoli come elementi di $\mathcal{F}(U)$. Ma allora $\exists s : s_{|U_i} = s_i\ \ \forall i$. Ma dalla condizione $s_i = s_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i)\ \ \forall i$ si ricava che $s \in \mathcal{G}(U)$ e quindi la tesi.
($\Rightarrow$) Sappiamo che $\mathcal{G}$ è un fascio, sia $\{U_i\}$ una famiglia di aperti e sia $s \in \mathcal{F}(\bigcup U_i)$. Dobbiamo mostrare che $s_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i) \iff s \in \mathcal{G}(\bigcup U_i)$. Se $s \in \mathcal{G}(\bigcup U)$ allora applicando il morfismo di restrizione si ottiene $s_{|U_i} \in \mathcal{G}(\bigcup U_i)$, viceversa se $s_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i)\,\forall i$ allora vale l'ipotesi ($F4$) perché $\left(s_{|U_i}\right)\big|_{U_j} = s_{|U_i\cap U_j} = s_{|U_j\cap U_i} = \left(= s_{|U_j}\right)\big|_{U_i}$ e pertanto $\exists s' \in \mathcal{G}(\bigcup U_i)$ tale che $s'\big|_{U_i} = s_i$. Quindi applicando la proprietà ($F3$) a $s - s'$ si ottiene la tesi. $\square$

La costruzione dei germi di funzioni (si consulti [7][I.6.9-10]) si estende naturalmente alle sezioni di un prefascio.

Definizione 1.9 (germe e spiga)**.** Consideriamo la relazione di equivalenza

$$(U, s) \sim (V, t) \iff \exists W \text{ aperto tale che } x \in W \subset U \cap V \text{ e } \rho_{UW}(s) = \rho_{VW}(t)\ .$$

Dato un prefascio $\mathcal{F}$ definiremo spiga delle sezioni di $\mathcal{F}$ in x l'insieme

$$\mathcal{F}_x = \{\text{germi di sezioni di } \mathcal{F} \text{ in } x\} = \frac{\{(U, s) \mid x \in U,\ s \in \mathcal{F}(U)\}}{\sim},$$

Gli elementi della spiga, ossia le classi di equivalenza, sono detti germi.

Equivalentemente $\sim$ è la più piccola relazione di equivalenza tale che, per ogni $V \subset U$ ed ogni $s \in \mathcal{F}(U)$ si ha $(U, s) \sim (V, \rho_{UV}(s))$.

Ogni spiga è un gruppo abeliano, dove l'operazione di somma è indotta per passaggio al quoziente dalle applicazioni

$$(U, s) + (V, t) = (W, \rho_{UW}(s) + \rho_{VW}(t)), \qquad x \in W \subset V \cap U.$$

L'elemento neutro è chiaramente $(X, 0)$ e l'inverso è indotto da $(U, s) \mapsto (U, -s)$.

Esempio 1.10. Le spighe del fascio localmente costante G_X (Esempio 1.6) sono tutte isomorfe al gruppo G. Infatti consideriamo le due coppie (U, f) e (V, g). Se $f(x) = g(x)$ allora $\exists U' \ni x$ tale che $f\big|_{U'}$ è costante. Allo stesso modo, $\exists V' \ni x$ tale che $g\big|_{V'}$ è costante. Segue che $f\big|_{U'\cap V'} = g\big|_{U'\cap V'}$, ossia $(U, f) \sim (V, g)$.

Notiamo che se U è aperto, allora per ogni $x \in U$ l'applicazione

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\text{germe}} \mathcal{F}_x, \qquad s \mapsto s_x \equiv (U, s) \pmod{\sim},$$

è un omomorfismo di gruppi.

Definizione 1.11. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due prefasci sullo stesso spazio topologico X. Un **morfismo** $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è il dato, per ogni aperto non vuoto U, di un omomorfismo di gruppi abeliani $f_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Gli omomorfismo f_U devono commutare con i morfismi di restrizione, ossia per ogni coppia di aperti $V \subset U$ si deve avere un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Un morfismo di fasci è per definizione un morfismo di prefasci (ogni fascio è anche un prefascio). Ogni morfismo di prefasci $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce canonicamente dei morfismi tra le rispettive spighe: per ogni punto $x \in X$ vi è un unico omomorfismo di gruppi $f_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ che, per ogni aperto $x \in U$, rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{G}_x
\end{tikzcd}$$

commutativo.

Esempio 1.12. La costruzione dell'Esempio 1.7 si applica in particolare al caso in cui l'applicazione ϕ è data dalle spighe di un prefascio $\mathcal{F}$, ossia $\phi(x) = \mathcal{F}_x$. In tal caso scriveremo $\mathcal{C}^0\phi = \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ e quindi, per ogni aperto $U \subset X$, si ha

$$\mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \ .$$

Gli omomorfismi di gruppi abeliani

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x, \qquad x \in U$$

inducono un morfismo di prefasci $\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}$. Chiameremo $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ **fascio delle sezioni discontinue di** $\mathcal{F}$.

Più in generale, se $f \colon X \to Y$ è un'applicazione (non necessariamente continua) tra spazi topologici, possiamo definire un'applicazione

$$\mathcal{C}^0 f^{-1} \colon \{ \text{ prefasci su } Y\} \to \{ \text{ fasci su } X\},$$

ponendo per ogni prefascio $\mathcal{F}$ su Y ed ogni aperto U su X

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_{f(x)} \ .$$

Esempio 1.13 (Somma diretta)**.** Dati due fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, la loro somma diretta è definita come

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$$

per ogni aperto U. Esistono due ovvi morfismi di inclusione $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ e per ogni punto x vale

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x \ .$$

Note. Il materiale di questa sezione è standard. Ottimi riferimenti sono: la Sezione II.1 di [2] e l'Appendice B di [3].

2. Successioni esatte, nucleo e conucleo

Sia $J \subset \mathbb{Z}$ un "intervallo", ossia un sottoinsieme con la proprietà che se $n, m \in J$, allora ogni numero intero compreso tra n e m appartiene a J.

Una successione di morfismi di gruppi abeliani

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} G_n \xrightarrow{d_n} G_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots \qquad n \in J,$$

si dice un **complesso** se $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni n, o equivalentemente se $d_n(G_n) \subset \operatorname{Ker} d_{n+1}$ per ogni n. Si dice invece una **successione esatta** se $d_n(G_n) = \operatorname{Ker} d_{n+1}$ per ogni n. In particolare ogni successione esatta è anche un complesso.

Esempio 2.1. Delle seguenti successioni di morfismi di gruppi:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \to 0, \qquad f(n) = (n, n), \quad g(n, m) = n,$$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \to 0, \qquad f(n) = (2n, 4n), \quad g(n, m) = 2n - m,$$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \to 0, \qquad f(n) = (n, 2n), \quad g(n, m) = 2n - m,$$

la seconda e la terza sono complessi, la terza è esatta.

Dati due omomorfismi di gruppi abeliani $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$, si definisce la **somma diretta fibrata** come

$$B \oplus_A C = \frac{B \oplus C}{\{(f(a), -g(a)) \mid a \in A\}}\ .$$

Notiamo che le inclusioni naturali $B \to B \oplus C$ e $C \to B \oplus C$ inducono un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & B \oplus_A C \end{tikzcd}$$

Definizione 2.2. Siano A e B gruppi abeliani e sia $f : A \to B$ un omomorfismo, definiamo:

$$Coker(f) = \frac{B}{Im(f)}$$

Lemma 2.3. *Ogni diagramma commutativo di gruppi abeliani*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \\ M \arrow[r, "g"] & N & \end{tikzcd}$$

Si estende naturalmente ad un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & C \oplus_B \operatorname{Coker} g \end{tikzcd}$$

Se la prima riga è esatta, allora anche la seconda riga è esatta.

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[drr] & & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r, "\gamma"] & \operatorname{Coker} g \arrow[rr, "\delta"] & & C \oplus_B \operatorname{Coker} g \end{tikzcd}$$

Verifichiamo che il diagramma della tesi è commutativo. Sia $b \in B$ allora $\alpha(b) \mapsto (\alpha(b), 0)$ e $\gamma(\beta(b)) \mapsto (0, \gamma(\beta(b)))$. Per definizione di somma diretta fibrata $0 = (\alpha(b), -\gamma(\beta(b))) = (\alpha(b), 0) - (0, \gamma(\beta(b))) \Rightarrow (\alpha(b), 0) = (0, \gamma(\beta(b)))$.

Per verificare che l'esattezza della prima riga implica l'esattezza della seconda, si procede come segue. Sia $n \in \operatorname{Im} g$, allora $\gamma(n) = 0$ e $\delta(0) = (0, 0)$.

Sia $n \in \operatorname{Ker} \gamma\delta$, se $\gamma(n) = 0$ è banale, altrimenti dalla definizione di somma diretta fibrata si ha che è equivalente a chiedere che l'immagine di n sia del tipo $(\alpha(b), -\gamma(\beta(b)))$, ricordando che

γ è suriettiva ho che esiste $\tilde{b} \in B$ tale che $\beta(\tilde{b}) = n$. Chiaramente anche $\tilde{b}$ deve andare a zero (segue dalla definizione delle funzioni). E quindi per esattezza della prima riga e commutatività del diagramma segue la tesi. □

Lemma 2.4. *Sia $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Allora $f = 0$, ossia $f_U = 0$ per ogni aperto U, se e solo se $f_x = 0$ per ogni $x \in X$. In altri termini,* un morfismo di fasci è nullo se e solo se è nullo sulle spighe.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo $f = 0$, ossia $f_U = 0$ per ogni aperto U, consideriamo $x \in X$ e scegliamo $s_x \in \mathcal{F}_x$, sappiamo che s_x non é altro che una classe di equivalenza data da una coppia (U, s_U) con $x \in U$. Sappiamo che $f_U(s_U) = 0$ per ogni aperto e dunque anche $f_x(s_x) = 0$.

($\Leftarrow$) Supponiamo $f_x = 0$ per ogni $x \in X$. Sia U un aperto ed $s \in \mathcal{F}(U)$ una sezione, per ogni punto $x \in U$, poiché $f_x = 0$, esiste un aperto V_x tale che $f_{V_x}(s\big|_{V_x}) = 0$, a questo punto, poiché $\mathcal{G}$ é un fascio, questo mi determina $f(s) = 0$ □

Le nozioni di complesso e di successione esatta si estendono immediatamente ai fasci. Una successione di morfismi di fasci (di gruppi abeliani)

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

si dice un **complesso** se $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni n. Per il Lemma 2.4 una successione di morfismi di fasci è un complesso se e solo se per ogni punto x la successione delle spighe

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} (\mathcal{G}_n)_x \xrightarrow{d_n} (\mathcal{G}_{n+1})_x \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots ,$$

è un complesso.

Una successione di morfismi di fasci (di gruppi abeliani)

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

si dice una **successione esatta** se per ogni punto x la successione di spighe

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} (\mathcal{G}_n)_x \xrightarrow{d_n} (\mathcal{G}_{n+1})_x \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots \qquad ,$$

è una successione esatta.

Lemma 2.5 (Esattezza sulle sezioni implica esattezza sulle spighe)**.** *Siano $\mathcal{B}$ una base della topologia su X e $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ due morfismi di prefasci su X tali che per ogni aperto $U \in \mathcal{B}$ la successione*

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

è esatta. Allora per ogni $x \in X$ la successione di spighe

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{H}_x$$

è esatta.

Dimostrazione. La verifica che $\operatorname{Im} f_x \subseteq \operatorname{Ker} g_x$ è immediata. Per l'inclusione opposta notiamo che il seguente diagramma di gruppi è commutativo per ogni scelta dell'aperto U che contenga il punto x, sceglieremo solo aperti della base.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[r, "g_U"] \arrow[d] & \mathcal{H}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{G}_x \arrow[r, "g_x"] & \mathcal{H}_x
\end{tikzcd}$$

Dobbiamo dimostrare che se $s_x \in \operatorname{Ker} f_x$ allora esiste r_x tale che $f_x(r_x) = s_x$, consideriamo un rappresentante di s_x, indichiamolo con s_V, consideriamo il diagramma, scegliendo ovviamente $V = U$, la commutatività ci assicura che esiste un aperto della base W tale che $f_V(s_V)\big|_W = 0$. A questo punto consideriamo la successione

$$\mathcal{F}(W) \xrightarrow{f_W} \mathcal{G}(W) \xrightarrow{g_W} \mathcal{H}(W)$$

per l'esattezza sappiamo che esiste r_W tale che $f_W(r_W) = s_W$. La tesi segue dalla commutativitá scegliendo come r_x la classe di r_W.

□

Definizione 2.6. Il nucleo di un morfismo di fasci $f\colon \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ è definito come

$$\operatorname{Ker} f(U) = \operatorname{Ker}(f_U\colon \mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U))$$

per ogni aperto U.

È facile vedere, applicando il Lemma 1.8 che $\operatorname{Ker} f$ è un fascio.
Infatti basta notare che $\operatorname{Ker}(f)$ è un sottoprefascio e vale la proprietà richiesta dal lemma.
Inoltre per ogni punto x vale

$$(\operatorname{Ker} f)_x = \operatorname{Ker}(f_x\colon \mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x)$$

e che la successione

$$0\to\operatorname{Ker} f\to\mathcal{F}\xrightarrow{f}\mathcal{G}$$

è esatta.

La definizione del conucleo richiede maggior cautela perché, in generale, se $f\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, in generale il prefascio

$$U\mapsto \operatorname{Coker} f_U = \frac{\mathcal{G}(U)}{f_U\mathcal{F}(U)}$$

non è un fascio.

Sia $\mathcal{C}^0 f$ il fascio definito (cf. Esempio 1.7) come

$$\mathcal{C}^0 f(U) = \prod_{x\in U}\operatorname{Coker} f_x = \prod_{x\in U}\frac{\mathcal{G}_x}{f_x\mathcal{F}_x}\ .$$

I morfismi

$$\mathcal{G}(U)\xrightarrow{\text{germe}}\mathcal{G}_x\xrightarrow{\text{quoziente}}\frac{\mathcal{G}_x}{f_x(\mathcal{F}_x)},\qquad x\in U\subset X,$$

definiscono un morfismo di fasci $p\colon\mathcal{G}\to\mathcal{C}^0 f$ tale che $pf=0$.

Definizione 2.7. Nelle notazioni precedenti, definiamo $\operatorname{Coker} f$ come il sottofascio di $\mathcal{C}^0 f$ formato dalle sezioni che sono localmente del tipo $p(s)$, con s sezione di $\mathcal{G}$.

Lemma 2.8. *Sia $f\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Allora:*

1. *la successione $\mathcal{F}\xrightarrow{f}\mathcal{G}\xrightarrow{p}\operatorname{Coker} f\to 0$ è esatta;*
2. *per ogni morfismo di fasci $g\colon\mathcal{G}\to\mathcal{H}$ tale che $gf=0$ vi è un unico morfismo di fasci $\gamma\colon\operatorname{Coker} f\to\mathcal{H}$ tale che $g=\gamma p$.*

Dimostrazione. Esercizio. □

3. Fasci fiacchi e risoluzioni

Teorema 3.1 (Esattezza a sinistra delle sezioni globali)**.** *Per ogni successione esatta di fasci su X del tipo*

$$0\to\mathcal{F}\xrightarrow{f}\mathcal{G}\xrightarrow{g}\mathcal{H}\ ,$$

e per ogni aperto $U\subset X$ la successione di gruppi abeliani

$$0\to\mathcal{F}(U)\xrightarrow{f_U}\mathcal{G}(U)\xrightarrow{g_U}\mathcal{H}(U)$$

è esatta.

Dimostrazione. Data una sezione $s\in\mathcal{F}(U)$ che va a zero ho che questa va a zero in ognuna delle spighe, e dunque per ogni punto esiste un aperto V_x in cui la restrizione s_{V_x} va a zero, ma per l'esattezza sulle spighe $s_{V_x}=0$, a patto di prendere l'aperto eventualmente piú piccolo, e quindi ho per le proprietá di fascio di $\mathcal{F}$ che s è 0 e dunque f_U é iniettiva.

Dato un elemento $s\in\mathcal{G}(U)$ che vada a zero posso ripetere lo stesso ragionamento giá fatto per ottenere delle sezioni $r_{V_x}\in\mathcal{F}(V_x)$ che abbiano come immagine proprio s_{V_x}, per concludere resta da verificare che, dati due punti x,y si abbia che $r_{V_x}\big|_{V_x\cap V_y}=r_{V_y}\big|_{V_x\cap V_y}$, ma chiaramente $r_{V_x}\big|_{V_x\cap V_y}-r_{V_y}\big|_{V_x\cap V_y}$ ha come immagine 0 e dunque per l'iniettivitá mostrata al punto precedente si ha $r_{V_x}\big|_{V_x\cap V_y}-r_{V_y}\big|_{V_x\cap V_y}=0$. Quindi per le proprietá di fascio di $\mathcal{F}$ segue la tesi. □

In particolare, se $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e se $f_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è iniettivo per ogni x, allora $f_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è iniettivo per ogni aperto U. Basta infatti applicare il Teorema 3.1 alla successione esatta di fasci

$$0 \to 0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} .$$

Attenzione: Se $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e se $f_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è surgettivo per ogni x, non è detto che $f_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ sia surgettivo per ogni aperto U.
Ad esempio, siano X uno spazio topologico, $D \subset X$ un aperto e consideriamo il fascio su X:

$$\mathcal{G}(U) = \mathbb{Z}_D(U \cap D) = \{\phi\colon D \cap U \to \mathbb{Z} \text{ localmente costante }\}.$$

Se supponiamo X connesso, allora $\Gamma(X, \mathbb{Z}_X) = \mathbb{Z}$. Se D è sconnesso, il morfismo di fasci $f\colon \mathbb{Z}_X \to \mathcal{G}$, che restringe il fascio a D, non può essere suriettivo. Ad esempio, non esiste nessuna preimmagine di una funzione che vale zero su una componente connessa e uno su un'altra, sebbene questa sia una funzione localmente costante.

Definizione 3.2. Un fascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X si dice **fiacco** se per ogni aperto $U \subset X$ il morfismo di restrizione $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ è surgettivo.

Osserviamo che se $\mathcal{F}$ è fiacco, allora per ogni coppia di aperti $U \subset V$ il morfismo di restrizione $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ è surgettivo.

Ad esempio i fasci di sezioni discontinue (Esempi 1.7 e 1.12) sono fiacchi. Basta pensare che i morfismi di inclusione non sono altro che le proiezioni, cioè, se $U \subseteq V$, allora:

$$\rho_{UV} : \mathcal{C}^{\mathcal{F}}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(V) = \prod_{x \in Y} \mathcal{F}_x$$

è suriettivo.

Teorema 3.3. *Sia*

$$0 \to \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{d_3} \mathcal{F}_4 \to \cdots$$

una successione esatta di fasci fiacchi su X. Allora per ogni aperto $U \subset X$ la successione

$$0 \to \mathcal{F}_0(U) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2(U) \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3(U) \to \cdots$$

è esatta.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su n la seguente proposizione: per ogni aperto $U \subset X$ ed ogni $s \in \mathcal{F}_{n+1}(U)$ tale che $d_{n+1}(s) = 0$, esiste $h \in \mathcal{F}_n(U)$ tale che $d_n(h) = s$.

Per l'esattezza a sinistra del funtore sezioni sappiamo che la proposizione è vera per $n = 0$. Supponiamo quindi $n > 0$ e la proposizione vera per $n - 1$.

Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{A} = \{(V, r) \mid V \subset U,\ r \in \mathcal{F}_n(V),\ d_n(r) = s_{|V}\} .$$

Notiamo che $\mathcal{A}$ è non vuoto, poiché contiene la coppia $(\emptyset, 0)$, lo possiamo ordinare dunque per estensione ed applicare il lemma di Zorn; denotiamo con (W, h) un elemento massimale di $\mathcal{A}$; per concludere la dimostrazione basta provare che $W = U$.

Se per assurdo esiste un punto $x \in U - W$, siccome $d_{n+1}(s_x) = 0$, esiste un germe di sezione $r_x \in (\mathcal{F}_n)_x$ tale che $d_n(r_x) = s_x$.

Dunque esiste un intorno aperto $x \in V$ ed una sezione $r \in \mathcal{F}_n(V)$ tale che $d_n(r) = s_{|V}$. Sia $k = h_{|W\cap V} - r_{|W\cap V} \in \mathcal{F}_n(W \cap V)$ e, siccome $d_n(k) = 0$ per l'ipotesi induttiva esiste $\psi \in \mathcal{F}_{n-1}(W \cap V)$ tale che $d_{n-1}(\psi) = k$. Sia $\phi \in \mathcal{F}_{n-1}(V)$ che estende ψ; a meno di sostituire r con $r + d_{n-1}(\phi)$ possiamo supporre che r e h coincidono su $V \cap W$ e quindi si incollano ad una sezione su $W \cup V$, contraddicendo la massimalità. □

Definizione 3.4. Una **risoluzione** (sinistra) di un fascio $\mathcal{F}$ su X è una successione esatta di fasci del tipo

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots .$$

La risoluzione si dice **fiacca** se ogni $\mathcal{E}_i$ è un fascio fiacco.

Un fatto importante in teoria dei fasci è che esistono "abbastanza" risoluzioni fiacche, nel senso precisato nel prossimo teorema.

Teorema 3.5 (Fiaccamento di risoluzioni)**.** *Sia*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots .$$

una risoluzione di un fascio $\mathcal{F}$. Allora ogni morfismo di fasci $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si estende ad un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{E}_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & \mathcal{E}_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & \mathcal{E}_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "j"] & \mathcal{H}_0 \arrow[r, "h_0"] & \mathcal{H}_1 \arrow[r, "h_1"] & \mathcal{H}_2 \arrow[r, "h_2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

dove la riga inferiore è una risoluzione fiacca di $\mathcal{G}$.

Dimostrazione. La costruzione avviene ricorsivamente usando il seguente fatto: ogni diagramma commutativo di morfismi di fasci

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \\ \mathcal{M} \arrow[r, "g"] & \mathcal{N} & \end{tikzcd}$$

la cui riga superiore è esatta si estende ad un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "g"] & \mathcal{N} \arrow[r] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

con $\mathcal{H}$ fascio fiacco e la riga inferiore esatta. A tal fine basta definire, per ogni aperto $U \subset X$

$$\mathcal{H}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{C}_x \oplus_{\mathcal{B}_x} \operatorname{Coker} g_x$$

ed applicare il Lemma 2.3, usando il fatto che per ogni x esiste un ovvio morfismo di proiezione $\mathcal{H}_x \to \mathcal{C}_x \oplus_{\mathcal{B}_x} \operatorname{Coker} g_x$. □

Note: una trattazione sufficientemente dettagliata del materiale di questa sezione si trova in [4].

4. Elementi minimi di algebra omologica

Abbiamo già incontrato il concetto di complesso di gruppi abeliani e di fasci. Per certi aspetti la teoria dei complessi è uguale a quella dei suoi costituenti.

Ad esempio, è naturalmente definito il concetto di morfismo di complessi, di nucleo, conucleo e di successione esatta di complessi.

Indichiamo con **CAb** la categoria dei complessi di gruppi abeliani. Un oggetto in **CAb** è un complesso del tipo

$$G^* : \qquad \cdots \xrightarrow{d} G^n \xrightarrow{d} G^{n+1} \xrightarrow{d} \cdots \qquad n \in \mathbb{Z};.$$

Gli omomorfismi d vengono detti i differenziali (o anche il differenziale) del complesso. Ogni complesso G^* con indici in un sottoinsieme $J \subset \mathbb{Z}$ può essere pensato con un oggetto in **CAb** con $G^n = 0$ se $n \notin J$.

Un morfismo di complessi $f\colon G^* \to A^*$ è una successione di omomorfismi di gruppi $f_n\colon G^n \to A^n$ che commutano con i differenziali, ossia $df_n(x) = f_{n+1}(dx)$ per $x \in G^n$.

I morfismi di complessi si possono comporre nel modo ovvio.

Definizione 4.1. Un morfismo di complessi $f\colon G^* \to A^*$ si dice:

(1) **iniettivo** se $f_n\colon G^n \to A^n$ è iniettivo per ogni n;
(2) **surgettivo** se $f_n\colon G^n \to A^n$ è surgettivo per ogni n.

Definizione 4.2. Dato un complesso G^* di gruppi abeliani, per ogni intero n definiamo:

(1) il gruppo degli n cocicli

$$Z^n(G^*) = \{x \in G^n \mid dx = 0\} ;$$

(2) il gruppo degli n cobordi

$$B^n(G^*) = \{dx \in G^n \mid x \in G^{n-1}\} ;$$

(3) l' n-esimo gruppo di coomologia

$$H^n(G^*) = \frac{Z^n(G^*)}{B^n(G^*)} .$$

La definizione dei gruppi di coomologia ha perfettamente senso in quanto $d^2 = 0$ e quindi se $x \in B^n(G^*)$ vuol dire che $x = dy$ per qualche $y \in G^{n-1}$ e quindi $dx = d^2y = 0$, ossia $x \in Z^n(G^*)$. Essendo poi tutti i gruppi abeliani il quoziente H^n è ancora un gruppo abeliano. I gruppi H^n sono una misura di quanto manca al complesso per essere una successione esatta: un complesso G^* è una successione esatta se e soltanto se $H^n(G^*) = 0$ per ogni n.

È immediato osservare che ogni morfismo di complessi $f\colon G^* \to A^*$ induce, per restrizione e fattorizzazione, dei morfismi di gruppi abeliani:

$$f\colon Z^n(G^*) \to Z^n(A^*), \qquad f\colon B^n(G^*) \to B^n(A^*), \qquad f\colon H^n(G^*) \to H^n(A^*) .$$

Una successione esatta corta di complessi è una successione

$$0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$$

di morfismi di complessi tale che, per ogni intero n la successione di gruppi abeliani

$$0 \to A^n \xrightarrow{f_n} B^n \xrightarrow{g_n} C^n \to 0$$

è esatta.

Per funtorialità, ogni successione esatta corta di complessi come sopra induce per ogni n tre complessi

$$0 \to Z^n(A^*) \xrightarrow{f_n} Z^n(B^*) \xrightarrow{g_n} Z^n(C^*) \to 0,$$
$$0 \to B^n(A^*) \xrightarrow{f_n} B^n(B^*) \xrightarrow{g_n} B^n(C^*) \to 0,$$
$$0 \to H^n(A^*) \xrightarrow{f_n} H^n(B^*) \xrightarrow{g_n} H^n(C^*) \to 0,$$

che però non sono successioni esatte in generale. Si consideri ad esempio il caso in cui $A^1 = B^0 = B^1 = C^0 = \mathbb{Z}$ e $A^i, B^i, C^i = 0$ altrimenti, e dove i tre morfismi $d\colon B^0 \to B^1$, $f_1\colon A^1 \to B^1$, $g_0\colon B^0 \to C^0$ sono tutti uguali all'identità.

I complessi degli 0-coclicli, degli 1-cobordi e della 0-coomologia risultano essere rispettivamente:

$$0 \to 0 \xrightarrow{f_0} 0 \xrightarrow{g_0} \mathbb{Z} \to 0,$$
$$0 \to 0 \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{g_1} 0 \to 0,$$
$$0 \to 0 \xrightarrow{f_0} 0 \xrightarrow{g_0} \mathbb{Z} \to 0 .$$

Teorema 4.3. *Sia* $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ *una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani. Allora è ben definita una successione di omomorfismi di gruppi*

$$\delta_n\colon H^n(C^*) \to H^{n+1}(A^*), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

che induce una successione esatta (lunga) di coomologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(A^*) \xrightarrow{f_n} H^n(B^*) \xrightarrow{g_n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(A^*) \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

Dimostrazione. Sia n un intero fissato e definiamo δ_n. Sia $x \in H^n(C^*)$, sia X l'insieme dei rappresentanti di x in $\operatorname{Ker} g_n \subseteq C^n$. Siccome $g_n\colon B^n \to C^n$ è surgettivo, possiamo scegliere $b \in B^n$ tale che $g_n(b) \in X$. Siccome $g_{n+1}(db) = dg_n(b) = 0$ si ha $db \in \operatorname{Ker} g_{n+1}$.

Per esattezza vi è un unico elemento $a \in A^{n+1}$ tale che $f_{n+1}(a) = db$. Si vede subito che a è un cociclo, infatti

$$f_{n+2}(da) = df_{n+1}(a) = d^2b = 0$$

ed il morfismo f_{n+2} è iniettivo. Poniamo dunque

$$\delta_n(x) = \text{classe di coomologia di } a$$

e mostriamo che non dipende dalla scelta di b. Sia $\tilde{b}$ tale che $g_n(\tilde{b}) \in X$, allora $g_n(b - \tilde{b})$ è un cobordo, ossia esiste $c \in C^{n-1}$ tale che $dc = g_n(b - \tilde{b})$. Poiché g_{n-1} è suriettiva, esiste $h \in B^{n-1}$ tale che $g_{n-1}(h) = c$, allora

$$g_n(b - \tilde{b} - dh) = g_n(b - \tilde{b}) - g_n(dh) = g_n(b - \tilde{b}) - dg_{n-1}(h) = 0$$

e per esattezza esiste $k \in A^n$ tale che $f_n(k) = b - \tilde{b} - dh$. Dunque

$$f_{n+1}(a - dk) = db - f_{n+1}(dk) = db - df_n(k) = db - (db - d\tilde{b} - d^2h) = d\tilde{b}$$

e siccome a, $a - dk$ sono cocicli che inducono la stessa classe di coomologia abbiamo provato che $\delta_n(x)$ è ben definito.

La dimostrazione dell'esattezza della successione lunga di coomologia è lasciata per esercizio. □

I morfismi δ_n del Teorema 4.3 si comportano bene rispetto ai morfismi di complessi. Ad esempio, segue immediatamente dalla definizione che dato un diagramma commutativo di morfismi di complessi

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^* \arrow[r] \arrow[d] & B^* \arrow[r] \arrow[d] & C^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N^* \arrow[r] & M^* \arrow[r] & L^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con le righe successioni esatte corte, per ogni n vi è un diagramma commutativo di gruppi di coomologia

$$\begin{tikzcd} H^n(C^*) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d] & H^{n+1}(A^*) \arrow[d] \\ H^n(L^*) \arrow[r, "\delta_n"] & H^{n+1}(N^*) \end{tikzcd}$$

Corollario 4.4 (Lemma del serpente)**.** *Dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con le righe esatte, esiste una successione esatta lunga

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] & \operatorname{Ker} \arrow[dll, bend left, "\delta"] \\ & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] & \operatorname{Coker} h \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Considerando le colonne come complessi concentrati nei gradi 0 e 1, i nuclei corrispondono ai gruppi H^0 ed i conuclei ai gruppi H^1. □

Note. Per maggiori dettagli sugli argomenti di questa sezione rimandiamo al primo capitolo di [6] ed al capitolo dedicato all'algebra omologica di [5].

5. Risoluzione canonica e coomologia dei fasci

Esiste una costruzione canonica per estendere un qualsiasi morfismo di fasci $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ su X ad una successione esatta lunga di fasci

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{C}^0\alpha \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{C}^1\alpha \xrightarrow{\alpha_2} \cdots$$

che chiameremo **risoluzione canonica** di α e che gode in particolare delle seguenti proprietà:

(1) (fiacchezza) ogni fascio $\mathcal{C}^n\alpha$ è fiacco;
(2) (naturalità) ogni diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & \mathcal{G} \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r, "\beta"] & \widetilde{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

si estende in canonicamente ad un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & \mathcal{G} \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C}^0\alpha \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_0"] & \mathcal{C}^1\alpha \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & \cdots \\ \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r, "\beta"] & \widetilde{\mathcal{G}} \arrow[r, "\beta_0"] & \mathcal{C}^0\beta \arrow[r, "\beta_1"] & \mathcal{C}^1\beta \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Per definire il fascio $\mathcal{C}^0\alpha$ ed il morfismo α_0 utilizziamo la costruzione dell'Esempio 1.7 per l'applicazione

$$x \mapsto \alpha(x) := \frac{\mathcal{G}_x}{\alpha_x(\mathcal{F}_x)} = \operatorname{Coker}(\alpha_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x)$$

ed ottenere un fascio fiacco $\mathcal{C}^0\alpha$:

$$\mathcal{C}^0\alpha(U) = \prod_{x\in U} \frac{\mathcal{G}_x}{\alpha_x(\mathcal{F}_x)} .$$

Notiamo che gli omomorfismi

$$\mathcal{G}(U) \xrightarrow{\text{germe}} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\text{quoziente}} \frac{\mathcal{G}_x}{\alpha_x(\mathcal{F}_x)}, \qquad x \in U \subset X,$$

inducono un morfismo di fasci $\alpha_0 \colon \mathcal{G} \to \mathcal{C}^0\alpha$. Notiamo che se $\mathcal{F} = 0$ allora $\mathcal{C}^0\alpha = \mathcal{C}^0\mathcal{G}$. Inoltre:

A) La successione di fasci

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{C}^0\alpha$$

è esatta. Per ogni aperto U, la composizione

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{(\alpha_0)_U} \prod_{x\in U} \frac{\mathcal{G}_x}{\alpha_x(\mathcal{F}_x)}$$

è chiaramente nulla e quindi $\alpha_0\alpha = 0$. Viceversa, siano $x \in X$ e $s \in \mathcal{G}_x$ tale che $\alpha_0(x) = 0$; in particolare s si annulla in $\frac{\mathcal{G}_x}{\alpha_x(\mathcal{F}_x)}$ e questo implica che s appartiene all'immagine di α.

B) Ogni diagramma commutativo di fasci

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r, "\beta"] & \widetilde{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

induce per ogni $x \in X$ un omomorfismo di gruppi abeliani

$$\frac{\mathcal{G}_x}{\alpha_x(\mathcal{F}_x)} \to \frac{\widetilde{\mathcal{G}}_x}{\beta_x(\widetilde{\mathcal{F}}_x)}$$

e di conseguenza un morfismo naturale di fasci $\mathcal{C}^0\alpha \to \mathcal{C}^0\beta$ che rende commutativo il diagramma

(5.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & \mathcal{C}^0\alpha \arrow[d] \\ \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r, "\beta"] & \widetilde{\mathcal{G}} \arrow[r, "\beta'"] & \mathcal{C}^0\beta \end{tikzcd}$$

La risoluzione canonica di un morfismo $\alpha \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si ottiene applicando la precedente costruzione in maniera ricorsiva, ossia ponendo $\mathcal{C}^1\alpha = \mathcal{C}^0\alpha_0$, $\alpha_1 = (\alpha_0)_0$, $\mathcal{C}^2\alpha = \mathcal{C}^0(\alpha_1)$ eccetera.

La **risoluzione canonica** di un fascio $\mathcal{F}$ è per definizione la risoluzione canonica del morfismo $0 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}$; in tal caso scriveremo $\mathcal{C}^n\mathcal{F}$ in luogo di $\mathcal{C}^n\alpha$.

Dunque, la risoluzione canonica di un fascio $\mathcal{F}$ è la successione esatta

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}^2\mathcal{F} \xrightarrow{d_2} \cdots$$

dove $i = 0_0$, $\mathcal{C}^1\mathcal{F} = \mathcal{C}^0 i$, $d_0 = i_1$, $\mathcal{C}^2\mathcal{F} = \mathcal{C}^0 d_0$, $d_1 = (d_0)_0$ eccetera. L'esattezza della risoluzione canonica segue dal punto A.

L'applicazione ricorsiva del punto B implica invece che ogni morfismo di fasci $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si estende in maniera naturale ad un morfismo tra le rispettive risoluzioni canoniche, ossia ad un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & \mathcal{C}^1\mathcal{F} \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & \mathcal{C}^2\mathcal{F} \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "i"] & \mathcal{C}^0\mathcal{G} \arrow[r, "d_0"] & \mathcal{C}^1\mathcal{G} \arrow[r, "d_1"] & \mathcal{C}^2\mathcal{G} \arrow[r, "d_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Una **successione esatta corta** di fasci è una successione esatta del tipo:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0\,.$$

Teorema 5.1. *Nelle notazioni precedenti, per ogni successione esatta corta di fasci*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

e per ogni intero $n \geq 0$, la successione di fasci

$$0 \to \mathcal{C}^n\mathcal{F} \to \mathcal{C}^n\mathcal{G} \to \mathcal{C}^n\mathcal{H} \to 0$$

indotta dalle risoluzioni canoniche è ancora esatta.

Dimostrazione. Induzione su n. Il caso $n = 0$ è immediato, infatti per ogni $x \in X$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \to 0$$

è esatta e quindi anche

$$0 \to \prod_{x\in Z} \mathcal{F}_x \to \prod_{x\in Z} \mathcal{G}_x \to \prod_{x\in Z} \mathcal{H}_x \to 0$$

è esatta per ogni sottoinsieme $Z \subset X$. In particolare, per ogni aperto $U \subset X$ la successione

$$0 \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) \to \mathcal{C}^0\mathcal{G}(U) \to \mathcal{C}^0\mathcal{H}(U) \to 0$$

è esatta e per concludere basta applicare il Lemma 2.5.

Consideriamo adesso il caso $n > 0$, supponendo vero il teorema per tutti gli interi minori di n e ponendo per semplicità notazionale $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{K} = \mathcal{K}$ per ogni fascio $\mathcal{K}$.

Ricordando la definizione del funtore $\mathcal{C}^n$, lo stesso argomento usato nel caso $n = 0$ implica che per dimostrare il teorema basta dimostrare che per ogni $x \in X$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \frac{\mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F}_x}{d\mathcal{C}^{n-2}\mathcal{F}_x} \to \frac{\mathcal{C}^{n-1}\mathcal{G}_x}{d\mathcal{C}^{n-2}\mathcal{G}_x} \to \frac{\mathcal{C}^{n-1}\mathcal{H}_x}{d\mathcal{C}^{n-2}\mathcal{H}_x} \to 0$$

è esatta.

Denotando momentaneamente con $D(\mathcal{F})$ il complesso di gruppi abeliani (concentrato nei gradi $-1 \leq i \leq n-1$)

$$0 \to \mathcal{F}_x \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F}_x \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F}_x \to 0$$

abbiamo

$$H^{n-1}(D(\mathcal{F})) = \frac{\mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F}_x}{d\mathcal{C}^{n-2}\mathcal{F}_x}, \qquad H^i(D(\mathcal{F})) = 0 \quad \forall\, i \neq n-1.$$

Per l'ipotesi induttiva

$$0 \to D(\mathcal{F}) \to D(\mathcal{G}) \to D(\mathcal{H}) \to 0$$

è una successione esatta corta di complessi dal Teorema 4.3 posso estenderla alla successione esatta lunga in coomologia,

$$... \to H^{n-2}(D(\mathcal{G})) \to H^{n-2}(D(\mathcal{H})) \to H^{n-1}(D(\mathcal{F})) \to H^{n-1}(D(\mathcal{G})) \to H^{n-1}(D(\mathcal{H})) \to H^{n}(D(\mathcal{F})) \to ...$$

ma dalle osservazioni precedenti e poiché chiaramente $H^i(D(\mathcal{F})) = 0$ se $i \geq n$, ho che questa altro non è che

$$... \to 0 \to 0 \to \frac{\mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F}_x}{d\mathcal{C}^{n-2}\mathcal{F}_x} \to \frac{\mathcal{C}^{n-1}\mathcal{G}_x}{d\mathcal{C}^{n-2}\mathcal{G}_x} \to \frac{\mathcal{C}^{n-1}\mathcal{H}_x}{d\mathcal{C}^{n-2}\mathcal{H}_x} \to 0 \to ...$$

da cui la tesi.

□

Definizione 5.2. I gruppi di coomologia di un fascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X si definiscono come i gruppi di coomologia del complesso di gruppi abeliani

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{C}^0\mathcal{F}) \xrightarrow{d_0} \Gamma(X, \mathcal{C}^1\mathcal{F}) \xrightarrow{d_1} \Gamma(X, \mathcal{C}^2\mathcal{F}) \xrightarrow{d_2} \Gamma(X, \mathcal{C}^3\mathcal{F}) \xrightarrow{d_3} \cdots$$

In altri termini, $H^n(X,\mathcal{F}) = 0$ per ogni $n < 0$,

$$H^0(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\Gamma(X,\mathcal{C}^0\mathcal{F}) \xrightarrow{d_0} \Gamma(X,\mathcal{C}^1\mathcal{F})),$$

$$H^n(X,\mathcal{F}) = \frac{\mathrm{Ker}(d\colon \Gamma(X,\mathcal{C}^n\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{C}^{n+1}\mathcal{F}))}{d\Gamma(X,\mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F})}, \qquad n > 0\,.$$

Lemma 5.3. *Per ogni fascio $\mathcal{F}$ si ha*

$$H^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X,\mathcal{F})\,.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 3.1 alla successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}^1\mathcal{F}$$

□

Lemma 5.4. *Se $\mathcal{E}$ è un fascio fiacco, allora $H^i(X,\mathcal{E}) = 0$ per ogni $i > 0$. In particolare per ogni fascio $\mathcal{F}$ si ha $H^i(X,\mathcal{C}^n\mathcal{F}) = 0$ per ogni $i > 0$ ed ogni $n \geq 0$.*

Dimostrazione. Basta osservare che i fasci $\mathcal{C}^n\mathcal{F}$ sono tutti fiacchi ed applicare il Teorema 3.3. □

Un fascio $\mathcal{F}$ tale che $H^n(X,\mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$ si dice **aciclico**. Vedremo a breve che non tutti i fasci sono aciclici e che non tutti i fasci aciclici sono fiacchi.

Osservazione 5.5. Se X è uno spazio topologico discreto per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X vale $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{F}$. Infatti per ogni punto $x \in X$ vale $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(x)$, se adesso consideriamo il ricoprimento fatto da tutti i punti di X è immediato dalla proprietà (F4) che posso ottenere qualsiasi elemento di $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$.

In particolare $\mathcal{F}$ è fiacco e quindi aciclico.

Corollario 5.6. *Ogni successione esatta corta di fasci*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

sullo spazio topologico X induce una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{C}^*\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{C}^*\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{C}^*\mathcal{H}) \to 0$$

e quindi una successione esatta lunga di coomologia

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

Dimostrazione. Per il teorema precedente, per ogni $n \geq 0$ la successione di fasci fiacchi

$$0 \to \mathcal{C}^n\mathcal{F} \to \mathcal{C}^n\mathcal{G} \to \mathcal{C}^n\mathcal{H} \to 0$$

è esatta. Per il Teorema 3.3 anche la successione delle sezioni globali

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{C}^n\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{C}^n\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{C}^n\mathcal{H}) \to 0$$

è esatta. □

Note. Il riferimento principe in fatto di risoluzioni canoniche è [1].

6. Il teorema di de Rham

Teorema 6.1 (de Rham astratto)**.** *Data una qualsiasi risoluzione*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots\,,$$

per ogni $n \geq 0$ esiste un omomorfismo naturale di gruppi

$$\alpha_n\colon H^n(\Gamma(X,\mathcal{E}_*)) = \frac{\mathrm{Ker}(d\colon \Gamma(X,\mathcal{E}_n) \to \Gamma(X,\mathcal{E}_{n+1}))}{d\Gamma(X,\mathcal{E}_{n-1})} \to H^n(X,\mathcal{F})\,.$$

Inoltre:

1. *se $H^{n-i-1}(X,\mathcal{E}_i) = 0$ per ogni $i = 0,\ldots,n-2$, allora α_n è iniettivo;*
2. *se $H^{n-i}(X,\mathcal{E}_i) = 0$ per ogni $i = 0,\ldots,n-1$, allora α_n è surgettivo.*

(3) *gli omomorfismi* α_n *commutano con i morfismi di risoluzioni: per ogni diagramma commutativo di fasci*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "i"] & \mathcal{E}'_0 \arrow[r, "d_0"] & \mathcal{E}'_1 \arrow[r, "d_1"] & \mathcal{E}'_2 \arrow[r, "d_2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

con le righe esatte, si hanno dei diagrammi commutativo

$$\begin{tikzcd} H^n(\Gamma(X,\mathcal{E}_*)) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & & H^n(\Gamma(X,\mathcal{E}'_*)) \arrow[dl, "\alpha'_n"] \\ & H^n(X,\mathcal{F}) & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su n trattando separatamente i casi $n = 0$, $n = 1$ e $n \geq 2$.

Iniziamo con $n = 0$. Ricordiamo che

$$H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$$

e che si ha la successione esatta corta

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{E}_0) \xrightarrow{d} \Gamma(X,\mathcal{E}_1)$$

Per iniettività abbiamo che $\Gamma(X,\mathcal{F})$ è isomorfo alla sua immagine in $\Gamma(X,\mathcal{G})$ e dall'esattezza della successione segue l'isomorfismo

$$H^0(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\Gamma(X,\mathcal{E}_0) \xrightarrow{d} \Gamma(X,\mathcal{E}_1)) .$$

Per $n = 1$ consideriamo il fascio $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}(U) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_1(U) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2(U)) .$$

Dalla risoluzione di $\mathcal{F}$ ricaviamo la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{G} \to 0$$

ed la risoluzione

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots .$$

Per quanto dimostrato al punto precedente si ha dunque $H^0(X,\mathcal{G}) = \mathrm{Ker}(\Gamma(X,\mathcal{E}_1) \xrightarrow{d} \Gamma(X,\mathcal{E}_2))$ ed una successione esatta lunga

$$\Gamma(X,\mathcal{E}_0) \xrightarrow{d} H^0(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{E}_0) \to \cdots$$

che induce una successione esatta

$$0 \to \frac{\mathrm{Ker}(d\colon \Gamma(X,\mathcal{E}_1) \to \Gamma(X,\mathcal{E}_2))}{d\Gamma(X,\mathcal{E}_0)} \xrightarrow{\alpha_1} H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{E}_0)$$

ricordando che

$$\frac{\mathrm{Ker}(d\colon \Gamma(X,\mathcal{E}_1) \to \Gamma(X,\mathcal{E}_2))}{d\Gamma(X,\mathcal{E}_0)} = H^1(\Gamma(X,\mathcal{E}_*)$$

segue la tesi.

Sia adesso $n > 1$ e supponiamo vero il teorema per tutti gli interi minori di n. Dalla successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{G} \to 0$$

otteniamo la successione esatta lunga di coomologia

$$\cdots \to H^{n-1}(X,\mathcal{E}_0) \to H^{n-1}(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_n} H^n(X,\mathcal{F}) \to H^n(X,\mathcal{E}_0) \to \cdots ,$$

per ipotesi induttiva abbiamo anche un morfismo naturale

$$\gamma_n\colon \frac{\mathrm{Ker}(d\colon \Gamma(X,\mathcal{E}_n) \to \Gamma(X,\mathcal{E}_{n+1}))}{d\Gamma(X,\mathcal{E}_{n-1})} = H^n(\Gamma(X,\mathcal{E}_*)) \to H^{n-1}(X,\mathcal{G}), \qquad n > 0 .$$

α_n non è altro che la composizione di γ_n e β_n.

Le ulteriori proprietà seguono in maniera abbastanza ovvia riscrivendo le varie successioni esatte e sfruttando l'ipotesi induttiva. $\square$

Corollario 6.2. *Data una qualsiasi risoluzione aciclica*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots ,$$

per ogni $n \geq 0$ *si ha*

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \frac{\operatorname{Ker}(d\colon \Gamma(X, \mathcal{E}_n) \to \Gamma(X, \mathcal{E}_{n+1}))}{d\Gamma(X, \mathcal{E}_{n-1})} .$$

Dimostrazione. Basta osservare che se la risoluzione è aciclica allora indipendentemente tutti i gruppi di coomologia dei fasci $\mathcal{E}_i$ sono nulli e dunque il morfismo è sia iniettivo che suriettivo. $\square$

Seconda parte: topologia

7. Immagini diretta ed inversa di fasci

Data un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ ed un fascio $\mathcal{F}$ su X, possiamo definire la sua **immagine diretta** $f_*\mathcal{F}$, che è un fascio su Y, nel modo seguente: per ogni aperto $U \subset Y$ si ha

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) .$$

Se $V \subset U$, allora $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$ ed è quindi definito in maniera naturale il morfismo di restrizione $f_*\mathcal{F}(U) \to f_*\mathcal{F}(V)$.

Possiamo interpretare f_* come un funtore dalla categoria dei fasci su X alla categoria dei fasci su Y. Ogni morfismo $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di fasci su X induce canonicamente un morfismo $f_*(\alpha)\colon f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$ ponendo, per ogni aperto $U \subset Y$,

$$f_*(\alpha)_U = \alpha_{f^{-1}(U)}\colon f_*\mathcal{F}(U) \to f_*\mathcal{G}(U) .$$

È immediato osservare che se $f\colon X \to Y$ è continua e $\mathcal{F}$ è fiacco su X, allora $f_*\mathcal{F}$ è fiacco su Y.

Lemma 7.1. *Siano $D \subset X$ un sottoinsieme chiuso e $i\colon D \to X$ il morfismo di inclusione. Per ogni fascio $\mathcal{F}$ su D ed ogni $x \in X$ si ha:*

$$i_*\mathcal{F}_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{se } x \notin D \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $x \notin D$, allora x possiede un sistema fondamentale di intorni che non intersecano D e quindi $i_*\mathcal{F}_x = 0$. Se $x \in D$, allora ogni aperto di D che contiene x è dato dall'intersezione di D con un aperto di X che contiene x e questo prova che il morfismo naturale $i_*\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ è bigettivo. □

Proposizione 7.2. *Sia $i\colon D \to X$ una immersione chiusa. Allora per ogni fascio $\mathcal{F}$ su D e per ogni intero $n \geq 0$ si ha*

$$H^n(D, \mathcal{F}) = H^n(X, i_*\mathcal{F}) .$$

Dimostrazione. Sia $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \cdots$ una risoluzione fiacca di $\mathcal{F}$ su D, ad esempio la risoluzione canonica. Siccome i è una immersione chiusa, come conseguenza del lemma 7.1 la successione

$$0 \to i_*\mathcal{F} \to i_*\mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} i_*\mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \cdots$$

è ancora esatta e poiché l'immersione é continua i fasci $i_*\mathcal{E}_n$ sono fiacchi. Per concludere basta osservare che

$$\Gamma(X, i_*\mathcal{E}_n) = \Gamma(D, \mathcal{E}_n)$$

ed applicare il Corollario 6.2. □

Data un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ ed un fascio $\mathcal{F}$ su Y, consideriamo il fascio $\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}$ introdotto nell'Esempio 1.12; definito su ogni aperto $U \subset X$ da

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_{f(x)} .$$

Osserviamo che se $V \subset Y$ è un aperto tale che $f(U) \subset V$, allora è definito un omomorfismo di gruppi

$$f^\#\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U), \qquad f^\#(s)_x = s_{f(x)}, \qquad x \in V .$$

Possiamo definire quindi il fascio $f^{-1}\mathcal{F}$ su X che sarà chiamato l'**immagine inversa** del fascio $\mathcal{F}$ rispetto alla funzione f, come il sottofascio di $\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}$ formato dalle sezioni che sono localmente uguali a sezioni del tipo $f^\# s$. Più precisamente, una sezione $h \in \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U)$ appartiene a $f^{-1}\mathcal{F}(U)$ se e solo se per ogni $x \in U$ esistono due aperti $x \in W \subset U$, $f(W) \subset V \subset Y$ ed una sezione $s \in \mathcal{F}(V)$ tale che $h_{|W} = f^\#(s)_{|W}$.

È tautologico osservare che ogni sezione nell'immagine dei morfismi $f^\#$ appartiene al fascio $f^{-1}\mathcal{F}$; quindi se $U \subset X$ e $V \subset Y$ sono aperti tali che $f(U) \subset V$, allora è definito un omomorfismo di gruppi

$$f^\#\colon \mathcal{F}(V) \to f^{-1}\mathcal{F}(U), \qquad f^\#(s)_x = s_{f(x)}, \qquad x \in V .$$

In particolare, per ogni aperto $V \subset Y$ si ha

$$f^\#\colon \mathcal{F}(V) \to f^{-1}\mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_* f^{-1}\mathcal{F}(V)$$

e questo equivale a dire che è ben definito un morfismo di fasci su Y

$$f^{\#}\colon \mathcal{F} \to f_* f^{-1}\mathcal{F}\ .$$

Lemma 7.3. *Sia $f\colon X \to Y$ continua e $\mathcal{F}$ un fascio su Y. Allora per ogni $x \in X$ esiste un isomorfismo di gruppi abeliani*

$$f^{\#}\colon \mathcal{F}_{f(x)} \xrightarrow{\simeq} f^{-1}\mathcal{F}_x\ .$$

In particolare

$$\mathcal{C}^0(f^{-1}\mathcal{F}) = \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}\ .$$

Dimostrazione. Facile esercizio. □

Possiamo pensare l'operatore f^{-1} come un funtore dalla categoria dei fasci su Y alla categoria dei fasci su X. Ogni morfismo $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di fasci su Y induce il morfismo

$$f^{-1}\alpha\colon \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{G},$$

tramite la formula

$$(f^{-1}\alpha)_U = \prod_{x\in U} \alpha_{f(x)}\colon \prod_{x\in U} \mathcal{F}_{f(x)} \to \prod_{x\in U} \mathcal{G}_{f(x)}$$

per ogni aperto $U \subset X$. La commutatività dei diagrammi del tipo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{G}(V) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "\alpha_x"] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

per ogni $x \in V$ implica che per ogni coppia di aperti $V \subset Y$, $U \subset X$ tali che $f(U) \subset V$, il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f^{\#}"] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "f^{\#}"] \\ \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f^{-1}\alpha"] & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

è ancora commutativo: da questo segue che $f^{-1}\alpha$ si restringe ad un morfismo di fasci

$$f^{-1}\alpha\colon f^{-1}\mathcal{F} \to f^{-1}\mathcal{G}\ .$$

A livello di spighe, il morfismo $f^{-1}\alpha$ commuta con α e con gli isomorfismi $f^{\#}$, ossia

$$f^{-1}\alpha_x \circ f^{\#} = f^{\#} \circ \alpha_{f(x)}\colon \mathcal{F}_{f(x)} \to f^{-1}\mathcal{G}_x\ .$$

Se $i\colon U \to X$ è il morfismo di inclusione di un aperto U e $\mathcal{F}$ è un fascio su X, si scrive $i^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}_{|U}$. Si noti che per ogni aperto $V \subset U$ vale $\mathcal{F}_{|U}(V) = \mathcal{F}(V)$.

Lemma 7.4. *Siano $f\colon X \to Y$ continua e $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci su Y. Allora ogni diagramma commutativo di fasci su X*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{K} \\ f^{-1}\mathcal{F} \arrow[u, "\gamma'"] \arrow[r, "f^{-1}\alpha"] & f^{-1}\mathcal{G} \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

si estende in maniera canonica ad un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{K} \arrow[r, "\beta_0"] & \mathcal{C}^0\beta \\ f^{-1}\mathcal{F} \arrow[u, "\gamma'"] \arrow[r, "f^{-1}\alpha"] & f^{-1}\mathcal{G} \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "f^{-1}\alpha_0"] & f^{-1}\mathcal{C}^0\alpha \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per (5.1) il diagramma si estende naturalmente a un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{K} \arrow[r, "\beta_0"] & \mathcal{C}^0\beta \\
f^{-1}\mathcal{F} \arrow[u, "\gamma'"] \arrow[r, "f^{-1}\alpha"] & f^{-1}\mathcal{G} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "f^{-1}\alpha_0"] & \mathcal{C}^0(f^{-1}\alpha) \arrow[u, "\gamma_0"]
\end{tikzcd}$$

Basta quindi dimostrare che esiste un morfismo naturale di fasci $\beta\colon f^{-1}(\mathcal{C}^0\alpha) \to \mathcal{C}^0(f^{-1}\alpha)$.

Per come abbiamo definito il fascio $f^{-1}(\mathcal{C}^0\alpha)$ ciò equivale ad avere, per ogni $x \in X$ un omomorfismo di gruppi

$$f^{-1}(\mathcal{C}^0\alpha)_x = (\mathcal{C}^0\alpha)_{f(x)} \to \frac{f^{-1}\mathcal{G}_x}{f^{-1}\alpha(f^{-1}\mathcal{F}_x)} = \frac{\mathcal{G}_{f(x)}}{\alpha(\mathcal{F}_{f(x)})}$$

che possiamo scegliere come l'identità su $\mathcal{C}^0\alpha$. $\square$

Il lemma precedente, assieme ai morfismi naturali

$$f^{\#}_Y\colon \Gamma(Y, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{F})$$

permette di definire, per ogni applicazione continua $f\colon X \to Y$ ed ogni fascio $\mathcal{F}$ su Y, dei morfismi naturali di gruppi di coomologia

$$f^*\colon H^n(Y, \mathcal{F}) \to H^n(X, f^{-1}\mathcal{F})\ .$$

Applicando il funtore f^{-1} alla risoluzione canonica di $\mathcal{F}$ otteniamo una successione esatta di fasci su X:

$$0 \to f^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{i} f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d} f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F} \xrightarrow{d} \cdots$$

Applicando il Lemma 7.4 al diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r, "f^{-1}0"] & f^{-1}\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

troviamo un'estensione

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} \\
0 \arrow[r, "f^{-1}0"] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Poi riapplichiamo il Lemma 7.4 al diagramma

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} \\
f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

trovando un'ulteriore estensione naturale

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}^1 f^{-1}\mathcal{F} \\
0 \arrow[r, "f^{-1}0"] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[u] \arrow[r] & f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Proseguendo otteniamo un diagramma commutativo di fasci

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F} \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F} \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r, "i"] & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r, "d_0"] & \mathcal{C}^1 f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r, "d_1"] & \mathcal{C}^2 f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r, "d_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Passando alle sezioni globali otteniamo due morfismi di complessi

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(Y,\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_Y^\#"] & \Gamma(Y,\mathcal{C}^0\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_Y^\#"] & \Gamma(Y,\mathcal{C}^1\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_Y^\#"] & \Gamma(Y,\mathcal{C}^2\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_Y^\#"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Gamma(X,f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Gamma(X,f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Gamma(X,f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] & \Gamma(X,\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] & \Gamma(X,\mathcal{C}^1 f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] & \Gamma(X,\mathcal{C}^2 f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

la cui composizione induce in coomologia i morfismi desiderati

$$f^*\colon H^n(Y,\mathcal{F}) \to H^n(X,f^{-1}\mathcal{F}) .$$

È facile ed intuitivo mostrare la funtorialità di tale construzione, ossia che per ogni coppia di applicazioni continue $f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to X$, ogni n ed ogni fascio $\mathcal{F}$ su Y si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
H^n(Y,\mathcal{F}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[dr, "(fg)^*"'] & H^n(X,f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[d, "g^*"] \\
& H^n(Z,(fg)^{-1}\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

8. Invarianza omotopica della coomologia a coefficienti costanti

Per ogni gruppo abeliano G ed ogni spazio topologico X useremo la notazione semplificata $H^*(X,G)$ per indicare la coomologia del fascio G_X. Siccome $f^{-1}G_Y = G_X$ per ogni applicazione continua $f\colon X \to Y$, si hanno degli omomorfismi di gruppi

$$f^*\colon H^n(Y,G) \to H^n(X,G) .$$

Definizione 8.1. Diremo che un fascio $\mathcal{F}$ su X è **quasi fiacco** se per ogni $x \in X$ l'applicazione $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}_x$ è surgettiva.

Ogni fascio fiacco è anche quasi fiacco; i fasci G_X di funzioni localmente costanti sono quasi fiacchi ma non sono fiacchi in generale.
Richiamiamo ora due teoremi che ci serviranno successivamente. Sono due risultati classici, chi fosse interessato ad una dimostrazione può consultare [8].

Teorema 8.2 (Teorema del numero di Lebesgue)**.** *Ogni ricoprimento apero $\mathcal{A}$ di uno spazio metrico compatto (X,d) ammette un numero di Lebesgue, cioè un numero $\delta > 0$ tale che ogni sottoinsieme di diametro minore di δ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{A}$.*

Teorema 8.3 (Teorema di Wallace)**.** *Siano S e T spazi topologici. Se A, B sono sottospazi compatti degli spazi topologici S, T, allora gli aperti della forma $U \times V$, dove U è un aperto di S contenente A e V è una aperto di T contenente B, sono una base per gli intorni $A \times B$ in $S \times T$ (cioè per ogni aperto Ω di $S \times T$ contenente $A \times B$ esistono U, V come sopra detto tali che sia $A \times B \subseteq U \times V \subseteq \Omega$).*

Ora siamo pronti per enunciare e dimostrare il seguente teorema.

Teorema 8.4. *Siano X uno spazio topologico e $p\colon X \times [0,1] \to X$ la proiezione. Allora per ogni successione esatta*

$$0 \to \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{d_3} \mathcal{F}_4 \to \cdots$$

di fasci quasi fiacchi su $X \times [0,1]$, la successione

$$0 \to p_*\mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} p_*\mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} p_*\mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} p_*\mathcal{F}_3 \to \cdots$$

è esatta su X.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su N l'esattezza della successione in $p_*\mathcal{F}_N$.

Per $N = 0,1$ tutto segue dall'esattezza a sinistra del funtore sezioni; non è quindi restrittivo supporre $N \geq 2$.

Siano $x \in X$ e $s \in (p_*\mathcal{F}_N)_x$ tale che $d_N(s) = 0$. Allora esiste un intorno aperto $x \in U$ ed $s \in (p_*\mathcal{F}_N)(U) = \mathcal{F}_N(U \times [0,1])$ tale che $d_N(s) = 0$. Per ogni $t \in [0,1]$ esiste un intorno aperto di (x,t) in $U \times [0,1]$ dove la sezione s si solleva ad una sezione di $\mathcal{F}_{N-1}$.

Per il teorema del numero di Lebesgue applicato allo spazio metrico compatto $\{x\} \times [0,1]$ possiamo trovare un numero finito di aperti $V_1, \dots, V_n \subset U \times [0,1]$ ed n sezioni $h_i \in \mathcal{F}_{N-1}(V_i)$ tali che per ogni indice $i = 1, \dots, n$ vale:

(1) $f(h_i) = s_{|V_i}$;
(2) $\{x\} \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \subset V_i$.

Per il teorema di Wallace, a meno di restringere gli aperti V_i, possiamo supporre

$$V_i = U_i \times A_i$$

per ogni indice i, dove U_i è un intorno aperto di x e A_i è un intorno aperto di $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$.

A meno di restringere U possiamo supporre $U_i = U$ per ogni i. Siccome $d_{N-1}(h_i - h_{i-1}) = 0$ e $\mathcal{F}_{N-2}$ è quasi fiacco, a meno di restringere ulteriormente gli aperti U e A_i possiamo supporre che $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $|i - j| \geq 2$ e che che per ogni $i = 2, \dots, n$ esiste $r_i \in \mathcal{F}_{N-2}(U \times [0,1])$ tale che

$$d_{N-2}(r_i) = h_{i-1} - h_i \in \mathcal{F}_{N-1}(U \times (A_{i-1} \cap A_i)) \ .$$

A meno di sostituire h_i con $h_i + d_{N-2}(r_1 + r_2 + \cdots + r_i)$ si ha che le sezioni h_i coincidono sulle doppie intersezioni e quindi definiscono una sezione di $\mathcal{F}_{N-1}$ sull'aperto $U \times [0,1]$. Chiaramente $h \in p_*\mathcal{F}_{N-1}(U)$ e $d_{N-1}(h) = s$. □

Corollario 8.5. *Siano $p\colon X \times [0,1] \to X$ la proiezione e G un gruppo abeliano. Allora per ogni n il morfismo*

$$p^*\colon H^n(X, G) \to H^n(X \times [0,1], G)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Scriviamo per semplicità notazionale $Y = X \times [0,1]$.

Sappiamo che il morfismo p^* in coomologia è ottenuto per composizione del morfismo $p^\#$ e del morfismo indotto dal diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p^{-1}G_X \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & p^{-1}\mathcal{C}^0G_X \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & p^{-1}\mathcal{C}^1G_X \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & p^{-1}\mathcal{C}^2G_X \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & p^{-1}G_X \arrow[r, "i"] & \mathcal{C}^0p^{-1}G_X \arrow[r, "d_0"] & \mathcal{C}^1p^{-1}G_X \arrow[r, "d_1"] & \mathcal{C}^2p^{-1}G_X \arrow[r, "d_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per il teorema precedente la successione di fasci su X

$$0 \to G_X = p_*p^{-1}G_X \to p_*\mathcal{C}^0p^{-1}G_X \to p_*\mathcal{C}^1p^{-1}G_X \to p_*\mathcal{C}^2p^{-1}G_X \to \cdots$$

è una risoluzione fiacca, e quindi il complesso delle sue sezioni globali calcola la coomologia di G_X. D'altra parte, i morfismi

$$\mathcal{C}^nG_X \xrightarrow{p^\#} p_*p^{-1}\mathcal{C}^nG_X \xrightarrow{p_*\alpha_n} p_*\mathcal{C}^np^{-1}G_X$$

inducono un morfismo tra due risoluzioni fiacche di G_X e, per il teorema di de Rham inducono isomorfismi tra i gruppi di coomologia dei complessi delle sezioni globali. □

Corollario 8.6. *Siano $f, g\colon X \to Y$ due applicazioni omotope e G un gruppo abeliano. Allora per ogni n si ha:*

$$f^* = g^*\colon H^n(Y, G) \to H^n(X, G) \ .$$

Dimostrazione. Sia $F\colon X \times [0,1] \to Y$ tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$; conviene scrivere $f = Fi$ e $g = Fj$, dove $i(x) = (x, 0)$ e $j(x) = (x, 1)$. Siccome $f^* = i^*F^*$, $g^* = j^*F^*$ basta dimostrare che

$$i^* = j^*\colon H^n(X \times [0,1], G) \to H^n(X, G) \ .$$

Basta adesso osservare che $pi = pj$, dunque $i^*p^* = j^*p^*$, e che p^* è un isomorfismo. □

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice contraibile se esiste un'applicazione continua

$$F\colon X \times [0,1] \to X$$

tale che $F(x, 0) = x$ per ogni $x \in X$ e $F(-, 1)$ è costante. Ad esempio, ogni sottospazio convesso $X \subset \mathbb{R}^n$ è contraibile: basta infatti scegliere un qualsiasi punto $y \in X$ e considerare l'applicazione

$$F(x, t) = (1 - t)x + ty \ .$$

Corollario 8.7. *Siano X uno spazio contraibile e G un gruppo abeliano. Allora vale*

$$H^0(X,G) = G, \qquad H^n(X,G) = 0 \qquad \forall\, n > 0\,.$$

Dimostrazione. Per far vedere che $H^0(X,G) = G$ basta notare che poiché lo spazio è connesso $\Gamma(X, G_X) = G$.

Per $n > 0$ sappiamo per ipotesi che esistono un punto $p \in X$ ed un'applicazione continua $F\colon X \times [0,1] \to X$ tali che $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = p$ per ogni $x \in X$. Ciò significa che, indicando con $i\colon \{y\} \to X$ l'inclusione, nel diagramma

$$\{p\} \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} \{p\} \xrightarrow{i} X$$

la composizione di due applicazioni consecutive è omotopa all'identità. Passando in coomologia si ha

$$H^n(X,G) \xrightarrow{i^*} H^n(\{p\},G) \xrightarrow{r^*} H^n(X,G) \xrightarrow{i^*} H^n(\{p\},G)$$

e la composizione di due omomorfismi consecutivi è l'identità.

Ma su uno spazio disceto si ha $\mathcal{F} \cong \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ e dunque in particolare ogni fascio $\mathcal{F}$ è fiacco, e dunque vale che

$$H^n(\{p\},G) = 0 \qquad \forall\, n > 0\,.$$

Quindi $r^* = 0$ implica che l'identità di $H^n(X,G)$ è il morfismo nullo, da cui la tesi.

Il ragionamento appena visto si può estendere facilmente per dimostrare che se X è un retratto per deformazione di Y allora $H^n(X,G) \cong H^n(Y,G)$. □

9. La successione esatta della coppia

Siano $\mathcal{F}$ un fascio su X, $U \subset X$ un aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$. La famiglia $\mathbf{A}(s)$ degli aperti $V \subset U$ tali che $s_{|V} = 0$ possiede un massimo rispetto all'ordinamento di inclusione. Infatti per l'assioma (F3) si ha

$$\bigcup_{V \in \mathbf{A}(s)} V \in \mathbf{A}(s)\,.$$

Definizione 9.1. Nelle notazioni precedenti il sottospazio

$$\operatorname{supp}(s) = U - \bigcup_{V \in \mathbf{A}(s)} V$$

si dice **supporto** della sezione s. È immediato osservare che $\operatorname{supp}(s)$ è chiuso in U. Equivalentemente, il supporto è la chiusura in U del sottoinsieme dei punti $x \in U$ tali che $s_x \neq 0$.

Se $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, allora per ogni $s \in \mathcal{F}(U)$ si ha $\operatorname{supp}(\alpha(s)) \subset \operatorname{supp}(s)$.

Lemma 9.2. *Siano $W \subset U$ aperti e $s \in \mathcal{F}(U)$. Allora*

$$supp(s_{|W}) = supp(s) \cap W\,.$$

Dimostrazione. Immediata dalla formula $\mathbf{A}(s_{|W}) = \{V \cap W \mid A \in \mathbf{A}(s)\}$. □

Data un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ ed un fascio $\mathcal{F}$ su X possiamo definire un fascio $f_!\mathcal{F}$ su X chiamato **immagine diretta a supporti propri**. Per semplicità consideriamo solo il caso, più che sufficiente per i nostri obiettivi, in cui f è una immersione aperta.

Siano dunque $U \subset X$ un aperto, $j\colon U \to X$ il morfismo di inclusione e $\mathcal{F}$ un fascio su U. Per ogni aperto $V \subset X$ definiamo

$$j_!\mathcal{F}(V) = \{s \in \mathcal{F}(U \cap V) = j_*\mathcal{F}(V) \mid \operatorname{supp}(s) \text{ è chiuso in } V\}\,.$$

La dimostrazione che $j_!\mathcal{F}$ è un fascio richiede qualche passaggio: mostreremo prima che è un sottoprefascio di $j_*\mathcal{F}$ e poi applicheremo il Lemma 1.8 per dimostrare che è un fascio.

Procediamo adesso con la prima parte: se $W \subset V$ e $s \in j_!\mathcal{F}(V)$ allora $\operatorname{supp}(s_{W\cap U}) = \operatorname{supp}(s) \cap W$ e quindi se $\operatorname{supp}(s)$ è chiuso in V, allora $\operatorname{supp}(s_{W\cap U})$ è chiuso in W; questo prova che $j_!\mathcal{F}$ è un sottoprefascio di $j_*\mathcal{F}$.

Vediamo adesso come sfruttare il Lemma 1.8 per concludere. Sia $s \in j_*\mathcal{F}(\cup V_i)$ tale che $s_{|V_i} \in j_!\mathcal{F}(V_i)$ per ogni i. Allora

$$\operatorname{supp}(s_{|V_i}) = \operatorname{supp}(s) \cap V_i.$$

Dunque $\operatorname{supp}(s) \cap V_i$ è chiuso in V_i e, siccome i ricoprimenti aperti sono fondamentali, ne consegue che $\operatorname{supp}(s)$ è chiuso in $\cup V_i$.

Lemma 9.3. *Siano $U \subset X$ un aperto, $j\colon U \to X$ il morfismo di inclusione e $\mathcal{F}$ un fascio su U. Per ogni $x \in X$ vale*

$$j_!\mathcal{F}_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

Dimostrazione. Facile esercizio. □

Elenchiamo adesso alcune proprietà degli operatori $f_*, f^{-1}, f_!$, lasciando la loro dimostrazione per esercizio al lettore.

(1) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ continue e $\mathcal{F}$ fascio su X. Allora $g_*(f_*\mathcal{F}) = (gf)_*\mathcal{F}$.
(2) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ continue e $\mathcal{F}$ fascio su Z. Allora $f^{-1}(g^{-1}\mathcal{F}) = (gf)^{-1}\mathcal{F}$.
(3) Siano $j\colon W \to U$, $i\colon U \to X$ inclusioni di aperti e $\mathcal{F}$ fascio su W. Allora $i_!(j_!\mathcal{F}) = (ij)_!\mathcal{F}$.
(4) Siano $U \subset D \subset X$ con U aperto e D chiuso in X, e sia $\mathcal{F}$ fascio su U. Se $j\colon U \to D$ e $i\colon D \to X$ sono le inclusioni, si ha
$$i_*(j_!\mathcal{F}) = (ij)_!\mathcal{F}\ .$$

Lemma 9.4. *Siano $j\colon U \to X$ una immersione aperta e $\mathcal{F}$ un fascio su X. Allora esiste un morfismo naturale di fasci*
$$\alpha\colon j_!(\mathcal{F}_{|U}) \to \mathcal{F}\ .$$

Dimostrazione. Sia $V \subset X$ un aperto, per definizione
$$j_!(\mathcal{F}_{|U})(V) = \{s \in \mathcal{F}(U \cap V) \mid \operatorname{supp}(s) \in U \cap V \text{ è chiuso in } V\}.$$
Sia dunque $s \in j_!(\mathcal{F}_{|U})(V)$, allora $W = V - \operatorname{supp}(s)$ è aperto in V e s si annulla sull'aperto $W \cap U$. Si definisce $\alpha(s) \in \mathcal{F}(V)$ come l'unica sezione tale che
$$\alpha(s)_{|U\cap V} = s, \qquad \alpha(s)_{|W} = 0\ .$$
□

Sia D un sottoinsieme *chiuso* di uno spazio topologico X; indichiamo con
$$i\colon D \to X, \qquad j\colon U = X - D \to X,$$
i morfismi di inclusione in X rispettivamente di D e del suo complementare. Per ogni gruppo abeliano G possiamo considerare il fascio su X
$$G_{(X,D)} = j_!G_U\ .$$
Abbiamo visto che esiste un morfismo naturale di fasci $\alpha\colon G_{(X,D)} \to G_X$.

Lemma 9.5 (Formula di escissione)**.** *Se $X = D \cup H$, con D, H sottoinsiemi chiusi, e indichiamo con $h\colon H \to X$ il morfismo di inclusione. Allora per ogni gruppo abeliano G vale*
$$h_*G_{(H,H\cap D)} = G_{(X,D)}\ .$$

Dimostrazione. Basta osservare che $U \subset H$ e quindi l'inclusione $j\colon U \to X$ si fattorizza via h. □

Similmente esiste un morfismo di fasci $\beta\colon G_X \to i_*G_D = i_*i^{-1}G_X$. Osservando il comportamento sulle spighe segue immediatamente che la successione
$$0 \to G_{(X,D)} \xrightarrow{\alpha} G_X \xrightarrow{\beta} i_*G_D \to 0$$
è esatta; chiameremo tale successione la **successione esatta della coppia** (X, D).

Definizione 9.6. Per ogni sottospazio chiuso $D \subset X$ ed ogni gruppo abeliano G si definiscono i gruppi di coomologia della coppia (X, D) a coefficienti in G come
$$H^n(X, D, G) = H^n(X, G_{(X,D)})\ .$$

Segue immediatamente dalla formula di escissione che se $X = D \cup H$, con D, H chiusi, allora
$$H^n(X, D, G) = H^n(H, H \cap D, G)$$
per ogni n.

Tenendo presente la Proposizione 7.2, la successione esatta lunga di coomologia della successione esatta della coppia diventa:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^n(X,D,G) \longrightarrow H^n(X,G) \longrightarrow H^n(D,G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X,D,G) \longrightarrow \cdots$$

10. Coomologia delle sfere ed applicazioni

Siamo adesso in grado di calcolare i gruppi di coomologia delle sfere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e di come agiscono in coomologia le trasfomazioni $f\colon S^n \to S^n$ indotte da matrici ortogonali $A \in O(n+1,\mathbb{R})$.

Il caso $n = 0$ è particolarmente semplice, infatti S^0 è lo spazio discreto formato da due punti, ricordiamo che poiché è discreto ogni fascio è fiacco, e quindi, per ogni gruppo abeliano G si ha

$$H^0(S^0,G) = \{f\colon S^0 \to G\} \simeq G \oplus G, \qquad H^n(S^0,G) = 0, \quad n > 0\ .$$

Le uniche matrici ortognali 1×1 sono ± 1. La matrice $A = -1$ ha l'effetto di scambiare i punti di S^0 e quindi agisce in coomologia come

$$A^*\colon G \oplus G \to G \oplus G, \qquad A^*(a,b) = (b,a)\ .$$

Teorema 10.1. *Per ogni $n > 0$ e per ogni gruppo abeliano G si ha:*

(1) $H^0(S^n,G) = H^n(S^n,G) = G$, $H^i(S^n,G) = 0$ *per* $i \neq 0, n$;

(2) *se* $A \in O(n+1,\mathbb{R})$, $a \in H^0(S^n,G)$ *e* $b \in H^n(S^n,G)$ *si ha*

$$A^*a = a, \qquad A^*b = \det(A)b\ .$$

Dimostrazione. Le affermazioni sui gruppi H^0 sono ovvie; dimostriamo quelle sui gruppi H^n, $n > 0$. Per ogni $n \geq 0$ denotiamo

$$S^n = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\},$$
$$S^n_+ = \{(x_0,\dots,x_n) \in S^n \mid x_0 \geq 0\},$$
$$S^n_- = \{(x_0,\dots,x_n) \in S^n \mid x_0 \leq 0\}.$$

Notiamo che le due calotte sferiche S^n_+, S^n_- sono spazi contraibili e che, $S^n_+ \cap S^n_- \simeq S^{n-1}$ per ogni $n > 0$. Dalla contraibilità di S^n_-, dall'isomorfismo $H^0(S^n,G) \xrightarrow{\simeq} H^0(S^n_-,G)$, dalla successione esatta della coppia (S^n,S^n_-) e dalla formula di escissione otteniamo

$$H^i(S^n,G) = H^i(S^n,S^n_-,G) = H^i(S^n_+,S^{n-1},G)$$

per ogni $i > 0$.

Similmente dalla successione esatta della coppia (S^n_+, S^{n-1}) si ottiene una successione esatta $(n > 0)$

$$G = H^0(S^n_+,G) \longrightarrow H^0(S^{n-1},G) \longrightarrow H^1(S^n_+,S^{n-1},G) \to 0$$

ed isomorfismi

$$H^{i-1}(S^{n-1},G) = H^i(S^n_+,S^{n-1},G), \qquad i > 1\ .$$

Dalla successione esatta ricaviamo

$$H^1(S^1_+,S^0,G) = G, \qquad H^1(S^n_+,S^{n-1},G) = 0, \quad n > 1,$$

e la dimostrazione della prima parte del teorema segue per induzione su n. Se $n > 0$, allora ogni applicazione $A\colon S^n \to S^n$ indotta da una matrice ortogonale è omotopa ad un'applicazione ortogonale che lascia fisso il punto $(1,0,\dots,0)$ e che preserva quindi entrambe le calotte $S^n_\pm$. La dimostrazione della seconda parte del teorema si ottiene facilmente per induzione usando le medesime successioni esatte della dimostrazione del primo punto. □

Esempio 10.2. Dal teorema segue facilmente che l'applicazione antipodale

$$f\colon S^n \to S^n, \qquad f(x) = -x,$$

è omotopa all'identità se e solo se n è dispari. Infatti, se $n = 2k-1$ allora $S^n = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\|^2 = 1\}$ ed una possibile omotopia tra f e l'identità è data da

$$F\colon S^n \times [0,1] \to S^n, \qquad F(z,t) = ze^{i\pi t}\ .$$

Viceversa, se n è pari, allora f è indotta dalla matrice ortogonale $-I \in O(n+1,\mathbb{R})$ che ha determinante -1 e quindi agisce in maniera non banale su $H^n(S^n,\mathbb{Z})$.

Esempio 10.3 (Sfere impettinabili)**.** Mostriamo che per ogni intero $n > 0$ ed ogni applicazione continua $f: S^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ esiste $x \in S^{2n}$ tale che i vettori $x, f(x)$ sono linearmente dipendenti. Infatti se si avesse $f(x) \neq \lambda x$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$F(x,t) = \frac{x + tf(x)}{\|x + tf(x)\|}$$

è un'omotopia tra l'identità e l'applicazione $g(x) = x + f(x)/\|x + f(x)\|$, mentre

$$G(x,t) = \frac{(2t-1)x + tf(x)}{\|(2t-1)x + tf(x)\|}$$

è un'omotopia tra l'antipodo e l'applicazione g. Dunque l'identità è omotopa all'antipodo, ma per quanto visto nell'esempio precedente questo è impossibile.

Esempio 10.4 (Teorema del punto fisso)**.** Mostriamo che ogni applicazione continua $f: D^n \to D^n$ possiede un punto fisso. Supponiamo $n > 1$ (per $n = 1$ è un semplice esercizio di topologia) e che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Allora l'applicazione

$$r: D^n \to S^{n-1}, \qquad r(x) = x + t(x - f(x)), \qquad t \geq 0, \quad \|r(x)\| = 1,$$

è tale che $r(x) = x$ per ogni $x \in S^{n-1}$, ossia $ri = Id$ dove $i: S^{n-1} \to D^n$ è l'inclusione. Passando in coomologia si ha quindi che la composizione di

$$H^{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{r^*} H^{n-1}(D^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

è l'identità, ma questo è impossibile perché D^n è contraibile e dunque $H^{n-1}(D^n, \mathbb{Z}) = 0$.

Riferimenti bibliografici

[1] R. Godement: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris (1958).
[2] R. Hartshorne: *Algebraic geometry.* Springer Verlag GTM **52** (1977).
[3] D. Huybrects: *Complex geometry.* Springer Verlag Universitext (2005).
[4] M. Kashiwara, T. Kawai and T. Kimura: *Foundations of algebraic analysis.* Princeton University press (1986).
[5] S. Lang: *Algebra.* Springer-Verlag, third edition (2002).
[6] C.A. Weibel: *An introduction to homological algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
[7] N. Bourbaki: *General Topology Chapters 1-4* Elements of mathematics, Springer-Verlag, (1989).
[8] M. Manetti: *Topologia* Springer, (2008).