Geometria algebrica (5 pag.)

4/3/2013

Funzioni olomorfe: (Richiami)

$U \subset \mathbb{C}$ aperto $\quad f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice olomorfa se:

$f(z) = \sum a_i (z-w)^i$ in un intorno di $w \in U$.

1) f olomorfa $\iff \bar{\partial} f = 0 \iff \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$df = \underbrace{\partial f}_{= \frac{\partial f}{\partial z} dz} + \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

2) Formula di Cauchy:

disco aperto. (Analogamente il disco chiuso: $\leq$)

$p \in \mathbb{C}$, $0 < r \leq \infty$. Indichiamo con $\Delta(p,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-p| < r\}$

$\partial\Delta(p,r) := \{z \mid |z-p| = r\}$ $\quad (r < \infty)$

$f: \bar{\Delta}(p,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua e olomorfa in $\Delta(p,r)$

allora se $z \in \Delta(p,r)$ si ha:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi}$$

Ex: verificare che la F.C. implica l'olomorfia di f.

Viceversa se $f: \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua, allora: $\tilde{f}(z) = \int_{\partial\Delta} \frac{f}{\xi - z} d\xi$ è olomorfa

3) Principio del massimo:

3.1) $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso, $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora $|f|$ ammette max $\iff f \equiv$ c

3.2) $f: \bar{\Delta} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in Δ. Allora $\max_{\bar{\Delta}} |f| = \max_{\partial\Delta} |f|$

4) Ordine di zero:

$f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa. $p \in U$. $f(z) = \sum_{i \geq 0} a_i (z-p)^i$.

Si definisce ordine di zero di f in p, il minimo $k \geq 0$ t.c. $a_k \neq 0$.

$\iff \dfrac{f(z)}{|z-p|^k}$ olomorfa e $\neq 0$ in p.

(

Passiamo al caso a più variabili:

Polidischi:

$p \in \mathbb{C}^n$, $p = (p_1, \dots, p_n)$. Notazione: $\begin{cases} \|p\| = \sqrt{\sum |p_i|^2} & \text{norma euclidea.} \\ |p| = \max_i |p_i| \end{cases}$

consideriamo $r \in [0, +\infty]^n$ $r = (r_1, \dots, r_n)$ (poliraggio)

$\Delta(p, r) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |p_i - z_i| < r_i, \ i = 1, \dots, r \} = \Delta(p_1, r_1) \times \Delta(p_2, r_2) \times \dots$

polidisco aperto di centro p e poliraggio r.

$\bar{\Delta}(p, r) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |p_i - z_i| \leq r_i, \ i = 1, \dots, r \}$

Definizione:

$U \subset \mathbb{C}^n$ aperto.

$f : U \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa se localmente (in un intorno di $\underset{(p_1, \dots, p_n)}{p} \in U$)

è della forma $f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1 \dots i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} (z_1 - p_1)^{i_1} \dots (z_n - p_n)^{i_n}$.

in particolare tale serie deve convergere, che è come dire che

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $|a_{i_1 \dots i_n}| \leq \delta^{i_1 + \dots + i_n}$ (tranne al più per un $\# < \infty$ di casi).

Idea: $f = \sum \dots$ t.c. $\left| \sum_i a_{i_1 \dots i_n} \frac{1}{\delta^{i_1 + \dots + i_n}} \right| < \infty$

Oss:

$f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa. $U \subset \mathbb{C}^n$.

Se $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$ sottospazio affine, allora $f : U \cap \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ è olomorfa.

Infatti se $u_1, \dots, u_k$ coord. su $\mathbb{C}^k$. Allora si avrà $z_i = \sum \alpha_{ij} u_j$.

Così $f(u_1, \dots, u_k) = \sum a_{i_1 \dots i_n} (\sum \alpha_{1j} u_j)^{i_1} \dots (\sum \alpha_{nj} u_j)^{i_n} = \sum b_{j_1 \dots j_k} u_1^{j_1} \dots u_k^{j_k}$.

In particolare f è "separatamente olomorfa", i.e.,

$z_i \to f(z_1 \dots z_n)$ è olomorfa $\forall i$. (z_j costanti se $j \neq i$)

Sorprendente: è vero anche il viceversa:

Teorema:

$U \subset \mathbb{C}^n$ aperto, $f : U \to \mathbb{C}$ continua. Allora f è olomorfa se e soltanto:

f è separatamente olomorfa. ($\overset{\text{ovvia}}{\Longleftrightarrow} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$)

Dim

($\Rightarrow$) ovvio per quanto detto prima.

($\Leftarrow$) sia $p \in U$ ~~per semplicità pongo~~ $p=(p_1,\dots,p_n)$

Sia $r>0$ t.c. $\overline{\Delta}(p,r)$ con $r=(r_1,\dots,r_n)$ sia contenuto in U.

Consideriamo $z \in \Delta(p,r)$. So che f è olomorfa in z_1 e quindi posso applicare la formula di Cauchy:

$$f(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi_1 - p_1| = r_1} \frac{f(\xi_1, z_2, \dots, z_n)}{\xi_1 - z_1} \, d\xi_1$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint_{\substack{|\xi_1 - p_1| = r_1 \\ |\xi_2 - p_2| = r_2}} \frac{f(\xi_1, \xi_2, z_3, \dots, z_n)}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)} \, d\xi_1 \, d\xi_2$$

Formula di Cauchy in n-variabili.

attenzione non c'è il bordo del polidisco.

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iiint \cdots \int_{|\xi_i - p_i| = r_i} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)\cdots(\xi_n - z_n)} \, d\xi_1 \dots d\xi_n$$

e ora si fa lo stesso discorso del caso a una variabile:

$$\frac{1}{\xi_i - z_i} = \frac{1}{\xi_i - p_i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_i - p_i}{\xi_i - p_i}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z_i - p_i)^n}{(\xi_i - p_i)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z_1,\dots,z_n) = \sum_{i_1 \dots i_n} \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \iiint \cdots \int \frac{f(\xi_1,\dots,\xi_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - p_1)^{i_1+1} \cdots (\xi_n - p_n)^{i_n+1}} \right)}_{\frac{\partial f(p)}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_n^{i_n}} \cdot \frac{1}{i_1! \dots i_n!}} (z_1 - p_1)^{i_1} \cdots (z_n - p_n)^{i_n}$$

$\blacksquare$

Principio d'identità:

$U \subset \mathbb{C}^n$ aperto connesso. $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Si possono presentare due casi:

1) $f \equiv 0$

2) $\{ z \in U \mid f(z) = 0 \}$ non ha parte interna.

Dim:

Se non siamo nel caso 1.

Consideriamo $\forall$ multiindice $I = (i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n$, $D_I := \left\{ z \mid \frac{\partial f}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_n^{i_n}} = 0 \right\}$.

Naturalmente D_I è chiuso.

Esempio:

$U \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

$V = C^0(U, \mathbb{C})$

Si sceglie una "esaustione in compatti":

$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$

dove i) $K_i \subset U$ è compatto;

ii) $\bigcup_i K_i = U$;

iii) $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ $\forall i$.

[questo ci dice che $\bigcup \mathring{K}_i = U$]

$\Rightarrow \forall D \subset U$ cpt si ha che $D \subset K_n$, $n \gg 0$.

definiamo allora $p_n : V \longrightarrow [0, +\infty[$

$$f \longrightarrow \max_{K_n} |f|$$

Lemma:

$U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, allora possiede un'esaustione in compatti.

Dim: (se $U = \mathbb{R}^n \Rightarrow K_n = \overline{\Delta(0,n)}$)

sia $\{x_n\} \subset U$ denso e numerabile. ~~Allora $\forall n\ \exists r_n$ t.c. $\Delta(x_n, r_n) \subset U$.~~

sia $r_n = \mathrm{dist}(x_n, \mathbb{R}^n \setminus U) < \infty$. Così $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(x_n, r_n)$.

Infatti se $u \in U$, $\exists r > 0$ t.c. $\Delta(u, r) \subset U$. D'altra parte $\exists x_n$ t.c. $d(u, x_n) < \frac{r}{3}$

Allora $\Delta(x_n, \frac{r}{3}) \subset \Delta(u, r) \subset U$. Quindi $d(u, x_n) < r_n$.

A questo punto basta prendere $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Delta(x_n, \frac{n}{n+1} r_n)}$.

vediamo iii) $\Rightarrow K_n \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Delta(x_n, \frac{n+1}{n+2} r_n) \subset \mathring{K}_{n+1}$ (i, ii sono ovvie).

Prop:

Ogni spazio di Frechet è metrico completo.

Dim: $p_n : V \longrightarrow [0, +\infty)$

basta considerare $d(x,y) := \dfrac{2^{-n} p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$

è invariante per traslazioni

non è omogenea!

esercizio: verificare che d induce la stessa topologia.

Riepilogando: $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

$C^0(U, \mathbb{C})$ e' uno spazio di Frechet dove

$$f_n \longrightarrow f$$

$\iff f_n \to f$ uniformemente su ogni compatto.

Teorema (Ascoli-Arzelà)

X sp. top. compatto.

$\mathcal{F} \subset C^0(X, \mathbb{C})$.

$\mathcal{F}$ e' compatta $\iff$ valgono:

1) $\forall x \in X$, $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ e' limitato $\subset \mathbb{C}$;

2) $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists U \subset X$, intorno di X t.c.
se $y \in U \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon \ \forall f \in \mathcal{F}$.

Esempio

2) non vale se prendo $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $x \to x^n$?

$U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Indichiamo con $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ olomorfe}\}$

Lemma:

$\mathcal{O}(U)$ e' chiuso in $C^0(U, \mathbb{C})$, quindi e' di Frechet.

Dim:

$\{f_n\} \subset \mathcal{O}(U)$ t.c. $f_n \to f \in C^0(U, \mathbb{C})$ uniformemente sui compatti. Bisogna dimostrare che f e' olomorfa.
Ossia che $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ t.c. f olomorfa su $\Delta(x, r)$.
Basta prendere r t.c. $\underbrace{\overline{\Delta(x,r)}}_{\text{cpt}} \subset U$ e applicare Cauchy:

se $z \in \Delta(x, r) \Rightarrow$

$$\forall n \quad f_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\substack{|\xi_i - x_i| = r \\ i = 1, \dots, n}} \cdots \int \frac{f_n(\xi)\, d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_n - z_n)} \quad \text{passando al limite}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \searrow^{\text{per compattezza}}$$

$$f(z) \qquad \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|\xi_i - x_i| = r} \cdots \int \frac{f(\xi)\, d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_n - z_n)}$$

$\blacksquare$

Teorema (Vitali) $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto, $M > 0$ reale. 4

$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{O}(U) \mid |f(x)| \leq M, \forall x \in U \}$. Allora $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ è cpt in $\mathcal{O}(U)$.

Dim:

$\mathcal{A}$ è chiuso $\Rightarrow$ si può applicare Ascoli-Arzelà.

La condizione 1) è vera per ipotesi.

Bisogna mostrare l'equicontinuità. Dimostriamo di più, cioè che è localmente equi-Lipschitziana.

$\forall x \in U$, $\exists$ $\Delta(x,r)$ e $K > 0$ t.c. $\forall z, w \in \Delta(x,r) \Rightarrow$

$$|f(z) - f(w)| < K|z-w| . \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

(per semplicità supp. $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, z_2, \dots z_n)$)

sia $r > 0$, t.c. $\overline{\Delta(x,2r)} \subset U$.

$\forall z \in \Delta(x,r)$ ho che $f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iiint \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_n - z_n)}$

stesso per $f(w)$.

$$\Rightarrow |f(z) - f(w)| = \left| \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n} (z_1 - w_1) \iiint \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - w_1)(\xi_1 - z_1)(\dots)} \right| \leq$$

ξ sta nel prodotto dei bordi

$$\leq |z-w| \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iiint \frac{|f(\xi_1, \dots, \xi_n)|^{\leq M}}{r^{n+1}}}_{K} .$$

☒

Def:

$\phi : V \to W$ lineare e continua tra sp. vett. top.

ϕ si dice un operatore cpt. se $\overline{\phi(U)}$ è cpt in W per qualche intorno U. $\times \phi$

Cor: $U, V \subset \mathbb{C}^n$ aperti.

$r : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ restrizione.

se $\overline{U}$ è compatto $\subset V \Rightarrow r$ è un operatore compatto.

Dim:

Basta prendere $\{ f \in \mathcal{O}(V) \mid |f(x)| < 1 \ \forall x \in \overline{U} \}$ è un aperto.

☒

Geometria Algebrica (7 pag.) 11/03

$U \subset \mathbb{C}^n$ aperto, $\mathcal{O}(U)$ Frechet. (anello)

Principio d'identità $\Rightarrow$ se U connesso allora $\mathcal{O}(U)$ è un dominio d'integrità.

Infatti se $f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow U = \underbrace{\{z \mid f(z)=0\}}_{\text{chiuso}} \cup \underbrace{\{z \mid g(z)=0\}}_{\text{chiuso}}$

e sappiamo che almeno uno dei due insiemi deve avere parte interna non vuota, da cui la tesi per il principio d'identità.
Tuttavia $\mathcal{O}(U)$ non è mai un dominio a fattorizzazione unica:
Per semplicità supp. $U = \mathbb{C}$ ed $f(z) = \sin(z) =$

$$= \sum_{n \text{ dispari}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

tale funzione ha infiniti zeri ($z = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) semplici.
Allora $\frac{f(z)}{z}, \frac{f(z)}{z(z-2\pi)}, \dots, \frac{f(z)}{\prod_{k=0}^{n}(z-2k\pi)}$ sono ancora olomorfe.

conseguenza $\sin(z)$ non è un prodotto finito di irriducibili.

<u>Germi di funzioni</u>:

Sia $p \in \mathbb{C}^n$.

$$\mathcal{O}_{p,\mathbb{C}^n} := \frac{\{(U,f) \mid {U \text{ aperto} \atop p \in U}, f \in \mathcal{O}(U)\}}{\sim}$$

tale che:

$$(U,f) \sim (V,g) \iff \exists\, p \in \overset{\text{aperto}}{W} \underbrace{\subset}_{\text{serve per la transitività.}} U \cap V,\ f|_W = g|_W$$

<u>Lemma</u>:

$\sim$ è una relazione di equivalenza.

<u>Dim</u>:

i) $(U,f) \sim (U,f)$ ovvio. (riflessività)

ii) simmetria anche ovvia

iii) $(U,f) \sim (V,g) \sim (W,h) \Rightarrow \exists \overset{p}{\overset{\cap}{A}} \subset U \cap V$ t.c. $f|_A = g|_A \Rightarrow p \in A \cap B \subset U \cap W$

$\exists \underset{p}{\underset{\cup}{B}} \subset V \cap W$ t.c. $g|_B = h|_B$ ed $f|_{A\cap B} = g|_{A \cap B} = h|_{A\cap B}$

Oss:

$\mathcal{O}_{p,\mathbb{C}^n}$ è un anello.

Dim:

$(U, f) + (V, g) = (U \cap V, f+g)$
$(U, f) \cdot (V, g) = (U \cap V, f \cdot g)$ si vede che sono ben definite.

Proprietà:

1) $\mathcal{O}_{p,\mathbb{C}^n}$ è un anello locale;

2) $\mathcal{O}_{p,\mathbb{C}^n}$ è un dominio a fattorizzazione unica;

Oss:

Basta studiare $p = 0 \in \mathbb{C}^n$.

- A anello commutativo e con $1 \in A$.

Def:

A è locale se esiste un unico ideale massimale proprio.

Esempio:

1) Se $A = \mathbb{K}$ è un campo. $(M = \{0\})$.

2) $A = \mathbb{K}[[t]] = \{\sum_{n \geq 0} a_n t^n \mid a_n \in \mathbb{K}\}$

Infatti grazie al criterio:

Criterio

Sia $I \subset A$ ideale proprio tale che $f \notin I \Rightarrow \exists \frac{1}{f} \in A$.

Allora A è un anello locale ed I è il suo unico ideale massimale.

Dim

Consideriamo A/I. Naturalmente esso è un campo. Quindi I è un ideale massimale. Vogliamo mostrare che è unico.

Sia $M \subset A$ massimale. Si possono presentare i seguenti casi:

1) $M \subset I \Rightarrow M = I$.

2) $\exists f \in M \setminus I$. Assurdo perché f è invertibile. $\boxtimes$

Tornando al caso precedente:
basta prendere tutte le serie che non hanno il termine noto.
Allora se $f \notin I$, $f = \underset{\neq 0}{a_0} + \sum_{n>0} a_n t^n = a_0 + \varphi$.
Si ha "$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_0+\varphi} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1+\frac{\varphi}{a_0}} = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{n \geq 0}\left(-\frac{\varphi}{a_0}\right)^n\right)$" $\in \mathbb{K}[[t]]$.

Riprendiamo $A = \mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n}$. Possiamo definire:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow f(0) \end{aligned}$$ ben definita.

inoltre è un omomorfismo surgettivo di anelli.
Inoltre $\operatorname{Ker}\varphi = \{f \in \mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n} \mid f(0) = 0\} := M$.
Sia $(U, f) \notin M$. Poniamo $V = \{z \in U \mid f(z) \neq 0\}$ (aperto)
Allora $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverso.}}}{\left(V, \frac{1}{f}\right)} \cdot (U, f) = (V, 1) = 1$

Allora M è l'unico ideale massimale.
Possiamo considerare: tale mappa è iniettiva (Principio d'identità) serie convergenti.
$$\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\text{Taylor}} \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$$
l'immagine di tale mappa la indicheremo con $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$
In particolare abbiamo che:
$$\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n} \simeq \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$$
Conviene però descrivere diversamente $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.
<u>Def</u>:
$R = (R_1, \dots, R_n)$ poliraggio $(R_i > 0)$.
$f = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I z^I \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$
$\|f\|_R := \sum_I |a_I| R^I \in [0, +\infty]$, $B_R := \{f \mid \|f\|_R < \infty\}$.

Lemma:

$$\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\} = \bigcup_R B_R$$

Dim:

Supponiamo di avere $(U,f) \in \mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n}$. Allora preso R piccolo abbastanza ($\overline{\Delta(0,R)} \subset U$). Grazie alla formula di Cauchy si ha $\|f\|_R < \infty$.

Teorema:

$\forall R$ poliraggio. $(B_R, \|\ \|_R)$ è un'algebra di Banach, cioè:

- spazio di Banach;
- $f, g \in B_R \Rightarrow \|f\cdot g\|_R \leq \|f\|_R \|g\|_R$.

Dim:

Intanto notiamo che $\|\lambda f\|_R = |\lambda| \|f\|_R$, $\|f\|_R = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

Inoltre se $f = \sum_I a_I z^I$, $g = \sum_I b_I z^I$ allora:

$$\|f+g\|_R = \sum_I |a_I + b_I| R^I \leq \sum |a_I| R^I + \sum |b_I| R^I =$$

$$= \|f\|_R + \|g\|_R.$$

$$f\cdot g = \sum_I \sum_J a_I b_J z^{I+J} \Rightarrow \|f\cdot g\|_R \leq \sum_I \Big\| \sum_J a_I b_J z^{I+J} \Big\|_R \leq$$

$$\leq \sum_I |a_I| R^I \cdot \|g\|_R = \|f\|_R \|g\|_R.$$

Resta da mostrare la completezza:

sia $f_n = \sum_I a_I^n z^I$ succ. di Cauchy in B_R. Allora

(*) $|a_I^n - a_I^m| \leq \dfrac{\|f_n - f_m\|_R}{R^I}$, così $\forall I$ si ha $\{a_I^n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ e quindi convergente. ($a_I^n \to a_I^\infty$).

Indichiamo con $f_\infty = \sum a_I^\infty z^I$.

$(*) \Rightarrow f_n \longrightarrow f_\infty$ in B_R. Infatti sia $\varepsilon > 0$, $N > 0$ t.c.

$\|f_n - f_m\|_R < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N$. Allora $|a_I^n - a_I^m| R^I < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq$

In particolare $R^I |a_I^n - a_I^\infty| \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$, da cui

$$\|f_n - f_\infty\| \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq N.$$

■

Sia ora $\phi \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tale che $\phi = \sum_{i \geq 0}^{\infty} \phi_i(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^i$.
supponiamo che ϕ sia "preparata di ordine N rispetto a z_n", i.e.:

$$\phi_i(0) = \begin{cases} 0 & i < N \\ \neq 0 & i = N \end{cases}$$

Oss:

$\phi(0, \dots, 0, z_n) = c Z_n^N + \dots \quad , c \neq 0.$ ($z_1 z_n$ non è preparata)

Sia inoltre R poliraggio piccolo t.c. $\phi \in B_R$.

Definiamo $V, L : B_R \longrightarrow B_R$ con

$$L\left(\sum_{i \geq 0} f_i z_n^{i+N}\right) := \sum_{i \geq 0} f_{i+N} z_n^i \qquad (f_i = f_i(z_1, \dots, z_{n-1}))$$

Oss:

$\|L(f)\|_R \leq \frac{\|f\|}{R_n^N}$, quindi L e' continuo.

$$V(f) := L(\phi f) \qquad (\text{anche } V \text{ è continuo})$$

Teorema:

Se $R_1, \dots, R_{n-1} \ll R_n^{<1}$ allora V è una applicazione bigettiva.

(In realtà isomorfismo per un teorema di analisi)

Dim:

Innanzitutto a meno di moltiplicare ϕ per una costante $C \in \mathbb{C}$ non nulla si può supporre:

$$\phi(0,\dots,0,z_n) = z_n^N + \text{ordine superiore}.$$

$$\phi = z_n^N + z_n^N e(z_1,\dots,z_n) + \sum_{i=0}^{N-1} h_i(z_1,\dots,z_{n-1})\cdot z_n^i$$

dove $e(0) = h_i(0) = 0$.

Sia $\varepsilon = \frac{1}{2(N+1)}$. (a meno di rimpicciolire R)

posso supporre $\|e\|_R < \varepsilon$, $\|h_i\|_R \leq C(R_1 + \dots + R_{n-1})$, $C > 0$.

e che $\|h_i\|_R \leq \varepsilon R_n^{N-i}$.

$$V(f) = L(\phi\cdot f) = L(z^N f + z^N e f) + \sum h_i L(f\cdot z_n^i) =$$

$$= f + L(z^N e f) + \sum h_i L(f\cdot z_n^i)$$

$$= f + ef + \sum h_i L(f\cdot z_n^i)$$

~~$\|V(f)\|$~~

$$\|V(f) - f\|_R \leq \|ef\|_R + \sum \|h_i\|_R \cdot \|L(f z_n^i)\|_R \leq$$

$$\leq \varepsilon\|f\|_R + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon \cancel{R_n^{N-i}} \cdot \|f\|_R \cdot \frac{1}{\cancel{R_n^{N-i}}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|f\|_R.$$

Allora chiamo $H = I - V \Rightarrow V = I - H$.

$$V^{-1} = \frac{1}{I-H} = \sum_{n\geq 0} H^n$$

Sia $g \in B_R$ allora

$$V^{-1}(g) = \sum_{n\geq 0} H^n(g) \quad \leftarrow \text{assolutamente convergente.}$$

ma $\|H^n(g)\| \leq \frac{1}{2}\|H^{n-1}(g)\| \cdots \leq \frac{\|g\|}{2^n}$.

Teorema (di divisione di Weierstrass)

Sia ϕ come prima.

$\forall f \in \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$ $\exists!$ scrittura del tipo:

$$f = \phi\cdot g + \sum_{i=0}^{N-1} h_i(z_1,\dots,z_{n-1})\cdot z_n^i$$

Dim:

Supponiamo $f, \phi \in B_R$, e che $V : B_R \xrightarrow{\sim} B_R$.

Sappiamo che $\exists!$ $g \in B_R$ t.c. ~~$f = V(g) = L(\phi\cdot g)$, ma~~

$\cancel{f - \phi g = L(\phi g) - \phi g}$ $\quad V(g) = L(f)$

$$\begin{matrix} V(g) \\ \shortparallel \\ L(\phi g)\end{matrix}$$

quindi $L(f - \phi g) = 0 \iff f - \phi g = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(z_1,\dots,z_{n-1})\, z_n^i$.

Così abbiamo l'esistenza. Per l'unicità si ha che

$\cancel{0 = \phi(g-g') + (r-r')}$ se $f = \phi\cdot g' + r'$

allora $L(f) = L(\phi g') = V(g') \Rightarrow g = g' \Rightarrow r = r'$. ∎

Geometria algebrica

14/03

Def:
$\phi \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ si dice uno pseudo-polinomio di grado N in z_n se $\phi(0, \dots, 0, z_n) = c z_n^N + \sum_{i > N} a_i z_n^i$, $c \neq 0$.

Teorema (di divisione)
ϕ pseudo-polinomio di grado N in z_n. Allora $\forall f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ si scrive in modo unico come:
$$f = \phi \cdot g + \sum_{i=0}^{N-1} h_i(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^i \quad, h_i \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}.$$

Teorema (di preparazione)

Def:
ϕ si dice un polinomio di Weierstrass di grado N in z_n se
$$\phi = z_n^N + \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^i \quad, \phi_i(0) = 0 \ \forall i.$$

ϕ pseudo-polinomio di grado N. Allora $\exists !$ W polinomio di Weierstrass di grado N ed una funzione $e(z_1, \dots, z_n)$ olomorfa e invertibile ($e(0) \neq 0$) tale che:
$$\cancel{\phi = W \cdot e} \quad W = \phi \cdot e$$

Dim:
Per il teorema di divisione
$$z_n^N = \phi \cdot e + \sum_{i=0}^{N-1} h_i(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^i$$
mettiamo $z_1 = \dots = z_{n-1} = 0$.
Allora $z_n^N = (\underset{\neq 0}{c} z_n^N + \dots) \underset{e(0) \neq 0}{e(0, z_n)} + \sum_{i=0}^{N-1} \underset{0}{h_i(0)} \cdot z_n^i$

Da cui $\phi \cdot e = z_n^N - \sum h_i z_n^i$

Per l'unicità

$z_n^N = \phi \tilde{e} + \text{resto} \Rightarrow$ l'unicità della divisione implica $e = \tilde{e}$ e resto = resto.

$\phi e = z_n^N - \sum_{i<N} h_i z_n^i$
$k \tilde{e} = z_n^N - \sum_{i<N} \tilde{h}_i z_n^i$
$\Rightarrow \cancel{\phi(e - \tilde{e}) = \sum_{i<N} (h_i - \tilde{h}_i) z_n^i}$

Proviamo per induzione su n che $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$ è a fattorizzazione unica.

$n=0$ banale.

<u>Lemma di Gauss</u>

Se A è un dominio a fatt. unica $\Rightarrow A[x]$ lo è.

Allora $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{n-1}\}[z_n] =: A$ esso è a fatt. unica per ipotesi induttiva. $\cap$ $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\} =: B$

<u>Lemma 1</u>

Sia $f \in A$ un polinomio di Weierstrass, $g \in A$. ipotesi fondamentale

Se $f | g$ in $B \Rightarrow f | g$ in A.

(Esempio $f = z_{n+1}$, $g = 1$ $\Rightarrow \frac{1}{1+z_n} \notin A$) NO Weier.

<u>Dim</u>:

$f = z_n^N + \sum_{i<N} f_i(z_1,\dots,z_{n-1}) z_n^i$

$g = \sum_{i\leq M} g_i(z_1,\dots,z_{n-1}) z_n^i = f \cdot h \quad , h \in B$

Allora $h = \sum_i h_i(z_1,\dots,z_{n-1}) z_n^i$. Voglio mostrare che $h_i \equiv 0 \ \forall i > M$.

Supponiamo per assurdo che non sia così:

<u>Def</u>:

Sia $f \in \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$, $f = \sum_{i\geq 0} f_i$, f_i polinomio omogeneo di grado i

Allora $V(f) = \min\{i \mid f_i \neq 0\}$. (se $f \neq 0$) (se $f=0$ $V(f) := \infty$)

Allora $\exists j > M-N$ t.c. $V(h_j) \leq V(h_s) \ \forall s > j$.

Guardiamo i coefficienti di z_n^{N+j} in $g = f \cdot h \quad (N+j > M)$

$$\Rightarrow \quad 0 = 1 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ V(h_j)}}{h_j} + \sum_{i<N} \underset{\substack{\Downarrow \\ > V(h_{N+j-i}) \\ \Downarrow \\ > V(h_j)}}{f_i \cdot h_{N+j-i}} \quad \Rightarrow \underline{\text{ASSURDO}}$$

<u>Lemma 2</u>: $z_n^N + \sum_{i} h_i z_n^i$

Supponiamo che f sia un polinomio di Weierstrass.
Allora f è irriducibile in $A \iff$ è irriducibile in B.

<u>Dim.</u>:

($\Rightarrow$)

supp. $f = g_1 \cdot g_2$, $g_1, g_2 \in B$

$f(0, z_n) = z_n^N = g_1(0, z_n)\, g_2(0, z_n) \Rightarrow$ sia g_1, g_2 sono pseudopolinomi.

allora applico il teorema di preparazione:

$$g_1 = e_1 \cdot w_1 \quad , \quad g_2 = e_2 \cdot w_2$$

dove e_i invertibili, w_i Weierstrass.

Così ottengo che $f = \underset{\Downarrow}{(w_1 \cdot w_2)} \cdot (e_1 \cdot e_2)$, ma per l'unicità

dec. di f in A.

della preparazione si ha $\overset{\text{Weier.}}{w_1 w_2} = \overset{(uu)}{f}$ ed $e_1 e_2 = 1$.

Ma f è irr. in A, allora o $w_1(0) \neq 0$ o $w_2(0) \neq 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$g_1(0) \neq 0 \qquad g_2(0) \neq 0$$

($\Leftarrow$)

Supponiamo che $g_1, g_2 \in A$ ed $f = g_1 \cdot g_2$, ma f è irr. in B

$\Rightarrow$ nec. $g_1(0) \neq 0$ o $g_2(0) \neq 0$, ~~[illegible]~~

$f(0, z_n) = z_n^N = g_1(0, z_n)\, g_2(0, z_n) \Rightarrow g_1(0, z_n) = z_n^a$, $a + b = N$
$g_2(0, z_n) = z_n^b$

$\Rightarrow \deg g_1 + \deg g_2 = N$ (pensati come polinomi in z_n)

d'altra parte $\deg g_1 \geq a$, $\deg g_2 \geq b$ $\Rightarrow$ $\deg g_1 = a$, $\deg g_2 = b$ $\Rightarrow$ g_1, g_2 sono di Weierstrass.

<u>Nota</u>: scomposizione di un Weierstrass è Weierstrass.

$\Rightarrow$ per il lemma 1 $g_1 | 1$ in $B \Rightarrow g_1 | 1$ in A.

Sia ora $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \neq 0$.

supp. $V(f) = m \Rightarrow f = f_m +$ grado superiore, $f_m \neq 0$.

a meno di un cambio lineare di coordinate posso supp. che $f_m(0, \dots, 0, 1) \neq 0$ ~~a meno di moltiplicazioni~~.

~~per~~ $\overset{\shortparallel}{c}$

Ora $f(0, \dots, 0, z_n) = c z_n^m +$ gradi superiori.

A meno di moltiplicare f per un invertibile, posso supporre che f sia un polinomio di Weierstrass.

$$f = z_n^m + \sum_{i<m} h_i z_n^i \quad , h_i(0) = 0.$$

In particolare $f \in A$. Per hp. induttiva A è UFD.

Allora $f = g_1 \cdots g_k$, $g_i \in A$ sono irriducibili.

ora $\sum_i \deg g_i = m \Rightarrow$ che ogni g_i è di Weierstrass.

Quindi g_i è irriducibile in B.

<u>Unicità</u>: per esercizio. $\boxtimes$

<u>Prop</u>:

Sia $f(z_1, \dots z_n) \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ con $f(0) = 0$. Inoltre $\frac{\partial f(0)}{\partial z_n}(0) \neq 0$.

Allora $\exists\ \psi(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ tale che $\psi(0) = 0$

$f(z_1, \dots, z_{n-1}, \psi) \equiv 0$.

<u>Dim</u>:

Dalle ipotesi si evince che f è uno pseudo polinomio di grado 1 in z_n. Applico il teorema di preparazione in modo da avere $f \cdot e = z_n - \psi(z_1, \dots, z_{n-1})$, quindi $f(z_1, \dots, z_n) = 0 \iff z_n = \psi(z_1, \dots, z_{n-1})$.

Sia $U \subset \mathbb{C}^n$, $V \subset \mathbb{C}^n$ aperti.

Def: $F : U \longrightarrow V$ è olomorfa se lo sono tutte le sue componenti.

$F = (F_1, \dots, F_n)$. F olomorfa $\Leftrightarrow$ F_i è olomorfa $\forall\, i$.

Teorema (di invertibilità locale)

$0 \in U \subset \mathbb{C}^n \xrightarrow{F=(f_1,\dots,f_n)} V \subset \mathbb{C}^n$, se $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right) \neq 0$

$\Rightarrow F$ è loc. invertibile. (Supp. $F(0)=0$)

Dim: (Idea)

Passo 1: supp. $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right) = Id$

$z_1, \dots, z_n$ coord. su U.

$y_1, \dots, y_n$ coord. su V.

Allora F è data da:

$$(*)\quad \begin{cases} y_1 - f_1(z_1,\dots,z_n) = 0 \\ \vdots \\ y_n - f_n(z_1,\dots,z_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & (*) \arrow[d] & \\ & \Gamma \subset U \times V \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ U & & V \end{tikzcd}$$

dato che $\frac{\partial f_n}{\partial z_n}(0) = 1 \Rightarrow y_n - f_n(z_1,\dots,z_n)$ è uno pseudopolinomio di primo grado in z_n. Preparo e viene fuori che

$(y_n - f_n(z))\,e = z_n - g_n(z_1,\dots,z_{n-1},y_n)$

Quindi $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} y_1 - f_1(z_1,\dots,z_{n-1}, g_n(z_1,\dots,y_n)) = 0 \\ \vdots \\ z_n - g_n(z_1,\dots,z_{n-1},y_n) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y_1 - g_1(z_1,\dots,z_{n-1},y_n) = 0 \\ \vdots \\ \dots = 0 \end{cases}$$

e proseguo...

Teorema (di estensione di Riemann)

$U \subset \mathbb{C}^n$ aperto

$Z \subset U$ chiuso con la proprietà che: (tali Z si chiamano analitici)

Z è localmente luogo di zeri di una f.ne olomorfa $\not\equiv 0$.

i.e. $\forall x \in U \; \exists \Delta(x,r)$, $f \in \mathcal{O}(\Delta(x,r))$ $f \not\equiv 0$ t.c. $Z \cap \Delta = \{f=0\}$

Allora se $g \in \mathcal{O}(U \setminus Z)$ ed g è limitata, essa si estende a tutto U in modo olomorfo.

Dim:

Per il principio d'identità basta mostrare il teorema localmente.

Esercizio (dimostrare che Z non sconnette U)

Cioè basta mostrare che $\forall x \in Z \; \exists \Delta(x,r) \subset U$ dove g si estende. (perchè $\Delta \setminus Z$ è connesso)

Supp. $x=0$. Supp. che in un intorno di 0 Z sia luogo di zeri di f olomorfa. A meno di un cambio lineare di coordinate posso supporre che f sia un polinomio di Weierstrass in z_n. $f = z_n^N + \sum_{i<N} h_i(z_1, \dots z_{n-1}) z_n^i$.

Quindi $Z \cap \{z_1 = \dots = z_{n-1} = 0\} = \{0\}$ (è un punto isolato)

Sia $r^{(r_1, \dots, r_n)}$ un poliraggio suff. piccolo t.c. $\overline{\Delta(0,r)} \subset U$. Inoltre $Z \cap \{z_1 = \dots = z_{n-1} = 0, \; |z_n| \leq r_n\}$.

Ora a meno di restringere $r_1, \dots, r_{n-1}$ posso fare in modo che le funzioni $|h_i|$ siano molto piccole in Δ.

$\Rightarrow Z \cap \{|z_n| = r_n\} = \phi$. g olomorfa in $U \setminus Z$.

se prendo $z \in \Delta(0,r) \Rightarrow$ definiamo $l(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_n} \frac{g(z_1, \dots z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} d\xi$

$l(z)$ è olomorfa e coincide con g su $\Delta \setminus Z$.

(Analogo ad una variabile). ∎

Def:

X è una varietà topologica di dimensione n se:

1) X sp. topologico di Hausdorff
2) $\exists$ ricoprimento aperto $X = \cup U_i$, dove ogni U_i è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$;
3) X paracompatto.

Teorema:

Se valgono 1, 2, allora la condizione 3 è equivalente a dire che ogni componente connessa di X è a base num.

- **Paracompattezza:** (Un po' meno della compattezza)

Def:

X sp. top. si dice paracompatto se $\forall$ ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $\exists$ un raffinamento loc. finito.

Dim (Teorema $\Leftarrow$) (nel caso di $\mathbb{R}^n$).

Esempio:

$U \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow U$ è paracompatto.

Abbiamo già visto che $U = \bigcup_{n \geq 0} K_n$, K_n compatti con la proprietà che $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$.

Sia $U = \bigcup_i U_i$, U_i aperti (cioè un ricoprimento)

vogliamo trovare un raff. loc. finito.

$\forall n$ $\exists$ finiti $U_{i_1}^n, \dots, U_{i_n}^n$ t.c. $K_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}^n$.

Ad ognuno di questi aperti $U_{i_k}^n$ associo $V_{i_k}^n := U_{i_k}^n \cap (\mathring{K}_{n+1} \setminus K_{n-1})$.

Tesi: $\{V_{i_k}^n\}$ è un raffinamento localmente finito di U.

1) raffinamento ok (nel senso che i $\subset$ sono finiti)
2) ricoprimento: $p \in X$, $p \in K_n \setminus K_{n-1} \Rightarrow p \in \bigcup V_{i_k}^n$
3) loc. finito: $p \in A = \mathring{K}_{n+1} - K_n$ che interseca solo $V_x^n, V_{x_1}^{n+1}, V_x^{n+2}$ (che sono finiti

Def.

X var. top. di $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$.

Un atlante olomorfo su X:

- $X = \bigcup_i U_i$ ric. aperto;
- $\forall i \ \exists\, \phi_i : U_i \longrightarrow V_i \subset \mathbb{C}^n$ aperto, omeomorfismo;
- $\forall i,j$

$$\begin{tikzcd} & U_i \cap U_j =: U_{ij} \arrow[dl, "\phi_i"'] \arrow[dr, "\phi_j"] & \\ \phi_i(U_{ij}) & & \phi_j(U_{ij}) \arrow[ll, "\exists!\, \varphi_{ij}"'] \end{tikzcd}$$

tutte le φ_{ij} sono <u>olomorfe</u>.

$$\boxed{\text{Def: (Nervo del ricoprimento)} \quad N \subset \bigsqcup_{n>0} I^n \ \text{ e } \ (i_1,\dots,i_k)\in N \iff U_{i_1,\dots,i_k} \neq \emptyset}$$

<u>Oss</u>: ("$\varphi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$")

1) φ_{ii} è l'identità.

2) $\varphi_{ij}\circ\varphi_{ji}$ è l'identità.

$\Rightarrow$ le φ_{ij} sono biolomorfe (con l'inversa olomorfa).

3) $\varphi_{jk}\circ\varphi_{ik}^{-1}\circ\varphi_{ij} = id$. (relazione di cociclo)

"cociclo"

$$\| $$

$$\cancel{\phi_k\circ\phi_j^{-1}}\ \phi_j\circ\phi_k^{-1}\circ\left(\phi_i\circ\phi_k^{-1}\right)^{-1}\circ\phi_i\circ\phi_j^{-1} = id$$

- Sia X con atlante olomorfo (U_i, ϕ_i)

$\Downarrow$

$\forall\, U \subset X$ aperto $\rightsquigarrow \mathcal{O}_X(U)$ anello delle funzioni olomorfe su U.

Come è definito:

1) $\mathcal{O}_X(U) \subset C^0(U, \mathbb{C})$ sottoanello;

$U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ continua. $f \in \mathcal{O}_X(U) \iff f \circ \Phi_i^{-1}$ è olomorfa $\forall$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & \mathbb{C} \\ U \cap U_i \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, "f|_{U \cap U_i}"] \arrow[d, "\Phi_i"] & \\ \mathbb{C}^n \supset V \text{ aperto} \arrow[uur, bend right, "f \circ \Phi_i^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

(la definizione è ben posta)

a priori la def. dipende dall'atlante scelto.

Def:
- Due atlanti si dicono equivalenti se definiscono gli stessi sottoanelli $\mathcal{O}_X(U)$.

<u>Varietà complessa</u>:

X var. top. con una classe di equivalenza di atlanti.

Proprietà di $\mathcal{O}_X : \{\text{aperti di } X\} \longrightarrow$ anelli

↳ fascio delle funzioni olomorfe su X (fascio strutturale)

1) Se $V \subset U \Rightarrow \exists\ r_V^U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$ restrizione;

2) $r_U^U = id$;

3) $W \subset V \subset U \Longrightarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[rr, "r_V^U"] \arrow[dr, "r_W^U"'] & \circlearrowleft & \mathcal{O}_X(V) \arrow[dl, "r_W^V"] \\ & \mathcal{O}_X(W) & \end{tikzcd}$$
commuta.

4) se $U \subset X$ aperto; $U = \bigcup_i U_i$ aperti

$f \in \mathcal{O}_X(U) \Rightarrow f = 0 \iff r_{U_i}^U(f) = 0 \quad \forall i$.

5) $U = \bigcup U_i$. Supp. $\forall i$ che $\exists f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$. Allora

$\exists f \in \mathcal{O}_X(U)$ t.c. $r_{U_i}^U(f) = f_i \iff \forall i, j \quad r_{U_{ij}}^{U_i}(f_i) = r_{U_{ij}}^{U_j}(f_j)$:

Def: (X sp. top.)

$\mathcal{F} : \{\text{aperti di } X\} \longrightarrow$ Gruppi abeliani ;

$\mathcal{F}$ si dice un prefascio se valgono 1.2.3.

Oss:

Si chiede solo che esistano r^U_V.

Se valgono 4.5. $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ è chiamato un fascio.

Esempi:

X sp. top. , G gruppo abeliano.

fascio su X $\quad \mathcal{G} : \{\text{aperti di } X\} \longrightarrow$ gruppi abeliani

t.c.: $\mathcal{G}(U) = \{ f : U \to G \text{ loc. costante} \}$

è un fascio su X, r^U_V = restrizioni usuali.

Esempio: (Fascio grattacielo).

Sia $p \in X$, G un gruppo abeliano.

Definiamo $\mathcal{F}(U) = \begin{cases} G & \text{se } p \in U \\ 0 & \text{se } p \notin U \end{cases}$

$r^U_V = \begin{cases} id_G & \text{se } p \in V \\ 0 & p \notin V. \end{cases}$

Esempio: X varietà complessa.

fascio delle funz invertibili: $\mathcal{O}^*_X(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{C} \text{ olomorfe}, \ f(x) \neq 0 \ \forall x \in U \right\}$ ← gruppo abeliano con la moltiplicazione

Esempio:

$\forall\ U \subset X$ aperto, $S_U \subset \mathcal{O}_X(U)$ non divisori di 0 ($\neq 0$ su ogni componente di U connessa)

Definiamo $\mathcal{D}_X : \{\text{aperti di } X\} \longrightarrow \{\text{gruppi abeliani}\}$

$$\mathcal{D}_X(U) = S_U^{-1}\mathcal{O}_X(U) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in \mathcal{O}_X(U) \\ g \in S_U \end{array} \right\}$$

quest'ultimo è solo un prefascio, ma non è un fascio. Infatti siano $U \subset V$ aperti.

$g \in S_V$. Sia V' una componente connessa di V.

V' è aperto. Inoltre $V' \subset U'$ una comp. connessa di U.
inclusione di aperti

$$g|_{U'} \not\equiv 0 \overset{\text{p.id.}}{\Longrightarrow} g|_{V'} \not\equiv 0 \quad (g|_V \in S_V).$$

Allora $r^U_V : D_X(U) \longrightarrow D_X(V) \Rightarrow D_X$ è un prefascio.

$$\frac{f}{g} \longrightarrow \frac{f|_V}{g|_V}$$

Se $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \Rightarrow D_X$ non è un fascio.

- $[t_0, t_1]$ coord. omogenee su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \underset{t_0 \neq 0}{U_0} \cup \underset{t_1 \neq 0}{U_1}$ (atlante)

$\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}_z$, $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}_x$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}$ (Liouville)

$$\begin{cases} \phi_0([t_0, t_1]) = \frac{t_1}{t_0} = z \\ \phi_1([t_0, t_1]) = \frac{t_0}{t_1} = x = \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (X complessa, connessa, compatta) $\Rightarrow \mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$.

<u>Dim</u>:

$f \in \mathcal{O}_X(X)$, X cpt $\Rightarrow \exists\, p \in X$ t.c. $|f(p)| \geq |f(x)| \;\forall x \in X$.

Sia $p \in U$ aperto piccolo connesso $\Rightarrow U \simeq V \subset \mathbb{C}^n$ (carta locale)

$$\begin{tikzcd} p \in U \subset X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \supset V \arrow[ur, "g = f \circ \phi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow |g(p)| \geq |g(x)| \;\forall x \in V \Rightarrow$ per il principio del massimo $g = \text{cost}$.

$\Rightarrow f$ costante su X. ∎

Quindi $D_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}$. Consideriamo ora

$f_0 = \frac{z}{1} \in D_X(U_0)$, $f_1 = \frac{1}{x} \in D_X(U_1) \Rightarrow f_0|_{U_{01}} = f_1|_{U_{01}}$

$\Rightarrow$ se $D_{\mathbb{P}^1}$ fosse un fascio $\exists\, f \in D_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$ t.c. $f|_{U_0} = z$, $f|_{U_1} = \frac{1}{x}$ ASS

21/03

Geometria algebrica

Prefascio: X sp. top.

$\mathcal{F} : \{\text{aperti di } X\} \longrightarrow$ Gruppi abeliani (funtore controvariante)

$\forall\, U \subset V \subset X$ aperti $\quad r^V_U : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ (pensando all'es. delle funzioni)

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s \longmapsto s|_U$

t.c.:

0) $\mathcal{F}(\phi) = 0$;

1) $U \subset V \subset W$, $s \in \mathcal{F}(W)$ $\quad s|_U = (s|_V)|_U$;

2) $r^U_U = id$.

Morfismi di prefasci:

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ prefasci su X.

$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo se è dato $\forall\, U \subset X$ un morfismo di gruppi $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ tale che commuti con le restrizioni.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "r^U_V"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r^U_V"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Esempio:

X var. complessa.

$\mathbb{Z}$ = funzioni da $U \to \mathbb{Z}$ loc. costanti;

$\mathcal{O}_X$ = funzioni olomorfe;

$\mathcal{O}^*_X$ = funzioni olomorfe invertibili.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2\pi i"] \arrow[rr, bend left, "1"] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\exp"] & \mathcal{O}^*_X
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}_X(U) \ni f \longrightarrow \exp(f) \in \mathcal{O}^*_X(U)$$

Def:

$\mathcal{F}$ prefascio è un fascio se:

3) $U = \bigcup_i U_i$, $s \in \mathcal{F}(U) \Rightarrow s = 0 \iff s_{|U_i} = 0 \ \forall i$.

4) Dati $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $\exists\, s \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $s_{|U_i} = s_i \iff s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}$.

Def:

$\mathcal{F}$ fascio, allora $\mathcal{F}(U) =:$ sezioni di $\mathcal{F}$ su $U =: \Gamma(U, \mathcal{F})$.

Def:

Un morfismo di fasci è un morfismo a livello di prefasci.
(I fasci sono una sottocategoria piena dei prefasci).

Def:

$\mathcal{F}$ prefascio su X. Sia $p \in X$. Definiamo $\mathcal{F}_p$ (gruppo abeliano) "la spiga di $\mathcal{F}$ in p", t.c.:

$$\mathcal{F}_p = \{(U,s) \mid p \in U, s \in \mathcal{F}(U)\} /_{\sim} \quad \text{con } (U,s) \sim (V,r) \text{ se}$$

$\exists\, p \in W \subset U \cap V$ t.c. $s_{|W} = r_{|W}$. (analogamente ai germi)

Oss:

$\mathcal{F}$ fascio. Allora $\mathcal{F} = 0 \iff \mathcal{F}_p = 0 \ \forall p$.

Dim:

($\Rightarrow$) ovvio;

($\Leftarrow$) sia U aperto e supponiamo $\mathcal{F}_p = 0 \ \forall p \in U$. Consideriamo $s \in \mathcal{F}(U)$, $\forall p$ s definisce $s_p \in \mathcal{F}_p$ che per ipotesi è nullo.
Allora $\exists\, W_p$ t.c. $s_{|W_p} = 0$, quindi per la proprietà 3) $s = 0$.

Oss:

$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morf. di prefasci. Allora $\forall p \in X$ φ induce $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ (omomorfismo di gruppi).

Dim

Basta porre $\varphi_p((U,s)) = (U, \varphi_U(s))$ ed è ben definito.

<u>Def</u>:

Supp. che $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sia un morfismo di fasci.

Allora φ si dice:

1) iniettivo se $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ è iniettivo $\forall p \in X$;

II) surgettivo se $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ è suriettivo $\forall p \in X$.

<u>Lemma</u>:

$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo di fasci.

1) φ è iniettivo $\iff \varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è iniettivo $\forall U \subset X$;

2) φ è bigettivo $\iff \varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è bigettivo $\forall U \subset X$.

φ bigettivo si dice "<u>isomorfismo</u>".

<u>Oss</u>: (la suriettività non funziona)

<u>Esempio</u>: $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Prendiamo $\varphi = \exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$.

1) φ è surgettivo

2) $\varphi : \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ non è surgettivo.

per 2) basta notare che z non ha log.

Sia ora $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $s \in \mathcal{O}_{X,p}^*$ $\Rightarrow s = (U, s)$, $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aperto ed $s \in \mathcal{O}_X(U)$ non nulla. A meno di restringere U, posso supporre $U = \Delta(p, r) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Δ è semplicemente connesso e quindi ammette un logaritmo, i.e. $\exists \log s \in \mathcal{O}_X(\Delta)$.

<u>Dim</u> (Lemma)

(1 $\Rightarrow$) Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $\varphi_U(s) = 0$. Allora $\forall p \in U$ abbiamo che:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] & h \arrow[d] \\ \mathcal{F}_p \arrow[r, "\varphi_p"'] & \mathcal{G}_p & h_p \end{tikzcd}$$

$$\varphi_U(s)_p = 0$$
$$\overset{\|}{\varphi_p(s_p)} \Rightarrow s_p = 0 \Rightarrow s|_{W_p} = 0, \; W_p \text{ aperto.} \Rightarrow s = 0 \text{ per le proprietà di fascio.}$$

(1) $\Leftarrow$)

Supponiamo per assurdo che $\exists\, p \in X$ t.c. φ_p non iniettivo. Allora $\exists\, \overset{\neq}{\underset{\circ}{s}} \in \mathcal{F}_p$ t.c. $\varphi_p(s)=0$, quindi a livello di rappresentanti $\exists\, (U,s) \in \mathcal{F}_p$

$$\begin{gathered}(U,s) \in \mathcal{F}_p \\ \downarrow \varphi_p \\ (U, \varphi_U(s)) \sim (U,0)\end{gathered}$$

a meno di restringere U posso supporre $\varphi_U(s)=0 \Rightarrow \varphi_U$ non è iniettiva.

Esercizio:

$\varphi_p = 0 \ \forall p \iff \varphi_U = 0 \ \forall U$.

(2) $\Leftarrow$) ovvio.

(2) $\Rightarrow$) basta mostrare che se φ_p è bigettiva $\forall p \Rightarrow \varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è suriettiva.

Sia $s \in \mathcal{G}(U)$. Usando φ_p suriettivo $\forall p$, $\exists\, h_p \in \mathcal{F}_p$ t.c. $\varphi_p(h_p) = s$ (punto per punto). Equivalentemente $\exists\, V_p,\ h_p \in \mathcal{F}(V_p)$ t.c. $\varphi_{V_p}(h_p) = s|_{V_p}$.

Siano adesso $p,q \in U$ e sia $h_p - h_q \in \mathcal{F}(V_p \cap V_q)$, ma $\varphi_{V_p \cap V_q}(h_p - h_q) = s - s = 0$, uso l'iniettività, e quindi $h_p = h_q$ in $V_p \cap V_q$

Allora, dalle proprietà di fascio, esiste h t.c. $h|_{V_p} = h_p$ e $\varphi_U(h) = s$. $\blacksquare$

Def:

$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo di fasci.

Ker φ è un fascio t.c. $\operatorname{Ker}\varphi(U) = \operatorname{Ker}\left(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\right)$.

Esercizio: Verificare che è un fascio.

Sia ora $\mathcal{F}$ un prefascio, gli abbiamo associato $\mathcal{F}_p$, $p \in X$. Possiamo considerare $\dot{\bigsqcup}_{p\in X} \mathcal{F}_p \xrightarrow[\pi]{\text{proiezione}} X$ (etale spazio). E possiamo costruire il fascio $\mathcal{F}^+$ definito come:

fascio associato al prefascio $\mathcal{F}$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}^+(U) = \left\{ s : \begin{array}{l} U \to \dot{\bigsqcup} \mathcal{F}_p \\ p \mapsto s_p \in \mathcal{F}_p \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} s \text{ è "continua", i.e. } \forall p \in U\ \exists\, W_p^{\text{ap}} \\ \pi \circ s = \mathrm{Id}_U;\quad \exists\, r \in \mathcal{F}(W) \text{ t.c. } r_q = s_q \end{array} \right.$

Oss:

$\mathcal{F}^+(U)$ è un gruppo abeliano.

<u>Prop</u>: (ovvia)
$\mathcal{F}^+$ è un fascio.

In generale $\exists$ un morfismo naturale di prefasci:

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$$
$$\mathcal{F}(U) \ni s \longrightarrow s : U \longrightarrow \bigsqcup \mathcal{F}_p$$
$$p \longrightarrow s_p$$

<u>Oss</u>:
Se $\mathcal{F}$ è un fascio, l'applicazione precedente è un isomorfismo.

<u>Def</u> (alternativa di $\mathcal{F}^+$)
$U \subset X$ aperto. $\mathcal{F}^+(U) := \left\{ \{(V_i, s_i)\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \bigcup V_i = U,\ s_i \in \mathcal{F}(V_i) \\ \forall\, i,j \text{ e } \forall p \in V_i \cap V_j\ \exists\, p \in W \subset V_i \cap V_j \text{ t.c. } \\ s_{i|W} = s_{j|W} \end{array} \right.$

<u>Def</u>:
$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo di fasci. Naturalmente $\forall U \subset X$ aperto si ha $\varphi(\mathcal{F}(U)) \subset \mathcal{G}(U)$. (In generale è un prefascio, ma non un fascio: ricordare l'esempio dell'esponenziale)
Definiamo il fascio $\operatorname{Im}\varphi$ come il fascificato del prefascio precedente.
Analogamente possiamo definire il fascio $\operatorname{coker}\varphi$ come il fascificato di $\mathcal{G}/\varphi(\mathcal{F})$ t.c. $\forall U$ vale $\mathcal{G}(U)/\varphi(\mathcal{F}(U))$.

<u>Def</u>:
Supponiamo di avere una succ. di morfismi di fasci:

$$(*) \qquad \dots \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_3 \longrightarrow \dots$$

essa induce una successione a livello di spighe:

$$(*_p) \qquad \dots \longrightarrow \mathcal{F}_{1,p} \xrightarrow{\varphi_{1,p}} \mathcal{F}_{2,p} \xrightarrow{\varphi_{2,p}} \mathcal{F}_{3,p} \longrightarrow \dots$$

$(*)$ si dice esatta $\iff$ $(*_p)$ è esatta $\forall p$.

Geometria algebrica (8 pagine) 25/03

Avevamo visto:

Dato $\mathcal{F}$ un prefascio su X sp. top. possiamo associargli $\forall p \in X$ lo "spazio delle spighe" $\mathcal{F}_p$.
E inoltre dato $\mathcal{F}$ possiamo associargli $\mathcal{F}^+$ (fascio associato ad $\mathcal{F}$). Ricordiamo come:

$\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}'$ "fascio delle sezioni discontinue" t.c.
se $U \subset X$ è un aperto: $\mathcal{F}'(U) = \{ s : U \to \dot{\bigsqcup_{p \in U}} \mathcal{F}_p \mid s(p) \in \mathcal{F}_p \}$
naturalmente $\mathcal{F}'(U)$ è ancora un gruppo abeliano. (con le ovvie operazioni), inoltre è un fascio.

Oss:
$\mathcal{F}'$ è fiacco, i.e., $\forall U \overset{\text{aperto}}{\subset} X$ si ha che la restrizione
$$\mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$
è suriettiva. (dove $\mathcal{G}$ è un fascio su X)

Allora abbiamo definito $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}'$ in modo che:
$s \in \mathcal{F}^+(U)$ se s è "continua", i.e., $\forall p \in U \ \exists V_p$ aperto ed $\exists \tilde{s} \in \mathcal{F}(V_p)$ t.c. $s(q) = \tilde{s}_q \ \forall q \in V_p$.

Oss:
$$\forall U \ \exists \ \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}'(V)$$
$$s \longmapsto (U, s) \in \mathcal{F}_p \ \forall p.$$
cioè $\exists$ un morfismo naturale di prefasci $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$.

Proprietà universale di $\mathcal{F}^+$:

Dato $\mathcal{F}$ prefascio $\exists \ \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ morfismo tale che:
1) $\mathcal{F}^+$ è un fascio;

(

2) $\forall\ \psi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ morfismo, $\mathcal{G}$ fascio, allora $\exists !\ \tilde{\psi}: \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ morfismo che fa commutare

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathcal{F}^+ \arrow[rr, "\tilde{\psi}"] & & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Oss:
come al solito la proprietà universale garantisce l'unicità. Infatti siano

$$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$$
$$\tilde{\varphi}: \mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}^+$$

aventi la proprietà universale, allora:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \\ \mathcal{F}^+ \arrow[rr, bend left, "\tilde{\varphi}^+"] & & \tilde{\mathcal{F}}^+ \arrow[ll, bend left, "\varphi^+"] \end{tikzcd}$$

$\varphi^+\tilde{\varphi}^+ = Id_{\mathcal{F}^+}$ e $\tilde{\varphi}^+\varphi^+ = Id_{\tilde{\mathcal{F}}^+}$. Allora si ha l'isomorfismo canonico solito.

Bisogna quindi mostrare che $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}'$ ha la proprietà universale:
sia quindi $\mathcal{G}$ un fascio e $\mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$ un morfismo.
Allora $\forall\ p \in X$ viene indotto $\psi_p: \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathcal{F}' \arrow[r, "\psi'"] & \mathcal{G}' \end{tikzcd}$$

[con ψ' definito in modo ovv
se $s \in \mathcal{F}'(U) \Rightarrow \psi'(s)(p) = \psi_p(s)$

bisogna provare che:

1) $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+$

2) $\mathcal{F}^+ \xrightarrow{\psi'} \mathcal{G}^+$

mostriamo 2):
se $s \in \mathcal{F}^+(U)$ allora $\forall p \in U \ \exists V_p \subset U$, $\tilde{s} \in \mathcal{F}(V)$
t.c. $s(q) = \tilde{s}_q$, $q \in V$. Così
dà la continuità

$$\psi'(s)(q) = \psi_q(\tilde{s}_q) = \psi_V(\tilde{s})_q$$

per quanto riguarda 1):
basta far vedere che $\mathcal{G}^+_p = \mathcal{G}_p$ (ovvio dalla definizione)

<u>Riepilogo:</u>

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \text{ prefascio} & \rightsquigarrow & \mathcal{F}_p \\ \Big\downarrow\!\wr & & \\ \mathcal{F}^+ \text{ fascio e} & & \end{array}$$

$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ morfismo
con la propr. universale in modo che $\mathcal{F}_p \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+_p$

<u>Morale</u>: Gli abbiamo associato un oggetto con le stesse spighe.

<u>Esempio</u>:
X varietà complessa connessa. Consideriamo $\mathcal{O}_X$. Abbiamo il prefascio D_X (frazioni globali di $\mathcal{O}_X$):

$$D_X(U) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} g, f \in \mathcal{O}_X(U) \\ g \text{ non divide } 0 \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

con $\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \iff \exists\, h$ (non divisore di 0) t.c. $h(fg' - f'g) = 0$.

Def:

$\mathcal{M}_X := D_X^+$ viene detto "fascio delle funzioni meromorfe"

Oss.:

$\varphi \in \mathcal{M}_X(U) \iff \forall p \in U \quad \varphi_p = \frac{f_p}{g_p} \;, f_p, g_p \in \mathcal{O}_{X,p} \; g_p \neq 0$

(mi conviene vederlo così perchè $\mathcal{O}_{X,p}$ è un DFU)

inoltre se $U = \bigcup_i U_i$ si ha $\varphi = \frac{f_i}{g_i}$ $f_i, g_i \in \mathcal{O}(V_i)$.

Esempio:

Divisori di Cartier: (omologicamente banali)

Ho un morfismo iniettivo naturale

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{M}_X$$

considero il fascio quoziente (il conucleo dell'inclusione)

$\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X$ = fascio associato al prefascio $U \longrightarrow \frac{\mathcal{M}_X(U)}{\mathcal{O}_X(U)}$.

$$\left(\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X\right)_p = \frac{\mathcal{M}_{X,p}}{\mathcal{O}_{X,p}} \quad \text{(verifica)}$$

Abbiamo allora la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M}_X \longrightarrow \frac{\mathcal{M}_X}{\mathcal{O}_X} \longrightarrow 0$$

Definiamo allora:

$CaDiv(X) = \frac{\mathcal{M}_X}{\mathcal{O}_X}(X)$ sezioni globali

Funtore sezioni globali:

X sp. top. Abbiamo la categoria dei fasci su X:

$$\{\text{fasci su } X\} \xrightarrow{\Gamma(X,\cdot)} \text{gruppi abeliani}$$

esso è un funtore covariante.

Teorema:

$\Gamma(X,\cdot)$ è esatto a sinistra (e non a destra)

Cioè: per ogni successione esatta: (di fasci)

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

allora

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_X} \Gamma(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_X} \Gamma(X,\mathcal{H})$$

è esatta.

Terminologia generale.

Se $\eta : \{\text{fasci}\} \to \text{gruppi}$ funtore

η esatto se $\underbrace{\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}}_{\text{esatta}} \Rightarrow \underbrace{\eta(\mathcal{F}) \to \eta(\mathcal{G}) \to \eta(\mathcal{H})}_{\text{esatta}}$

η esatto a dx se $\underbrace{\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0}_{\text{esatta}} \Rightarrow \underbrace{\eta(\mathcal{F}) \to \eta(\mathcal{G}) \to \eta(\mathcal{H}) \to}_{\text{esatta}}$

analogamente a sinistra.

Dim (Teorema)

- Abbiamo già visto che α_X è iniettivo.
- $\beta_X \circ \alpha_X = 0$ è ovvio.
- Resta da vedere che se $s \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ e $\beta_X(s) = 0$ $\Rightarrow s \in \operatorname{Im} \alpha_X$. Infatti:

$$\beta_X(s) = 0 \iff \forall p \in X \text{ si ha } \beta_X(s)_p = 0 \iff \beta(s_p) = 0$$

cioè $s_p \in \alpha(\mathcal{F}_p)$. Quindi $\forall p \in X$ $\exists U_p \subset X$ ed $r_U \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_U = \alpha(r_U)$. Se ora considero $p \in U$, $q \in V$ si ha $\alpha(r_U - r_V) = s|_U - s|_V = 0$ (nell'intersezione), ma α è iniettivo su ogni aperto, in particolare $\alpha : \mathcal{F}(U \cap V) \to \mathcal{G}(U \cap V)$ e allora si ha $r_U = r_V$ in $U \cap V$ e così posso costruire $r \in \mathcal{F}(X)$ t.c. $\alpha(r) = s$.

Esempio (non esattezza a destra) X connesso

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0$$

applicando $\Gamma(X, \cdot)$ otteniamo:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\exp} \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) \to ?$$

non è suriettiva in generale

vorremmo riuscire a descrivere "?".

Coomologia dei fasci:

Data $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ esatta.

Possiamo costruire una successione esatta lunga fatta come:

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{H}) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \to \cdots$$

la cosa interessante è che quest'oggetto dipende solamente da X e da $\mathcal{F}$. Tornando all'esempio precedente:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \to \Gamma(X,\mathcal{O}_X^*) \to \underbrace{H^1(X,\mathbb{Z})}_{= \mathrm{Hom}(\pi_1,\mathbb{Z})} \to \cdots$$

Quindi se X è semplicemente connesso ritroviamo $\cdots = 0$

Risoluzione canonica:

- X sp. top. $\mathcal{F}$ fascio

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' = \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0/\mathcal{F} =: \mathcal{H}_0 \to 0 \quad \text{esatta}$$

(= conucleo dell'inclusione)

$$0 \to \frac{\mathcal{F}_0}{\mathcal{F}} \to \left(\frac{\mathcal{F}_0}{\mathcal{F}}\right)' = \mathcal{F}_1 \to \mathcal{H}_1 \to 0$$

$$0 \to \mathcal{H}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{H}_2 \to 0$$

Ora abbiamo:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to \cdots$$ è esatta per costruzione.

tutto fa schifo, ma tutto è ben definito.

A tale succ. corrisponde:

$$\Gamma(X, \mathcal{F}_0) \xrightarrow{d_0} \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{d_1} \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \dots$$

e definisco: $H^i(X, \mathcal{F}) = \dfrac{\operatorname{Ker} d_i}{\operatorname{Im} d_0}$

Terminologia:

Diciamo che un fascio $\mathcal{F}$ e' aciclico se $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$. ($i > 0$)

Oss:

$H^0(X, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker} d_0$

Usando che $\Gamma(X, \cdot)$ è esatto a sinistra otteniamo:

$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_0) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \dots$ è esatta

allora $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Esempio:

$X = \mathbb{C}^n, \mathbb{P}^n$. Allora $\mathcal{O}_X$ e' aciclico.

Geometria algebrica:

Esempi:

$\mathbb{C}^n/\Gamma$ $\qquad \Gamma \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ reticolo $\left[\begin{array}{l}\text{sottogruppo generato da} \\ 2n \text{ vettori l.i su } \mathbb{R}\end{array}\right]$

esso viene chiamato toro complesso in quanto naturalmente è diffeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$.
Se $n=1$ il suo nome particolare è "curva ellittica".
Se $n \geq 2$ succede "quasi sempre" non ci sono funzioni meromorfe, cioè $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n/\Gamma) = \mathbb{C}$.

Teorema (Siegel) [Anticipazione]
Sia X una var. complessa compatta. Allora:

$$\boxed{0 \leq \deg tr\, \mathcal{M}(X) \leq \dim_{\mathbb{C}} X}$$

dove $\deg tr\, \mathcal{M}(X) := \max\{k \mid \mathbb{C}[t_1,\dots,t_k] \hookrightarrow \mathcal{M}(X)\}$.

Oss:
Se X non è cpt $\deg tr\, \mathcal{M}(X)$ può essere ∞.

Oss:
Se $\deg tr\, \mathcal{M}(\mathbb{C}^n/\Gamma) = n$, allora tale varietà si dice var. abeliana.

Def:
X var. complessa. $\varphi \in \mathcal{M}(X) \iff X = \bigcup U_i$, U_i connessi, $f_i, g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tali che su $U_i \cap U_j$ si ha $\frac{f_i}{g_i} = \frac{f_j}{g_j}$ nel campo delle frazioni di $\mathcal{O}_{p,X}$.

In pratica $\varphi|_{U_i} = \frac{f_i}{g_i}$.
Bisogna vedere che non dipende dalla rappr. che ho scelto:
$\varphi \iff (U_i, f_i/g_i)$ si dice in "forma normale" se:
$\forall p \in U_i$, $\underset{\mathcal{O}_p}{\underset{\cap}{MCD}}(f_i, g_i) = 1$.

(

__Lemma:__ (__Teorema__)

Ogni φ __meromorfa__ ammette una "forma normale".

__Dim:__

Per ora in sospeso...

__Lemma:__

$f, g \in \mathcal{O}(U)$, $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Associamo $\forall p \in U$

$f \longrightarrow f_p \in \mathcal{O}_p$. Supponiamo che $MCD(f_0, g_0) = 1$.

Allora esiste $V_0 \subset U$ aperto t.c. $\forall p \in V_0$, $MCD(f_p, g_p) = 1$.

Cioè $\{p \in U \mid MCD(f_p, g_p) = 1\}$ è un __aperto__.

__Dim:__

Se $f(0) \neq 0$, f_0 è invertibile, così basta porre $V = \{p \mid f(p) \neq 0\}$.

Stessa cosa per g. Si può quindi supporre che $f(0) = g(0) = 0$.

Scegliamo ora coord. loc. $z_1, \dots, z_n$ tali che $f(0, z_n) \not\equiv 0$.

(in modo che f sia uno __pseudopolinomio__ di grado d)

Così $f(0, z_n) = c\, z_n^d + \cdots$, $c \neq 0$. Inoltre posso supp. $c = 1$.

Applicando il teorema di divisione di Weierstrass d volte:

$$\begin{cases} g = h_0 f + \sum_{i=0}^{d-1} c_{i,0} z_n^i \\ z_n g = h_1 f + \sum_i c_{i,1} z_n^i \\ \vdots \\ z_n^{d-1} g = h_{d-1} f + \sum c_{i,d-1} z_n^i \end{cases}$$

, $c_{i,j} \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ $i, j = 0, \dots, d-1$.

[ogni volta restringendo opportunamente l'aperto U].

risultante di f e g.

Definiamo $R(f, g) := \det(c_{i,j}) \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$

Laplace $\rightarrow$ $= \sum_j A_j \cdot c_{0,j}$, $A_j \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$

cofattori

Inoltre so che $\sum_j A_j \cdot c_{i,j} = 0$ se $i \neq 0$. (Per le proprietà della matrice inversa) consideriamo ora:

$$\sum_{j=0}^{d-1} A_j \left(z_n^j g - h_j f \right) = R(f,g).$$

Abbiamo mostrato che $\exists\, \beta \in \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$

$\alpha \in \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{n-1}\}[z_n]$, $\deg \alpha < d$

tali che: $\alpha \cdot g + \beta \cdot f = R(f,g) \in \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{n-1}\}$

in un intorno opportuno di 0.

A questo punto basta osservare che:

$R(f,g)_p = 0$ in $\mathcal{O}_p \iff f,g$ hanno un fattore comune in $\mathcal{O}$

~~Infatti supp. $R \equiv 0$ in $\mathcal{O}_p$. Allora $\alpha g = -\beta f$.~~

~~scriviamo $f = f_1 \cdots f_k$, f_i irriducibile.~~

~~(Osserviamo che ogni f_i deve essere uno pseudopolinomio.)~~

~~supp. per assurdo che $f_i \nmid g$ $\forall i$. Allora $f \mid \alpha$~~

($\Leftarrow$): K non invertibile e $K \mid f$, $K \mid g$ in $\mathcal{O}_p$. Allora

$$\begin{cases} K(0,z_n) \mid f(0,z_n) = z_n^d + \dots \\ K(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow K(0,z_n) = c \cdot z_n^{\delta} + \dots \quad \delta > 0$$

cioè anche K pseudopolinomio.

In particolare: $R = \alpha \tilde{g} K + \beta \tilde{f} K$, i.e. K divide R, e questo è assurdo se $R \neq 0$.

($\Rightarrow$): cons. $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}/(f) \overset{\text{per il teo. di divisione}}{=} \bigoplus_{i=0}^{d} \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{n-1}\} z_n^i$

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}/(f) \\ \downarrow \cdot g \quad \text{che è un endomorfismo} \\ \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}/(f) \end{array} \qquad \det(\cdot g) = R(g,f)$$

ma se $\det(\cdot g) = 0 \Rightarrow \cdot g$ non è iniettivo. Cioè esiste uno pseudopolinomio $0 \neq \varphi = \sum_{i=0}^{d-1} \varphi_i z_n^i$ t.c. $\varphi g \in (f) \Rightarrow f \mid \varphi g$, ma $\deg f = d$, $\deg \varphi \leq d \Rightarrow$ almeno un fattore di f divide g. □

Dim (Teorema)

Supp. $\varphi \in \mathcal{M}(X)$. Allora $\forall p \in X$ $\exists U_p \subset X$ aperto, ed esistono $f_p, g_p \in \mathcal{O}(U)$ t.c. :

1) $\dfrac{f_p}{g_p} = \varphi|_{U_p}$

2) $MCD(f_p, g_p) = 1$ in $\mathcal{O}_p$

Allora a meno di restringere U tali affermazioni sono vere ovunque.

Line bundles olomorfi (fibrati olomorfi di rango 1)

X varietà complessa.

$E \xrightarrow{p} X$ applicazione olomorfa t.c. $p^{-1}(x) \simeq \mathbb{C}^r$.

t.c. $\exists X = \bigcup U_i$ ricoprimento aperto t.c.:

1)
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[d, "p"] & U_i \times \mathbb{C}^r \arrow[l, "\varphi_i"', "\sim"] \arrow[dl] \\ U_i & \end{tikzcd}$$
, φ_i biolomorfa

2)
$$\begin{tikzcd} U_{ij} \times \mathbb{C}^r \arrow[d, "\varphi_j"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"] & \\ p^{-1}(U_{ij}) \arrow[d, "p"] & U_{ij} \times \mathbb{C}^r \arrow[l, "\varphi_i"', "\sim"] \\ U_{ij} & \end{tikzcd}$$

t.c. φ_{ij} lineare nel secondo fattore, i.e.: $z \in U_{ij}$, $v \in \mathbb{C}^r$ allora

$\varphi_{ij}(z, v) = (z, g_{ij}(z) \cdot v)$ con

$g_{ij} : U_{ij} \to M_{r \times r}(\mathbb{C})$ olomorfi invertibili

nel caso in cui $r = 1$ abbiamo un "line bundle".

In tal caso $GL_1 = \mathbb{C}^*$ che è abeliano. Ed è questo il grande vantaggio dei fibrati di rango 1.

<u>Sezione</u> di un fibrato olomorfo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] & X \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$ fibrato

s olomorfa si dice "<u>sezione</u>" se $p \circ s = Id_X$.

Vogliamo studiare le sezioni di un line bundle:

$L \xrightarrow{p} X$, rango $L = 1$. Abbiamo allora

$X = \cup U_i$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[d, "p"'] & & U_i \times \mathbb{C} \arrow[ll, "\varphi_i"'] \\ U_i \arrow[u, bend right, "s"'] \arrow[urr, "(Id, s_i)"'] & & \end{tikzcd}$$

con $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$

cambiando carte:

$$\begin{tikzcd} & U_{ij} \arrow[dl, bend right, "(Id, s_j)"'] \arrow[dr, bend left, "(Id, s_i)"] & \\ U_{ij} \times \mathbb{C} & p^{-1}(U_{ij}) \arrow[u, "p"] \arrow[l, "\varphi_j"] \arrow[r, leftrightarrow, "\varphi_i"'] & U_{ij} \times \mathbb{C} \arrow[ll, bend left, "\varphi_{ij}"] \end{tikzcd}$$

$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$

$\varphi_{ij}(x, v) = (x, g_{ij} \cdot v)$

con $g_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}^*$

$\mathcal{O}^*(U_{ij})$

e vogliamo che $\varphi_{ij}(x, s_i) = (x, s_j)$, allora si ha la relazione $\boxed{s_j = g_{ij} \cdot s_i}$

Così dare una sezione s è come dare una successione di $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tali che $s_i \cdot g_{ij} = s_j$ su $\mathcal{O}(U_{ij})$

Oss:

$L \xrightarrow{q} X$ line bundle. $s, r \in \Gamma(X, L)$.

Supp. $r \neq 0$. Allora $\frac{s}{r} \in \mathcal{M}(X)$. Infatti localmente

$s = (U_i, s_i)$, $r = (U_i, r_i)$, $\frac{s}{r} = (U_i, \frac{s_i}{r_i})$.

Ma $\frac{s_j}{r_j} = \frac{g_{ij} s_i}{g_{ij} r_i} = \frac{s_i}{r_i}$ e quindi nelle intersezioni coincidono.

Proposizione:

Ogni funzione meromorfa φ è quoziente di due sezioni di un opportuno L.

Dim:

Rappresentiamo φ come $(U_i, \frac{f_i}{g_i})$ in forma normale.

Allora su U_{ij} si ha $\frac{f_i}{g_i} = \frac{f_j}{g_j} \Rightarrow \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, infatti

sappiamo che $f_i \cdot g_j = f_j \cdot g_i$, quindi in ogni punto $f_i \mid f_j$ (dato che la forma è normale), per simmetria $f_j \mid f_i$.

Poniamo $h_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{g_i}{g_j}$.

Supponiamo ora di avere L in modo che le funzioni di incollamento $\varphi_{ij} = (Id, h_{ij} \cdot (\,))$ (si può sempre costruire un tale fibrato).

Ho allora due sezioni f, g t.c. $f = (U_i, f_i)$ poiché $f_j = h_{ij} f_i$ e $g = (U_i, g_i)$.

Geometria algebrica (7 pagine)

X varietà complessa:

- Fibrato vettoriale olomorfo:

1) $p: E \longrightarrow X$ suriettiva;
2) $\exists\ X = \bigcup U_i$ aperto ($U_i \simeq \Delta(u,r)$) t.c.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "p_r"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$ (banalizzazione locale)

3)
$$\begin{tikzcd} U_{ij} \times \mathbb{C}^r & p^{-1}(U_{ij}) \arrow[l, "\varphi_j"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi_i", "\sim"'] & U_{ij} \times \mathbb{C}^r \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ lineare su $\mathbb{C}^r$

i.e. $\varphi_{ij}(x,v) = (x, g_{ij}v)$, $g_{ij}: U_{ij} \longrightarrow GL(r,\mathbb{C})$ olomorfa
$$GL(r,\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^{r^2}$$

Esempi:

1) Fibrato banale: $E = X \times \mathbb{C}^r$, in questo caso $g_{ij} \equiv Id$;
2) Fibrato tangente: T_X;
3) Fibrato cotangente: ~~X~~ T_X^* in cui la fibra su $x \in X$ è lo span$(dz_1, \dots, dz_n)$, dove $z_1, \dots, z_n$ sono le coord. locali. (in tal caso gli aperti banalizzanti sono le carte)
4) $K_X := \Lambda^{\dim X} T_X^*$, se $\dim X = n$ esso è lo spazio delle n-forme. Esso viene chiamato "Fibrato canonico" di X. È di rango 1, infatti la sua base è $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$.

Oss:

Ad una varietà X possiamo allora associare due fibrati di rango 1 canonici: quello banale e K_X.

Def:

$K_X^{-1} := \Lambda^{top} T_X$ è detto (duale di K_X) anticanonico.

Def: (Gruppo di Picard, $Pic(X)$)

$$Pic(X) := \{\text{fibrati vett. olomorfi di rango 1 su } X\} / \text{isomorfismi}$$

dove per iso. di fibrati si intende:

$E \xrightarrow{p} X$, $F \xrightarrow{q} X$ fibrati isomorfi $\iff$
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\Omega"] & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
con ψ iso. lineare sulle fib

Possiamo dotare $Pic(X)$ di un'operazione di gruppo: (il prodotto tensoriale tra le fibre).

Siano $L, M \in Pic(X)$ e sia $X = \cup U_i$ banalizzante entrambi:

$L \supset p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$

$M \supset q^{-1}(U_i) \xrightarrow{\psi_i} U_i \times \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ $\psi_{ij} = \psi_j \circ \psi_i^{-1}$

$L \otimes M \supset s^{-1}(U_i) \xrightarrow{\eta_i} U_i \times \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ con $s : L \otimes M \to X$

Chi sono gli η_{ij}? Abbiamo:

$\varphi_{ij}(x, v) = (x, g_{ij} \cdot v)$

$\psi_{ij}(x, v) = (x, h_{ij} \cdot v)$

$\eta_{ij}(x, v \otimes w) := (x, g_{ij} \cdot v \otimes h_{ij} \cdot w)$ (costruzione naturale)

Nota: la costruzione non dipende dal rango del fibrato.

Nel caso rango = 1 si ha: ($\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathbb{C}$)

$\varphi_{ij}(x, u) = (x, g_{ij} \cdot h_{ij} \cdot u)$ Equivalentemente:

$\otimes$ su Pic $\Longleftrightarrow$ prodotto delle funzioni di transizione.

<u>Oss</u>:

Dare un fibrato $E \to X$ di rango r, equivale a dare un ric. aperto $X = \bigcup U_i$ e delle appl. $g_{ij} : U_{ij} \to GL(r, \mathbb{C})$ olomorfe soddisfacenti la condizione di "<u>cociclo</u>":

$$g_{jk}^{-1} \circ g_{ik}^{-1} \circ g_{ij}^{-1} = \mathrm{Id} : U_{ijk} \to GL(r, \mathbb{C})$$

infatti da:

$\varphi_{ij} = (\mathrm{Id}, g_{ij}) = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$

$\varphi_{kj} \circ \varphi_{ki}^{-1} \circ \varphi_{ji} = \mathrm{Id}$.

segue la relazione di cociclo. Viceversa:

definiamo $E = \dot{\bigcup} U_i \times \mathbb{C}^r / \sim$ dove $\underset{U_i \times \mathbb{C}^r}{(x, v)} \sim \underset{U_j \times \mathbb{C}^r}{(x, u)}$

se $v = g_{ij}^{\pm 1} u$. Allora la relazione di cociclo mi dice che $\sim$ è una <u>relazione di equivalenza</u>.

<u>Oss</u>:

i) $g_{ii} = \mathrm{Id}$ $(i = j = k)$

ii) $g_{ij} \cdot g_{ii}^{-1} \cdot g_{ji} = \mathrm{Id}$ $(i = k)$ $\Rightarrow$ $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$

Naturalmente $p : E \to X$ è quella indotta da $\dot{\bigcup} U_i \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{pr} X$. (E' ben definita dato la relazione che abbiamo introdotto.)

Oss:

Per quello che abbiamo appena visto l'inverso nel $\mathrm{Pic}(X)$ e' dato da:

$$L = (U_i, \underset{\mathcal{O}^*}{\underset{\cap}{g_{ij}}}) \in \mathrm{Pic}(X) \rightsquigarrow (U_i, g_{ij}^{-1}) \text{ e' l'inverso.}$$

Oss:

Possiamo definire i vari $L^k := (U_i, g_{ij}^k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esempi:

$X = \mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$ (spazio proiettivo)

Consideriamo $\mathcal{O}(k) = \dfrac{(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times \mathbb{C}}{\sim}$ dove

$(x_0, \dots, x_n, t) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n, \lambda^k t)$, $\lambda \neq 0$.

Inoltre $p : \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ in modo naturale.

In tal caso gli aperti banalizzanti sono $U_i = \{x_i \neq 0\}$ e $p^{-1}(U_i) = \{(x_0, \dots, \underset{i\text{-esimo}}{1}, x_{i+1}, \dots, t)\}$ $\forall i$.

$$\Big\downarrow \varphi_i \quad \text{(in modo naturale)}$$

$$U_i \times \mathbb{C}$$

nell'intersezione $U_{ij} \times \mathbb{C}$ in cui $x_i \cdot x_j \neq 0$ si ha:

$$\begin{array}{ccc}
(x_0, \dots, x_i = 1, \dots, t) & \longleftarrow & U_{ij} \times \mathbb{C} \\
, \lambda = \frac{x_i}{x_j} & & (p, t) \\
& & \downarrow \\
(x_0, \dots x_j = 1, \dots, \lambda^k t) & & (p, (\frac{x_i}{x_j})^k t)
\end{array}$$

$\Rightarrow g_{ij} = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^k$. Allora $\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^k$.

E

Esempio

Fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n$.

i) $L \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$

$$\begin{matrix} L \\ \parallel \\ \{(p,v) \mid \text{rango}(p,v)=1\} \simeq \mathcal{O}(-1) \end{matrix}$$

ii) $K_{\mathbb{P}^n} \simeq \mathcal{O}(-n-1)$ (Esercizio)

Infatti per i) definisco

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(-1) \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & L \arrow[dl] \\ & \mathbb{P} & \end{tikzcd}$$

tale che

$$\eta((x_0,\dots,x_n,t)) = ([x_0,\dots,x_n],(tx_0,tx_1,\dots,tx_n))$$

Notazione:

$E \xrightarrow{p} X$ fibrato vett. olomorfo. $U \subset X$ aperto.

$\Gamma(U,E) := \{ s: U \to E \text{ olomorfe}, p \circ s = Id_U \}$

Esso è uno spazio vettoriale. Inoltre $U \to \Gamma(U,E)$ è un fascio di sp. vett.

Esempio:

$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = ?$

Indichiamo con $S_k := \left\{ \begin{matrix} \text{polinomi omogenei di} \\ \text{grado } k \text{ in } x_0,\dots,x_n \end{matrix} \right\}$.

Si vede facilmente che $S_k \subset \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$. Infatti sia $f(x_0,\dots,x_n)$ omogeneo di grado k. Consideriamo

$$f: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathcal{O}(k)$$
$$[x_0,\dots,x_n] \longrightarrow (x_0,\dots,x_n, f(x_0,\dots,x_n))$$

è ben definita.

Meno facile far vedere che $S_k = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$.

In particolare per $k<0$ non ci sono sezioni. Le sezioni sono algebriche.

Verifichiamo "meno facile":

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \arrow[r, "p"] & \mathbb{P}^n \\ (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})\times\mathbb{C} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}(k) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

scrivendo meglio:

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{C}^{n+1}-\{0\}\times\mathbb{C} \arrow[dll, "\mathrm{mod}\sim"'] \arrow[dl, "\sim"] \arrow[d, "p_1\ (\text{fissare } \lambda)"] \\ \mathcal{O}(k) \arrow[d, shift left, "p"] & \mathcal{O}(k)\times_{\mathbb{P}^n}\mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \arrow[l] \arrow[d, shift left] & \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \\ \mathbb{P}^n \arrow[u, shift left, bend left, "s"] & \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \arrow[l, "\pi"] \arrow[u, shift left, bend right, "(s\circ\pi,\, Id)"'] & \end{tikzcd}$$

(<u>prodotto fibrato</u>)

$f: \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

$(Id, f): \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})\times\mathbb{C}$ definisce una sezione se $f(\lambda z)=\lambda^k f(z)$.

Come sono fatte le f.ni olomorfe su $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$?

$\mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$ (<u>Teorema di Hartogs</u>)

Quindi $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) \simeq \{f: \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\text{intera}} \mathbb{C} \mid f(\lambda z)=\lambda^k z\}$

con $f=\sum_{n\geq 0} f_n$, f_n parte omogenea di grado n.

E dire che $f(\lambda z)=\lambda^k f(z)$ è equiv. a dire $f=f_k$.

In particolare il fibrato tautologico non ha sezioni eccetto quella nulla.

Gli $\mathcal{O}(k)$ sono tutti e soli i fibrati in rette sullo spazio proiettivo, per cui $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)=\mathbb{Z}$.

Supponiamo ora di avere $L, M \in \mathrm{Pic}(X)$. Allora possiamo def $\Gamma(X,L) \times \Gamma(X,M) \xrightarrow{\cdot} \Gamma(X, L\otimes M)$ poiché se $L \rightsquigarrow (U_i, f_{ij})$ allora $\Gamma(X,L) = \left\{ (U_i, s_i) \,\middle|\, \begin{matrix} s_i \in \mathcal{O}(U_i) \\ s_i = f_{ij} s_j \end{matrix} \right\}$

stessa cosa per M.

Allora $s \cdot r \longleftrightarrow (U_i, s_i \cdot r_i)$.

Poniamo allora $R(X,L) := \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, L^n)$, essa è una $\mathbb{C}$-algebra graduata.

Vedremo che se X è compatta, allora ogni $\Gamma(X, L^n)$ ha dimensione finita. Inoltre se X è connessa esso è anche un dominio d'integrità. Inoltre il campo delle frazioni è un'estensione finitamente generata su $\mathbb{C}$. Però in generale $R(X,L)$ non è un'algebra finitamente generata.

(<u>Esempio</u>: Dato da Zariski '60)

Vogliamo una cosa che dipenda solo da X. Allora definiamo l'<u>anello canonico</u> di X come $R(X, K_X)$. Esso è finitamente generato. (sotto alcune blande ipotesi su X)

Geometria algebrica: (5 pagine) 11/04

X varietà complessa. $L \xrightarrow{p} X$ line bundle.

$\iff X = \bigcup V_i$, $f_{ij} : V_{ij} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ olomorfe tali che:

$$f_{ii} = 1 \ ; \ f_{ij} = f_{ji}^{-1} \ ; \ f_{jk} f_{ik}^{-1} f_{ij} = 1 .$$

$\Gamma(X,L) = \{ s : X \to L \mid ps = Id_X \} \iff \{ s_i \in \mathcal{O}(V_i) \mid s_i = f_{ij} s_j \ \forall ij \}$

Se consideriamo $L^d := L \otimes \cdots \otimes L$ (d-volte) allora

$\Gamma(X, L^d) = \{ s_i \in \mathcal{O}(V_i) \mid s_i = f_{ij}^d s_j \}$.

Teorema:

X compatta connessa (sempre connessa salvo avviso contrario) di dimensione n. Sia $L \in Pic(X)$ allora:

$\exists \ c, h > 0$ t.c. $\dim \Gamma(X, L^d) \leq c \binom{n+dh}{n}$

Esempio:

$\dim \Gamma(\mathbb{P}^n, \underset{\mathcal{O}(1)^d}{\mathcal{O}(d)}) = \# \{ (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid i_0 + \dots + i_n = d \}$

Per calcolare # cons. $f : \{ \quad \} \longrightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, n+d\})$

$(i_0, \dots, i_n) \longmapsto \{ i_0+1, i_0+i_1+2, \dots, i_0+\dots+i_{n-1}+n \}$

tale applicazione è iniettiva. Così $\# = \binom{n+d}{n}$.

Lemma:

X varietà complessa, $D \subset X$ compatta denso. $X = \bigcup V_i$ ric. aperto.
Allora $\exists$ un raffinamento finito fatto da polidischi di raggio 1,
$\{ \Delta(p_i, 1) \} \subset X$ con le seguenti proprietà:

1) $p_i \in D$;

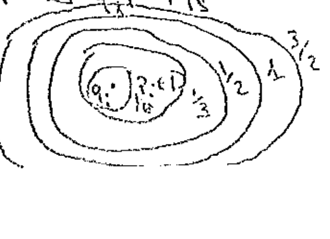
2) $\overline{\Delta(p_i, 1)} \subset V_j$ per qualche j;

3) $\bigcup \Delta(p_i, \frac{1}{2}) = X$.

Dim:

$\forall \, p \in X$ scegliamo delle coord. loc. tali che $\Delta(p, \frac{3}{2}) \subset V_j$.

Dato che X è cpt $\exists \ q_1, \dots, q_s \in X$ t.c. $\bigcup \Delta(q_i, \frac{1}{3}) = X$.



Dim (Teorema)

$L \xrightarrow{p} X$. Usando il lemma precedente:

Cons. U_i aperto banalizzante. $X = \bigcup_{i=1}^{s} \Delta(p_i, \frac{1}{2})$ t.c. $\overline{\Delta(p_i,1)} \subset U_i$.

Abbiamo le $f_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}^*$. Introduciamo una misura:

$$\|L\| = \max_{\substack{i,j \\ \overline{\Delta(p_i,1)} \cap \overline{\Delta(p_j,1)}}} |f_{ij}| \geq 1 \quad (\text{poiché per } i=j \ f_{ij} = id).$$

Sia $h \in \mathbb{N}$ tale che $2^h > \|L\|$.

<u>Affermazione</u>: sia $s \in \Gamma(X, L^d)$ t.c. s ha uno zero di molteplicità $\geq dh$ in ogni p_i (che è ben definita) allora $s = 0$.

<u>Dimostrazione</u>: Infatti: definiamo $\|s\| := \max_{\substack{i \\ \overline{\Delta(p_i,1)}}} \|s_i\|$, siano $i, z_0 \in \overline{\Delta(p_i,1)}$ t.c. $\|s\| = |s_i(z_0)|$. Per il principio del massimo $z_0 \notin \overline{\Delta(p_i, \frac{1}{2})}$ così $\exists j \neq i$ t.c. $z_0 \in \Delta(p_j, \frac{1}{2})$. $|s_j(z_0)|$ chi è?
ricordiamo che s_j ha uno zero di ordine $\geq dh$ in p_j.
$|s_j(z_0)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{dh} \max_{\Delta(p_j,1)} |s_j| \leq \frac{1}{2^{dh}} \|s\|$. D'altra parte $s_i(z_0) = f_{ij}^d s_j(z_0)$,
perciò $\underset{\|s\|}{\underset{\|}{|s_i(z_0)|}} \leq \|L\|^d |s_j(z_0)| \leq \frac{\|L\|^d}{2^{dh}} \|s\| \Rightarrow \|s\| \leq \left(\frac{\|L\|}{2^h}\right)^d \|s\| \Rightarrow s = 0$

A questo punto consideriamo $\Gamma(X, L^d) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i=1}^{r} \frac{\mathcal{O}_{p_i}}{\mathfrak{m}_{p_i}^{dh}}$

$$s \longmapsto s_i \bmod \mathfrak{m}_{p_i}^{dh}$$

l'affermazione ci dice che α è iniettiva. Quindi $\dim \Gamma(X, L^d) \leq$
$\leq r \dim \underbrace{\frac{\mathcal{O}_p}{\mathfrak{m}_p^{dh}}}_{\left\{\substack{\text{polinomi in } z_1 \dots z_n \\ \text{di grado} \leq dh-1}\right\}} = r \binom{n+dh-1}{n}$

■

<u>Corollario</u>:

campo delle f.ni meromorfe.

X cpt. $\mathbb{C} \subset \mathfrak{M}(X)$. Allora $\underset{\substack{\| \\ a(X)}}{\deg tr_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}(X)} \leq \dim X$.

$a(X)$ [dim. <u>algebrica</u> di X]

(

Parentesi algebrica:

$K \subset F$ campi. $x_1, \dots, x_n \in F$ si dicono algebricamente indipendenti su K se $K[t_1, \dots, t_n] \to F$ omo.
$t_i \to x_i$

e' iniettivo.

Un'insieme massimale di elementi alg. ind. e' detto "base di trascendenza".

Lemma:

Due basi di trascendenza sono equipotenti. Quindi è ben def. il "grado di trascendenza", i.e. la cardinalità della base.

Esempio:

$F = K(t_1, \dots, t_n) = \left\{ \frac{p}{q} \mid \begin{smallmatrix} p,q \in K[t_1,\dots,t_n] \\ q \neq 0 \end{smallmatrix} \right\}$

In tal caso $t_1, \dots, t_n$ è una base di trascendenza.

se $x = \frac{p}{q} \in F \Rightarrow x \cdot q - p = 0 \Rightarrow K[x, t_1, \dots, t_n] \to F$ no iniettiva.

Tali estensioni vengono chiamate puramente trascendenti.

Dim: Idea: (caso finito)

Supp. $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_m$ basi di trascendenza. e sia $n \geq m$, allora $x_1, \dots, x_n, y_1$ sono dipendenti, allora esiste $p(x_1, \dots, x_n, y_1) = 0$, a meno di permutare $x_1, \dots, x_n$ si ha $p = \sum_{i=0}^{N} p_i(x_2, \dots, x_n, y_1) x_1^i$, $p_N \neq 0$. $\Rightarrow x_1$ è algebrico su $K(x_2, \dots, x_n, y_1) \subset F$.

Se per assurdo y_1 fosse algebrico su $K(x_2, \dots, x_n) \Rightarrow K(x_2, \dots, x_n) \subset$
$\subset K(x_2, \dots, x_n, y_1, y_2)$ algebrica. Allora possiamo sostituire x_1 con y_1 e poi si prosegue in modo solito...

Dim (Corollario)

Bisogna mostrare che (se $\dim X = n$) $\forall f_0, \dots, f_{n+1} \in \mathcal{M}(X)$ esse sono alg. dip. Supp. che $\exists L \to X$ ed $s_0, \dots, s_{n+1} \in \Gamma(X, L)$ tali che $f_i = \frac{s_i}{s_0}$ $i = 1, \dots, n+1$ (Esercizio).

Consideriamo $\mathbb{C}[t_0, \dots, t_{n+1}] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ← grado omogeneo d. e

$S_d \longrightarrow \Gamma(X, L^d)$

$p(t_0, \dots, t_{n+1}) \longrightarrow p(s_0, \dots, s_{n+1}) = s_0^d\, p(1, f_1, \dots, f_{n+1}) \Rightarrow$ tale appl. e' iniettiva.

ma $\dim(S_d) = \binom{n+1+d}{n+1} = \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$, mentre $\dim \Gamma(X, L^d) \leq c\frac{d^n}{n!} + \dots$
che per d molto grande è assurdo.

Teorema (di Siegel)

X cpt:

1) $\deg tr\, \mathcal{M}(X) \leq \dim_{\mathbb{C}} X$;

2) $f_1, \dots, f_a \in \mathcal{M}(X)$ base di trascendenza

$\mathbb{C}(f_1, \dots, f_a) \subset \mathcal{M}(X)$ è un'estensione alg. finita.

Nota: Senza l'ipotesi di compattezza è tutto falso.

Dimensione di Kodaira.

X compatto, $K_X \to X$ fibrato canonico. Avevamo visto l'anello canonico $R(X, K_X) = \bigoplus_n \Gamma(X, K_X^n)$.

Si definisce $Q(X,K) \subset \mathcal{M}(X)$ sottocampo come:

$Q(X,K) = \left\{ \frac{s_1}{s_2},\ s_1, s_2 \in \Gamma(X, K_X^d),\ s_2 \neq 0 \right\},\ d \geq 0$. Se $R(X,K_X) \neq 0$

Allora $\deg tr\, Q(X, K_X) =: \kappa(X)$ è la dimensione di Kodaira.

Oss:

Se $X \subset \mathbb{P}^N \Rightarrow a(X) = \dim_{\mathbb{C}} X$ (il viceversa è falso)

Esempi: (Curve)

$\kappa(\mathbb{P}^1) = -\infty$ (Caso in cui $R(X, K_X) = 0$) $\quad (g=0)$

$\kappa($  $) = 0 \quad (g=1)$

$\kappa($  $) = 1 \quad (g>1)$

(Superfici)

$S \subset \mathbb{P}^3$ t.c. $S = \{F(x) = 0,\ \deg F = d\}$ liscia.

in tal caso $\kappa(S) = -\infty$ se $d \leq 3$

$\kappa(S) = 0$ se $d = 4$

$\kappa(S) = 2$ se $d > 4$

Def:

X si dice di tipo generale se $\kappa(X) = \dim X$.

<u>Esempio</u> (caso non compatto)

$X = \mathbb{C}$, $f_n(z) = e^{z^n}$, $n \geq 1$ sono olomorfe.

Esse sono infinite e tutte alg. indipendenti.

(Esercizio: sugg. sulle Note)

Geometria algebrica

|15/04|

Nozione di complesso: (A^*) (complesso coomologico)

$$\cdots \longrightarrow A^n \xrightarrow{d} A^{n+1} \xrightarrow{d} A^{n+2} \longrightarrow \cdots$$, A^i gruppi abeliani, $d^2=0$.

Esempio: $A^n =$ n-forme su X, d differenziale.

Def:
Si definisce "cociclo" un elemento chiuso rispetto al differenziale,
$Z^n(A^\bullet) = \{x \in A^n \mid dx = 0\} = \mathrm{Ker}(d: A^n \longrightarrow A^{n+1})$
Si definiscono "cobordi" gli elementi di $B^n(A^\bullet) = dA^{n-1} \subset Z^n(A^\bullet)$
Definiamo $H^n(A^\bullet, d) = Z^n/B^n$. $A^\bullet$ si dice aciclico se $H^* = 0$.

Def:
Morfismo di complessi $\varphi: A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ è una succ. di omomorfismi $\varphi_n: A^n \longrightarrow B^n$ che commutano col differenziale d. ($\varphi_n \circ d = d \circ \varphi_{n-1}$

Oss:
$\varphi_n(Z^n(A^\bullet)) \subset Z^n(B^\bullet)$. Infatti se $x \in Z^n$ si ha $d\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(dx) = 0$.
Quindi un morfismo di complessi manda cocicli in cocicli e allo stesso modo cobordi in cobordi. Quindi essi inducono delle applicazioni $\varphi_n: H^n(A^\bullet) \longrightarrow H^n(B^\bullet)$ $\forall n$.

Def:
$\varphi: A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ si dice isomorfismo se $\varphi_n: A^n \longrightarrow B^n$ è un iso. $\forall n$.
φ si dice "quasi-isomorfismo" se lo è $\varphi_n: H^n(A^\bullet) \longrightarrow H^n(B^\bullet)$.

Def: (omotopia)
Supp. di avere $\varphi, \psi: A^\bullet \to B^\bullet$ morfismi di complessi. Una omotopia tra φ e ψ è una succ. $h_n: A^n \longrightarrow B^{n-1}$ tale che:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^n \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "\varphi_n \psi_n"] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r, "d"] & B^n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{dh_n + h_{n+1}d = \varphi_n - \psi_n}$$

Def:

Diremo $\psi \sim \varphi$ (omotope) se esiste un'omotopia nel senso precedente.

Prop:

$\sim$ è una relazione d'equivalenza.

Dim:

i) $\varphi \sim \varphi$ $(h \equiv 0)$;

ii) $\varphi \sim \psi \Rightarrow \psi \sim \varphi$ $(h \to -h)$;

iii) $\varphi \sim \psi$, $\psi \sim \eta \Rightarrow \varphi \sim \eta$. Infatti se $\varphi - \psi = dh + hd$, $\psi - \eta = dk + kd$, allora basta considerare come operatore d'omotopia $h+k$. ∎

Lemma:

Siano φ, ψ morfismi di complessi, se $\varphi \sim \psi$ allora in coomologia sono lo stesso morfismo.

Dim:

Sia $[x] \in H^n(A)$, $x \in Z^n$. $\varphi([x]) = [\varphi(x)]$, $\psi([x]) = [\psi(x)]$.

Allora $\varphi(x) - \psi(x) = h\overset{=0}{d(x)} + dh(x) \in B^n$. ∎

Nota: Il viceversa di questo lemma è falso.

Esempio:

$$A^\bullet: \quad 0 \to \underset{\mathbb{Z}_0}{\overset{\mathbb{Z}}{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{\mathbb{Z}_1}{\overset{\mathbb{Z}}{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}} \to \mathbb{Z}/2 \to 0 \qquad \text{(aciclico)}$$

Consideriamo $Id, 0 : A^\bullet \to A^\bullet$, essi inducono lo stesso morfismo in coomologia (essendo aciclico). Tali applicazioni non sono omotope in quanto se per assurdo lo fossero avremmo:

$\forall x \in \mathbb{Z}_1$, $(Id - 0)(x) = x = 2h(x) + k\,dx$. Ma $k = 0$ necessariamente.

Allora avremmo $x = 2h(x)$ che è assurdo.

(

Esempio:

X sp. top. $\mathcal{F}$ fascio su X. $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ ric. aperto di X.

Possiamo associargli il complesso delle cocatene di Čech:

$$C(\mathcal{U},\mathcal{F}):\ 0\to C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\cdots$$

dove: $$C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})=\prod_{i_0,\dots,i_k\in I}\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_k})$$

$[\sigma\in C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\longleftrightarrow$ successione $\sigma_{i_0\dots i_k}\in\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_k})$ ove $U_{i_0\dots i_k}\neq\phi.]$

e il differenziale di Čech δ fatto così:

$$\delta: C^0\longrightarrow C^1$$
$$\underset{\{\sigma_i\}}{\overset{\shortparallel}{\sigma}}\longmapsto\delta\sigma\ \text{ t.c. } (\delta\sigma)_{ij}=\sigma_j|_{U_{ij}}-\sigma_i|_{U_{ij}}\in\mathcal{F}(U_{ij})$$

Esempio: X var. complessa, $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X$.

$$Z^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)=\mathrm{Ker}(\delta:C^0\to C^1)$$
$$\shortparallel$$
$$\{\sigma_i\in\mathcal{O}_X(U_i)\mid\sigma_i|_{U_{ij}}=\sigma_j|_{U_{ij}}\}=\mathcal{O}_X(X)$$

Oss:

Dall'esempio precedente nel caso in cui $\mathcal{F}$ è un fascio si ha che $Z^0=H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})=\mathcal{F}(X)$ (sezioni globali).

Sia ora $\sigma=\{\sigma_{ij}\}\in C^1$ allora poniamo:

$$(\delta\sigma)_{ijk}=\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}-\sigma_{ik}|_{U_{ijk}}+\sigma_{ij}|_{U_{ijk}}.$$

Verifichiamo che $\delta^2: C^0\to C^2$ è nullo:

sia $\sigma=\{\sigma_i\}\in C^0$, allora $\delta^2\sigma=\delta(\delta\sigma)=$

$$(\delta(\delta\sigma))_{ijk}=(\delta\sigma)_{jk}-(\delta\sigma)_{ik}+(\delta\sigma)_{ij}=\sigma_k-\sigma_j-\sigma_k+\sigma_i+\sigma_j-\sigma_i=0.$$

Esempio: $H^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X^*)=\ ?$

$\underset{\{\eta_{ij}\in\mathcal{O}^*(U_i\cap U_j)\}}{\overset{\shortparallel}{\eta\in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X^*)}}$ se $\delta\eta=0\Rightarrow\forall\, ijk$ si ha $\eta_{jk}\eta_{ik}^{-1}\eta_{ij}=1$. cioè $\eta\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X^*)$ mi dà un line bundle che si banalizza su ogni U_i.

inoltre se $\mu, \mu' \in Z^1$ quando avviene $\mu \cdot \mu'^{-1} \in B^1$?
Se $\exists\ \sigma_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ t.c. $\frac{\sigma_j}{\sigma_i} = \frac{\mu_{ij}}{\mu'_{ij}}$, $\mu_{ij} \cdot \sigma_i = \sigma_j \cdot \mu_{ij}$ il che corrisponde all'isomorfismo di fibrati:

$$\begin{array}{ccc} U_i \times \mathbb{C} & \xleftarrow{\mu_{ij}} & U_j \times \mathbb{C} \\ \downarrow \sigma_i & & \downarrow \sigma_j \\ U_i \times \mathbb{C} & \xleftarrow{\mu_{ij}} & U_j \times \mathbb{C} \end{array}$$

di conseguenza $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) \subset \mathrm{Pic}(X)$ corrisponde a quelli che si banalizzano su $\mathcal{U}$.
In generale $\sigma \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ si definisce $\delta\sigma \in C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ come:

$$(\delta\sigma)_{i_0 \dots i_{k+1}} = \sum_{\alpha=0}^{k+1} (-1)^\alpha \sigma_{i_0 \dots \hat{i}_\alpha \dots i_{k+1}}$$

<u>Esercizio</u>: Verificare che $\delta^2 = 0$.

<u>Def</u>:
$C_a^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (cocatene alternanti)

$$\left\{ \sigma \in C^k \ \middle|\ \begin{array}{l} \sigma_{i_0 \dots i_k} \text{ se } i_\alpha = i_\beta \quad \alpha \neq \beta \\ \sigma_{i_{s(0)} \dots i_{s(k)}} = (-1)^s \sigma_{i_0 \dots i_k}, \ s \in \Sigma_{k+1} \end{array} \right\}$$

<u>Oss</u>:
$C_a(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un sottocomplesso: $\delta(C_a^k) \subset C_a^{k+1}$.

<u>Dim</u>:
Supp. $f \in C_a^k$, $(\delta f)_{i_0 \dots i_{k+1}} = \sum_\alpha (-1)^\alpha f_{i_0 \dots \hat{i}_\alpha \dots i_{k+1}} = f_{i_1 i_2 \dots} - f_{i_0 i_2} + \sum (-1)^\alpha f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_\alpha \dots}$

Facciamo ad esempio il caso in cui scambiamo i_0 con i_1.

$$(\delta f)_{i_1 i_0 \dots i_{k+1}} = f_{i_0 i_2 \dots} - f_{i_1 i_2 \dots} + \sum_\alpha (-1)^\alpha f_{i_1 i_0 \dots \hat{i}_\alpha \dots}$$

<u>Teorema</u>:
$C_a \hookrightarrow C$ (l'inclusione) è un morfismo tale che:

$$H^*(C_a^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = H^*(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})).$$

<u>Dim</u>:
$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Sia $\leq$ un ordinamento totale su I.
Definisco $C_\leq^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$: $C_\leq^0 \xrightarrow{\delta} C_\leq^1 \longrightarrow \cdots$ con
$C_\leq^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_k})$ e δ come prima.

__Teorema__: (senza dimostrazione)
La proiezione $C^\circ(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\circ_\leq(\mathcal{U},\mathcal{F})$ è un isomorfismo in coomologia. $H^\circ(C(\mathcal{U},\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} H^\circ(C_\leq(\mathcal{U},\mathcal{F}))$.

I teoremi appena enunciati sono equivalenti, infatti:

$$\begin{tikzcd} C_a \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\sim"] & C(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[d] \\ & C_\leq(\mathcal{U},\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

evidente

allora dimostrare il primo è come dimostrare il secondo.

$\blacksquare$

Supponiamo ora che $\mathcal{V}=\{V_i\}_{i\in I}$ sia un raffinamento di $\mathcal{U}=\{U_j\}$, quindi esistono delle funzioni di raffinamento $\vartheta: I \longrightarrow J$ t.c. $V_i \subset U$.
Allora è indotta $C(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\vartheta_*} C(\mathcal{V},\mathcal{F})$ come:
se $f\in C^k$ si ha $(\vartheta_* f)_{i_0\dots i_k} = f_{\vartheta(i_0)\dots\vartheta(i_k)}\big|_{V_{i_0\dots i_k}}$, è evidente che ϑ_* è un morfismo di complessi e quindi ne induce uno in coomologia

__Teorema__: (senza dimostrazione)

$\vartheta_*: H^*(C(\mathcal{U},\mathcal{F})) \longrightarrow H^*(C(\mathcal{V},\mathcal{F}))$ non dipende da ϑ.

__Definizione__:
X sp. top., $\mathcal{F}$ fascio di gruppi abeliani su X. Si definisce
$H^k(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$ ossia:
1) $\bar{H}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \dfrac{H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})}{D^k}$ dove $f\in D^k \iff \exists$ un raffinamento $\mathcal{V}\leq\mathcal{U}$ t.c. $f=0$ in $H^k(\mathcal{V},\mathcal{F})$. (Per il teorema tale def. è ben posta)

__Oss__: D^k è un sottogruppo. Siano $\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2\leq\mathcal{U}$ allora costruisco un raffinamento comune $\mathcal{W}=\{V_i\cap V_j,\ V_i\in\mathcal{V}_1, V_j\in\mathcal{V}_2\}$ così se $f,g\in D^k$ e sono tali che $f=0$ su $H(\mathcal{V}_1,\mathcal{F})$ e $g=0$ su $H(\mathcal{V}_2,\mathcal{F})$ allora $f=g=0$ in $H(\mathcal{W},\mathcal{F})$ così $f+g=0$ in $H(\mathcal{W},\mathcal{F})$.

2) $H^k(X,\mathcal{F}) = \bigcup_{\mathcal{U}} \bar{H}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$ (__Nota__: posso pensare $\bar{H}^k(\mathcal{U})\subset\bar{H}^k(\mathcal{V})$)
questo è un gruppo.
$= \{(f,\mathcal{U}) \mid f\in H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\}/\sim$ dove $(f,\mathcal{U})\sim(g,\mathcal{V})$ se $\exists$ un $\begin{matrix}\mathcal{W}<\mathcal{U}\\ \mathcal{W}<\mathcal{V}\end{matrix}$ t.c. $f=g$ in $H(\mathcal{W})$.

Oss:

$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(X).$

Geometria algebrica:

/18/05/

$\mathcal{F}$ fascio su X, $\mathcal{U}=\{U_i\}$ ric. aperto di X.
Avevamo introdotto il <u>complesso di Čech</u>:

$$C(\mathcal{U},\mathcal{F}):\ 0\longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow\cdots$$

con $C^n=\prod_{(i_0,\dots,i_n)\in I}\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n})$ e $(\delta f)_{i_0\dots i_{n+1}}=\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j f_{i_0\dots\hat{i_j}\dots i_{n+1}}$

si vede che $\delta^2=0$ e così ha senso $H^*(C(\mathcal{U},\mathcal{F}))=:H^*(\mathcal{U},\mathcal{F})$.
Supponiamo ora che $\mathcal{V}=\{V_j\}$, $j\in J$ raffinamento di $\mathcal{U}$, allora $\exists\ \alpha:J\longrightarrow I$ f.ne di raffinamento, $V_j\subset U_{\alpha(j)}\ \forall j$.
Essa induce $\alpha: C(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow C(\mathcal{V},\mathcal{F})$ morfismo di complessi tale che se $f\in C^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ si ha $(\alpha f)_{j_0\dots j_n}=f_{\alpha(j_0)\dots\alpha(j_n)}$.

<u>Lemma</u>:
$\alpha,\beta: J\longrightarrow I$ sono f.ni di raffinamento $\Rightarrow$ $\alpha,\beta: C(\mathcal{U},\mathcal{F})\to C(\mathcal{V},\mathcal{F})$ sono omotopi.

<u>Dim</u>: (Idea)
Bisogna trovare l'omotopia $h_n: C^n(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow C^{n-1}(\mathcal{V},\mathcal{F})$, tale che $\delta h+h\delta=\alpha-\beta$.
Sia $f\in C^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$, allora $(hf)_{j_0\dots j_{n-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_{\alpha(j_0)\dots\alpha(j_k)\beta(j_k)\dots\beta(j_{n-1})}\Big|_{V_{j_0\dots j_{n-1}}}$
ciò ha senso poiché $V_{j_0\dots j_{n-1}}\subset U_{\alpha(j_0)\dots}$, in quanto $V_{j_i}\subset U_{\alpha(j_i)}$ $i<k$
$V_{j_k}\subset U_{\alpha(j_k)}\cap U_{\beta(j_k)}$ ∎

continuare per esercizio...

<u>Cor</u>:
$\alpha=\beta: H^*(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow H^*(\mathcal{V},\mathcal{F})$.

<u>Def</u>:
$H^k(X,\mathcal{F}):=\varinjlim_{\mathcal{U}} H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})=\left\{(\mathcal{U},f)\ \middle|\ \begin{matrix}\mathcal{U}\text{ ricoprimento}\\ f\in H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\end{matrix}\right\}/\sim$
dove $(\mathcal{U},f)\sim(\mathcal{V},g)$ se $\exists\ \mathcal{W}$ raff di $\mathcal{U},\mathcal{V}$ tale che $f=g$ in $H^k(\mathcal{W},\mathcal{F})$.

Oss:

$H^k(X,\mathcal{F})$ è un gruppo abeliano.

Problema 1: (Leray)

Condizioni affinché $H^*(X,\mathcal{F}) = \check{H}^*(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Problema 2:

Trovare modelli "piccoli" di $C(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

- Supponiamo ora $\mathcal{U} = \{U_i\}, i \in I$, $(\leq)$ ordinamento tot. su I.

$C_0(\mathcal{U},\mathcal{F}) : 0 \to C_0^0 \xrightarrow{\delta} C_0^1 \to \cdots$

con $C_0^n = \prod_{i_0 < \cdots < i_n} \mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_n})$

Lemma:

La proiezione naturale $C(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C_0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ è un isomorfismo in coomologia.

Dim (Idea)

$\forall\, k \geq 0$ definiamo $C_k^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{\substack{i_0 \cdots i_n \\ i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-k}}} \mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_n})$, allora

ho delle proiezioni: $C_0 \xleftarrow{\pi_1} C_1 \xleftarrow{\pi_2} C_2 \xleftarrow{\pi_3} \cdots$

D'altra parte $H^p(C(\mathcal{U},\mathcal{F})) = H^p(C_k(\mathcal{U},\mathcal{F}))$, $(k \geq p+2)$

allora basta far vedere che $C_{k+1} \xrightarrow{\pi} C_k$ è un iso. in coomologia.

Parentesi:

$\pi : C \to D$ morfismo suriettivo di complessi $(\forall\, \pi_n : C^n \to D^n)$

con π quasi-isomorfismo $\iff H^*(\mathrm{Ker}\,\pi) = 0$.

Def:
$$\begin{tikzcd}
E^n = \mathrm{Ker}\,\pi_n \arrow[d, "d"] & \subset & C^n \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & D^n \arrow[d, "d"] \\
E^{n+1} = \mathrm{Ker}\,\pi_{n+1} & \subset & C^{n+1} \arrow[r, "\pi_{n+1}"'] & D^{n+1}
\end{tikzcd}$$

allora supponendo di avere:

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Ker}\,\pi}}{D_K} \to C_K \xrightarrow{\pi} C_{K-1} \to 0 \quad \text{esatta}$$

l' idea è dimostrare che $Id_D \sim 0$. Quindi

$$\begin{tikzcd} H(D) \arrow[r, bend left, "Id"] \arrow[r, bend right, "0"'] \arrow[r, phantom, "\|"] & H(D) \end{tikzcd}$$

allora lo spazio H è nullo.
Dobbiamo quindi trovare il nucleo

$$D^n = \left\{ f \in \prod_{\substack{i_0 \dots i_n \\ i_0 < \dots < i_{n-K}}} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_n}) \,\middle|\, \text{t.c. } f_{i_0 \dots i_n} = 0 \ (\text{se } i_{n-K} < i_{n-K+1}) \right\}$$

$h : D^n \to D^{n-1}$ deve essere t.c. $\delta h + h\delta = \pm Id$. e quindi

$$h f_{i_0 \dots i_{n-1}} = \begin{cases} 0 & \text{altrimenti} \\ (-1)^j f_{i_0 \dots i_j, i_{n-K+1}, i_{j+1}, \dots, \hat{i}_{n-K+1}, \dots i_n} & \text{se } i_j < i_{n-K+1} < i_{j+1} \end{cases}$$

(vedere in rete Mumford-Oda)

Def:

$0 \to C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \to 0$ $\quad \alpha, \beta$ morf. di complessi.

si dice succ. esatta (corta) se lo è ad ogni livello n. (grado)

Oss:

In tale situazione: $H^n(C) \xrightarrow{\alpha} H^n(D) \xrightarrow{\beta} H^n(E)$;

$\exists \delta$

$\dashrightarrow H^{n+1}(C) \xrightarrow{\alpha} H^{n+1}(D) \to H^{n+1}(E)$;

è esatta lunga.

Supponiamo ora di avere $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ successione esatta di fasci. Per ogni $V \subset X$ aperto si ha

$0 \to \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V) \to \mathcal{H}(V)$ è esatta

Da cui se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento abbiamo una succ. esatta:

$0 \to C(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ esatta

Teorema:
X paracompatto e di Hausdorff. Allora ad ogni succ. esatta corta di fasci corrisponde una succ. esatta lunga di coomologia:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to \cdots$$

Dim (Idea)
$\forall f \in C(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ $\exists$ un raffinamento $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ (che dipende da f) tale che $\tau f \in \beta(C(\mathcal{V}, \mathcal{G}))$ con τ f.ne di raffinamento.
Perché β è surgettivo a meno di raffinamenti.

Def:
$f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo di fasci.
$\mathrm{Supp}(f) := \{x \in X \mid f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x, f_x \neq 0\}$

Def (Partizione dell'unità)
$\mathcal{F}$ fascio, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ric. loc. finito. Una successione di morfismi $f_i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $i \in I$ è una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}$ se $\mathrm{supp}\, f_i \subset U_i$ e $\sum f_i = Id_{\mathcal{F}}$.

Def:
$\mathcal{F}$ si dice fine se $\forall \mathcal{U}$ loc. finito $\exists$ una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{U}$.

<u>Esempio</u>:

X varietà. A^q = fascio delle q-forme differenziali.
È un fascio fine, infatti basta prendere $\varphi_i \in C^\infty$ partizione dell'unità e considero $f_i = \varphi_i \cdot Id_{A^q}$, ossia $f_i(\omega) = \varphi_i \cdot \omega$.

<u>Def</u>:
$\mathcal{F}$ fascio si dice aciclico se $H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \ \forall\, i > 0$.

<u>Teorema</u> (X paracompatto di Hausdorff)
$\mathcal{F}$ fine $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ aciclico.

<u>Dim</u>:
Sia $[f] \in H^i(X, \mathcal{F})$, $i > 0$
$[f]$ si rappresenta con un elemento $f \in C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $\delta f = 0$
e $\mathcal{U}$ lo posso scegliere loc. finito. $\mathcal{U} = \{U_i\}$
Sia $\varphi_i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ partizione dell'identità su $\mathcal{F}$.
Voglio mostrare che $\exists\, g \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ t.c. $\delta g = f$.
Poniamo $g_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{i_0} \varphi_{i_0}(f_{i_0 \dots i_n})$. Più precisamente $\varphi_{i_0} = \varphi_{i_0}|_{U_{i_1 \dots i_n}}$

<u>Nota</u>: Supp $\varphi_{i_0} \subset U_{i_0} \cap U_{i_1 \dots i_n}$.

Calcoliamo allora δg:

$$(\delta g)_{i_0 \dots i_n} = \cancel{g_{i_1 \dots i_n}} + \sum_{h=0}^{n} (-1)^h g_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_n} = \cancel{\sum_{i_0} \varphi_{i_0}(f_{i_0 \dots i_n})} + \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \sum_{q} \varphi_q(f_{q, i_0 \dots \hat{i}_h \dots}$$

$$= \quad // \quad + \sum_q \varphi_q \Big(\sum_{h=0}^{n} (-1)^h f_{q, i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_n}$$

<u>ma $\delta f = 0$</u> $\Rightarrow$ $= \sum_q \varphi_q (f_{i_0 \dots i_n} - \overset{=0}{\delta f_{q, i_0 \dots i_n}}) =$

$$= f_{i_0 \dots i_n}$$

Legame con la coomologia di de Rham

Sia ora X var. diff. di $\dim_{\mathbb{R}} X = n$. (connessa)

Abbiamo il complesso di de Rham:

$$(*) \quad 0 \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^n \to 0$$

grazie al lemma di Poincaré essa è una succ. esatta.

Indichiamo con $\mathcal{B}^i = d(\mathcal{A}^{i-1}) \subset \mathcal{A}^i$. Posso spezzare $(*)$

$$(1): \ 0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{A}^0 \to \mathcal{B}^1 \to 0$$

fascio associato, che è equiv. a $\mathcal{B}^i$ fascio delle forme chiuse.

$$(2) \ 0 \to \mathcal{B}^1 \hookrightarrow \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{B}^2 \to 0$$

$$0 \to \mathcal{B}^k \hookrightarrow \mathcal{A}^k \xrightarrow{d} \mathcal{B}^{k+1} \to 0$$

considerando la coomologia abbiamo: $(k>0)$

$$0 = \cancel{H^k(X, \mathcal{A}^0) \xrightarrow{d} H^k(X, \mathcal{B}^1) \to}$$

$$H^0(X, \mathbb{R}) = \Gamma(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$H^1(X, \mathbb{R}) = ?$ si calcola con la succ. di coomologia esatta lunga associata a (1)

si ha: $H^0(X, \mathcal{A}^0) \xrightarrow{d} H^0(X, \mathcal{B}^1) \to H^1(X, \mathbb{R}) \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{H^1(X, \mathcal{A}^0)}}$

$$\Rightarrow H^1(X, \mathbb{R}) = \frac{H^0(X, \mathcal{B}^1)}{dH^0(X, \mathcal{A}^0)} = \frac{\text{1- forme chiuse}}{\text{1- forme esatte}}$$

andando avanti allora:

$$0 \to H^1(X, \mathcal{B}^1) \to H^2(X, \mathbb{R}) \to 0$$

$\Rightarrow H^k(X, \mathbb{R}) \simeq H^{k-1}(X, \mathcal{B}^1)$ che si calcola con (2):

$$H^0(X, \mathcal{A}^1) \xrightarrow{d} H^0(X, \mathcal{B}^2) \to H^1(X, \mathcal{B}^1) \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{H^1(X, \mathcal{A}^1)}}$$

$$\Rightarrow \underset{H^2(X, \mathbb{R})}{\underset{\shortparallel}{H^1(X, \mathcal{B}^1)}} = \frac{H^0(X, \mathcal{B}^2)}{dH^0(X, \mathcal{A}^1)} \dots$$

cioè stiamo mostrando che

$$\boxed{H^*(X, \mathbb{R}) \simeq H^*_{DR}(X)}$$

Geometria algebrica:

$\mathcal{F}$ fascio su X (paracompatto T2)

$\mathcal{U} = \{U_i\}$ ric. aperto, avevamo introdotto $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

e ci eravamo liberati da $\mathcal{U}$ introducendo $H^i(X, \mathcal{F})$

Oss:

Supponiamo $U_{i_0} = X$ per qualche i_0. Allora $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$, $i > 0$.

Infatti sia $f \in C^{k}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ chiusa ($\delta f = 0$), definisco

$h \in C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tale che $h_{j_1 \dots j_k} = f_{i_0, j_1, \dots, j_k}$ (ben definito dato

che $U_{i_0} = X$). Così $(\delta h)_{j_0 \dots j_k} = \sum_\alpha (-1)^\alpha h_{j_0 \dots \hat{j}_\alpha \dots j_k} = \sum_\alpha (-1)^\alpha f_{i_0, j_0 \dots \hat{j}_\alpha \dots j_k} =$

$= f_{j_0 \dots j_k} - \delta f_{i_0 \dots j_k} = f_{j_0 \dots j_k}$.

Corollario:

$X = \{pt\} \Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > 0$.

Def:

$\mathcal{F}$ si dice acidico se $H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \ \forall i > 0$.

Teorema (di de Rham astratto) è quella che si chiama "risoluzione aciclica di $\mathcal{F}$"

Sia $0 \to \mathcal{F} \to A_0 \xrightarrow{d} A_1 \xrightarrow{d} \dots$ esatta di fasci t.c.

A_i sia aciclica $\forall i$. Allora $H^i(X, \mathcal{F}) = \dfrac{\operatorname{Ker} d : \Gamma(X, A_i) \to \Gamma(X, A_{i+1})}{d(\Gamma(X, A_{i-1}))}$

Dim: (Per induzione su i)

Per $i = 0$ si ha: $\quad 0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, A_0) \xrightarrow{d} \Gamma(X, A_1)$ è esatta

allora $\Gamma(X, \mathcal{F}) \simeq \operatorname{Ker} d$.

Per $i = 1$ chiamiamo $B_1 \subset A_1$, $B_1 = \operatorname{Ker} d : A_1 \to A_2$ allora si ha:

$$0 \to \mathcal{F} \to A_0 \to B_1 \to 0 \quad \text{esatta}$$

$$0 \to B_1 \hookrightarrow A_1 \to A_2 \to \dots$$

così:

$$\underset{H^0}{\Gamma(X, A_0)} \to \underset{H^0(X, B_1)}{\Gamma(X, B_1)} \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \overset{0 \text{ per aciclicità}}{H^1(X, A_0)}$$

$$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = \frac{\Gamma(X, B_1)}{d\Gamma(X, A_0)} = \frac{\operatorname{Ker} d : \Gamma(X, A_1) \to \dots}{\operatorname{Im} \Gamma(X, A_0)}$$

se ora $i>1$ si ha

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H^i(X, A_0)} \longrightarrow H^i(X, B_1) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^{i+1}(X, A_0)}$$

Allora applico gli stessi ragionamenti a B_1 e concludo. ∎

Fasci fiacchi:

$\mathcal{F}$ su X si dice fiacco se $\forall\, U \subset X$ aperto si ha

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

(Tutte le sezioni si possono estendere).

Esempio:

Fascio delle sezioni discontinue.

Lemma:

Fiacco $\Rightarrow$ aciclico.

Dim:

Lemma 1

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H} \to 0$ esatta di fasci.

1) Se $\mathcal{F}$ è fiacco $\Rightarrow 0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{H}) \to 0$

2) Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fiacchi $\Rightarrow \mathcal{H}$ fiacco.

Dim (Lemma 1)

1) Sia $s \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ vogliamo dimostrare che si può sollevare. Poniamo $Z = \{(U, f) \mid {U \subset X \text{ aperto} \atop f \in \mathcal{G}(U)}, \pi(f) = s\}$. Ordiniamo Z in modo che $(U, f) \le (V, g)$ se $U \subseteq V$ e $g|_U = f$. Applichiamo il Lemma di Zorn per trovare un elemento massimale (W, h). La nostra tesi è che $W = X$. Per assurdo:

Supponiamo che $\exists\, x \in X \setminus W$. Allora $\exists\, (V, k) \in Z$, $x \in V$. Considero $k - h \in \mathcal{G}(W \cap V)$, ma $\pi(k-h) = s - s = 0 \Rightarrow k - h \in \mathcal{F}(W \cap V)$ che è fiacco $\Rightarrow \exists\, \ell \in \mathcal{F}(X)$ t.c. $\ell|_{W \cap V} = k - h \Rightarrow h|_{W \cap V} = k - \ell|_{W \cap V}$ e quindi le posso incollare ad una sezione di $W \cup V \supsetneq V$. Assurdo per massimalità. (Questo punto vale se considero $X = U$)

2) $U \subset X$ aperto. $s \in \mathcal{H}(U)$ si solleva a $\mathcal{G}(U)$ per il punto 1. La estendo a $\mathcal{G}(X)$ e applicando π vado su $\mathcal{H}(X)$. ☒

Dim: (Lemma iniziale)

Supponiamo $\mathcal{G}$ fascio su X, $U \subset X$ aperto. Possiamo definire $\mathcal{G}|_U$ fascio su U (in modo ovvio).

Osserviamo che $\mathcal{G}|_U$ e $\mathcal{G}$ hanno le stesse spighe.

Possiamo inoltre definire $\mathcal{G}|_U$ fascio su X in modo che:

$$\mathcal{G}|_U(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } V \not\subset U \\ \mathcal{G}(V) & \text{se } V \subset U \end{cases}$$ che in realtà è un prefascio,

allora ne prendiamo il fascio associato.

Allora le spighe di $\mathcal{G}|_U$ sono le stesse di $\mathcal{G}$ su U e zero fuori.

Ora se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ considero:

morfismo di fasci (diff di Čech)

$$(*) \quad 0 \to \mathcal{G} \to \underbrace{\prod_i \mathcal{G}|_{U_i} \xrightarrow{\delta} \prod_{i,j} \mathcal{G}|_{U_{ij}} \xrightarrow{\delta} \prod_{i,j,k} \dots}_{+}$$

essa è una successione esatta.

Infatti l'esattezza dipende solo dalle spighe su $x \in X$. Così che

$(*) = C(\{x \cap U_i\}, \mathcal{G}_x)$ che è aciclico.

Inoltre $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \Gamma(\prod_{i_0 \dots i_k} \mathcal{G}|_{U_{i_0 \dots i_k}})$.

Per il teorema di de Rham astratto se $\forall U_{i_0 \dots i_k}$ si ha $\mathcal{G}|_{U_{i_0 \dots i_k}}$ è acicl

allora $H^*(\Gamma(X, +)) = H^*(X, \mathcal{G})$.

Supponiamo poi $\mathcal{F}$ fiacco $\Rightarrow \mathcal{F}|_U$ fiacco $\forall U$.

$\boxed{\text{INTERRUZIONE}}$: Cambio di dimostrazione

Ri-Def: $\mathcal{G}|_U(V) = \mathcal{G}(U \cap V)$ $V \subset X$ aperto.

Bisogna ora mostrare che $(*)$ è esatta:

Sia $x \in X$ ed $s \in \prod_{i_0 \dots i_k} \mathcal{G}|_{U_{i_0 \dots i_k}}$ t.c. $\delta s = 0$, sia $x \in U_{i_0}$, definiamo

$h_{j_0 \dots j_{k-1}} = s_{\alpha, j_0, \dots, j_{k-1}} \in \mathcal{G}|_{U_{\alpha, j_0 \dots j_{k-1}}}(V) \underset{x \in V}{=} \mathcal{G}|_{U_{j_0 \dots j_{k-1}}}(V \cap U_\alpha)$ $\Rightarrow$ stesso conto di prima

Ora $\mathcal{G}|_U$ è fiacco se $\mathcal{G}$ è fiacco.

Se $\mathcal{F}$ è fiacco $\Rightarrow \mathcal{F}|_U$ è fiacco $\Rightarrow \prod_{i_0 \dots i_k} \mathcal{F}|_{U_{i_0 \dots i_k}}$ è fiacco.

Così basta dimostrare che se

$$0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \cdots$$

è esatta di fiacchi $\Rightarrow 0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_0) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \cdots$ è ~~fiacc~~ esatta

Allora:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1 \arrow[drr] & & & & \mathcal{F}_2 \arrow[drr] & & & & \mathcal{F}_3 \arrow[drr] & & & & {} \\
& & & & B_1 \arrow[urr] \arrow[dr] & & & & B_2 \arrow[urr] \arrow[dr] & & & & B_3 \arrow[urr] \arrow[dr] & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

e i B_i sono tutti fiacchi per il punto 2) del Lemma.
Inoltre ogni succ. esatta corta mi dà una succ. esatta corta di sezioni: e quindi ricostruendo si ha una successione esatta lunga di sezioni:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X, \mathcal{F}_0) \arrow[r, "d"] & \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[dr, "d"] & \Gamma(X, B_1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
& & & \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \arrow[dl] \arrow[d] & \\
& & \Gamma(X, \mathcal{F}_3) & \Gamma(X, B_2) \arrow[l, hook'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Oss:

Ogni fascio possiede una risoluzione aciclica canonica.

Richiami:

$\mathbb{C}$, $z = x+iy$ ($\mathbb{C}$ visto come $\mathbb{R}^2$)

Cons. le 0-forme $\rightsquigarrow$ funzioni

1-forme $\rightsquigarrow \alpha dx + \beta dy$ con $f, \alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R})$

2-forme $\rightsquigarrow \gamma dx \wedge dy$

possiamo cons. forme a valori in $\mathbb{C}$, i.e. $f, \alpha, \beta, \gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lisce

Allora introduciamo $dz = dx + i dy$, $d\bar{z} = dx - i dy$. Essi danno una nuova base loc. delle 1-forme.

Allora $df = \underbrace{\partial f}_{\substack{\text{parte } (1,0) \\ = \frac{\partial f}{\partial z} dz}} + \underbrace{\bar{\partial} f}_{\substack{\text{parte } (0,1) \\ = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}}$ $\Rightarrow f$ olomorfa $\Leftrightarrow \bar{\partial} f = 0$.

Naturalmente possiamo estendere tutto a $\mathbb{C}^n$.

$z_1, \dots, z_n$ coord. $\Rightarrow dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ base delle 1-forme.

Allora abbiamo il concetto di (p,q)-forma: $\sum \alpha_I dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d$

che di fatto è una $(p+q)$-forma differenziale.

In generale $\{n\text{-forme}\} = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$

~~Allora d: $A^{p,q}$~~ Se $f \in C^\infty \Rightarrow df = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i}_{= \partial f} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i}_{= \bar{\partial} f}$

In generale $d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$, $\partial\alpha = \left(\sum_* \partial\alpha_*\right) \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \rightsquigarrow (p+1,q)$-forma

$\bar{\partial}\alpha = \left(\sum_* \bar{\partial}\alpha_*\right) \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \rightsquigarrow (p,q+1)$-forma

Ora dato che $d^2 = 0$

$$\underbrace{(\partial+\bar{\partial})(\partial+\bar{\partial})}_{= d^2} = \partial^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) + \bar{\partial}^2 \Rightarrow \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

In particolare $\bar{\partial}^2 = 0$ ($\bar{\partial}$ si dice differenziale di Dolbeault)

$$A^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} A^{0,1} \xrightarrow{\bar\partial} A^{0,2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{0,n} \longrightarrow 0 \qquad (\text{su } \mathbb{C}^n)$$

<u>Notazione</u>:

Indichiamo con $A^{p,q}$ il fascio delle (p,q)-forme.
Essi sono tutti fasci fini. (Causa l'$\exists$ delle partizioni dell'unità)

<u>Oss.</u>:
$\{\operatorname{Ker} \bar\partial : A^{0,0} \to A^{0,1}\} = \mathcal{O}$.

<u>Obiettivo</u>: mostrare che $0 \to \mathcal{O} \to A^{0,0} \to \cdots$ è <u>esatta</u>.

<u>Lemma</u>: 1
Supp. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, classe C^∞ e a supporto compatto.
Poniamo $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} f(z+w) \frac{dw \wedge d\bar w}{w}$ $(*)$
Allora: 1) g è C^∞;
2) $\frac{\partial g}{\partial \bar z} = f$.

<u>Dim</u>:
mostriamo che g è ben definita:
poniamo $w = re^{i\theta} \Rightarrow dw = e^{i\theta} dr + iw\, d\theta$
$$d\bar w = e^{-i\theta} dr - i\bar w\, d\theta = \overline{dw}$$

così $\frac{dw \wedge d\bar w}{w} = -2ie^{-i\theta} dr \wedge d\theta$ e quindi
$$(*) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta\, f(z + re^{i\theta}) e^{-i\theta}$$

$\Rightarrow$ dato che f è a supp(f) cpt l'integrale è finito.

Così $\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z + re^{i\theta}) e^{-i\theta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} dr \ldots \right) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \le |w| \le \frac{1}{\varepsilon}} \int \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z+w) \frac{dw \wedge d\bar w}{w} = +\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint \frac{\partial f}{\partial \bar w}(z+w) \frac{dw \wedge}{w}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint d\left(\frac{f}{w} dw\right) - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|w| = \varepsilon} \frac{f(z+w)}{w} dw = f(z) \quad \left(\text{stesso di Cauchy}\right)$$

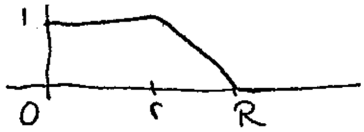
$\blacksquare$

Lemma 2:

$0 < R \leq +\infty$, $\Delta(0,R) \subset \mathbb{C}^n$,
$f \in C^\infty(\Delta(0,R))$. Allora $\forall r < R$ $\exists g : \Delta(0,R) \to \mathbb{C}$ C^∞
tale che $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} = f$ su $\Delta(0,r)$, inoltre se f è olomorfa in $z_{k+1}, \dots, z_n$
$\Rightarrow$ anche g lo è $\left(\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} = 0 \quad i > k\right)$.

Dim:

cons. ψ:



$\psi \in C^\infty([0,+\infty))$
$\psi = 1$ su $[0,r]$
$\psi = 0$ su $[R,\infty)$

$\Rightarrow$ cons. la f.ne $\cancel{f\psi}$ $f(z_1,\dots,z_n)\psi(|z_k|)$ e non è restrittivo supporre che f è definita su $U = \{|z_i| < R,\ i \neq k\}$ e $f \equiv 0$ se $|z_k| \geq R$.
Allora basta cons. $g(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} f(z_1,\dots,z_k+w,\dots,z_n) \dfrac{dw \wedge d\bar{w}}{w}$ e
applico il lemma 1. $\square$

Lemma ($\bar{\partial}$-Poincaré)

$\omega \in A^{(0,q)}(\Delta(0,R))$, $\bar{\partial}\omega = 0$, $q > 0$ $\Rightarrow \forall\, 0 < r < R$, $\exists\, u \in A^{0,q-1}(\Delta(0,\tilde{R}))$
tale che $\bar{\partial} u = \omega$ su $\Delta(0,r)$.

Dim:

Indichiamo con $A^{0,q}_m = \{(0,q)\text{-forme che dipendono solo da } d\bar{z}_1,\dots,d\bar{z}_m\}$
così $\omega \in A^{0,q}_m$ con m scelto più piccolo possibile.
Procediamo per induzione su m:
Se $q > m \Rightarrow \omega = 0$. (OK)
supp. ora $m \geq q$, così $\omega = \alpha + \beta \wedge d\bar{z}_m$ con $\alpha, \beta \in A^{0,*}_{m-1}(\Delta(0,R))$
allora $\beta = \sum_I \beta_I \, d\bar{z}_I$, I multiindice.
Sappiamo che $\bar{\partial}\omega = 0 \Rightarrow$ se $i > m$ si ha $\dfrac{\partial \beta_I}{\partial \bar{z}_i} = 0$, così
ogni β_I è olomorfa in $z_{m+1},\dots,z_n$.
Così per il lemma 2 $\exists\, u_I \in C^\infty(\Delta(0,R))$ t.c. $\dfrac{\partial u_I}{\partial \bar{z}_m} = \beta_I$ su $\Delta(0,r)$
e $\dfrac{\partial u_I}{\partial \bar{z}_i} = 0 \quad i > m$.

a questo punto sia $\eta = (-1)^{q-1}\sum_{I} \eta_I \, d\bar{z}_I$ così

$$\bar{\partial}\eta = \sum_{I} (-1)^{q-1} \beta_I \, d\bar{z}_m \wedge d\bar{z}_I + \gamma \quad , \gamma \in A^{0,q}_{m-1}$$

$$= \beta \wedge d\bar{z}_m + \gamma .$$

$\Rightarrow$ se $\omega_1 = (\omega - \bar{\partial}\eta) \in A^{0,q}_{m-1}$

e $\bar{\partial}\omega_1 = \bar{\partial}\omega - \bar{\partial}^2\eta = 0 \Rightarrow$ per induzione concludo. ■

<u>Lemma di Dolbeault</u>:

$\omega \in A^{0,q}(\Delta(0,R))$, $\bar{\partial}\omega = 0$, $q > 0 \Rightarrow \exists\, \eta \in A^{0,q}(\Delta(0,R))$
t.c. $\omega = \bar{\partial}\eta$.

<u>Dim.</u>: (caso $q \geq 2$) (Nel caso $q=1$ la dim. è diversa)

$r_n \to R$ ($r_n < R$) (costruiamo una succ. di raggi).

<u>Idea</u>: trovare una succ. di forme $\eta_k \in A^{0,q-1}(\Delta(0,R))$ t.c.

1) $\bar{\partial}\eta_k = \omega$ su $\Delta(0, r_k)$ $\Rightarrow$ prendiamo $\eta = \lim_k \eta_k$.
2) $\eta_k = \eta_{k+1}$ su $\Delta(0, r_{k-1})$

Ricorsivamente costruiamo η_k:
prendiamo η_1 t.c. valga 1) ($\bar{\partial}$-Poincaré) e prendiamo $\hat{\eta}_2$ t.c. $\bar{\partial}\hat{\eta}_2 = \omega$ su $\Delta(0, r_2)$,
ora $\bar{\partial}(\hat{\eta}_2 - \eta_1) = 0$ su $\Delta(0, r_1)$, usando $q \geq 2$
si ha che $\exists\, \gamma \in A^{0,q-2}(\Delta(0,r))$ t.c. $\bar{\partial}\gamma = \hat{\eta}_2 - \eta_1$ su $\Delta(0, r_0)$.

$\Rightarrow$ basta porre $\eta_2 = \hat{\eta}_2 - \bar{\partial}\gamma$. E così via...

(modulo dettagli) ■

Corollario:

$X = \Delta(0,R)$, $0 < R \leq +\infty$.

$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \forall i > 0$.

Dim:

Abbiamo la succ. esatta di fasci:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}_X^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{0,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \to \mathcal{A}^{0,n} \to 0$$

e gli $\mathcal{A}_X^{0,i}$ sono tutti fini $\Rightarrow$ aciclici.

Così per il teorema di de Rham astratto si ha

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) = \frac{\{\omega \in A^{0,q}(\Delta(0,R)) \mid \bar\partial\omega = 0\}}{\bar\partial A^{0,q-1}(\Delta(0,R))} = 0.$$

In particolare $H^i(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \forall i > 0$. ∎

Def: (Complesso di Dolbeault)

X varietà complessa. ($\dim X = n$)

$E \xrightarrow{p} X$ fibrato vettoriale olomorfo. ($\mathrm{rg}(E) = r$)

Poniamo $\mathcal{A}^{0,q}(E) := \left\{ \begin{array}{l} (0,q)\text{-forme} \\ \text{a valori in } E \end{array} \right\}$ cioè localmente le sezioni di tale fascio sono $\sum_{i=1}^{r} \omega_i \cdot e_i$, $\omega_i \in \mathcal{A}^{0,q}$, $e_1, \dots, e_r : U \to E$ base locale di sez. olomorfe

Così $\bar\partial : \mathcal{A}^{0,q}(E) \to \mathcal{A}^{0,q+1}(E)$

$$\sum \omega_i e_i \longmapsto \sum \bar\partial\omega_i \cdot e_i$$

tale operatore e' ben definito. Infatti se $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ è un'altra base loc. di E $\Rightarrow e_i = \sum_j g_{ij}\varepsilon_j$, g_{ij} matrice olomorfa.

$$\Rightarrow \sum_i w_i e_i = \sum_{i,j} \omega_i g_{ij} \varepsilon_j \xrightarrow{\bar\partial} \sum_{i,j} \bar\partial(\omega_i g_{ij}) \varepsilon_j = \sum_{i,j} \bar\partial\omega_i \cdot g_{ij}\varepsilon_j = \sum_i \bar\partial\omega_i \cdot e_i.$$

sezioni olomorfe di E

Allora abbiamo:

$$0 \to \mathcal{O}_X(E) \to \mathcal{A}^{0,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{0,1}(E) \to \cdots \to \mathcal{A}^{0,n}(E) \to 0$$

e' esatta di fasci. Ed è una risoluzione aciclica per cui $H^i(X,E) = H^i(X, \mathcal{O}(E))$ (de Rham astratto)

$$\begin{array}{c} \| \\ \text{coomologia } \left(\Gamma(X, \mathcal{A}^{q*}(E)), \bar\partial\right) \end{array}$$

essa viene chiamata coomologia di Dolbeault del fibrato E.

<u>Corollario</u>

Se $\dim X = n$. Allora $H^i(X,E) = 0$ se $i > n$.

Geometria algebrica:

Teorema (Leray)
Sia $\mathcal{F}$ un fascio su X, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ e supp. che $\mathcal{F}$ sia aciclico.
i.e. $\forall\ i_0, \dots, i_m$ si ha $H^p(U_{i_0,\dots,i_m}, \mathcal{F}) = 0\ \forall p > 0$.
Allora in tal caso $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Successioni spettrali:
Si parte da M gruppo abeliano, $d: M \to M$ omo. t.c. $d^2 = 0$.
Cons. $H(M) = \frac{\operatorname{Ker} d}{\operatorname{Im} d}$.
Lavoriamo sotto l'ipotesi di esistenza di una filtrazione decrescente $M \supset \dots \supset F^p \supseteq F^{p+1} \supseteq F^{p+2} \supseteq \dots$, $p \in \mathbb{Z}$
e sotto l'ipotesi che $\bigcup_p F^p = M$, $\bigcap_p F^p = 0$.
E inoltre t.c. $d(F^p) \subset F^p$.
Tale situazione induce una filtrazione in $H(M)$ in modo:

$$\begin{array}{l} HF^p = \text{Immagine}\left(H(F^p) \xrightarrow{i} H(M)\right) \\ \cup \\ HF^{p+1} \\ \cup \\ \vdots \end{array}$$

Oss: $\bigcup_p HF^p = H(M)$, ma in generale $\bigcap_p HF^p \neq 0$. (Esercizio)

Utilità delle successioni spettrali:
Se F^p ha "buone" proprietà allora $\frac{HF^p}{HF^{p+1}}$ si possono "approssimare" in un certo senso.

Def:
Siano $p, r \in \mathbb{Z}$, $A_r^p = \{x \in F^p \mid dx \in F^{p+r}\}$, $A_\infty^p = \{x \in F^p \mid dx = 0\}$

Oss:
$\bigcap_r A_r^p = A_\infty^p$

Def:
$$Z_r^p = \text{Immagine}\left(A_r^p \longrightarrow \frac{F^p}{F^{p+1}}\right) = \frac{A_r^p + F^{p+1}}{F^{p+1}}$$

Oss
se $r \leq 0$ $A_r^p = F^p$

così si ha:

$$Z^p_\infty \subset \cdots \subset Z^p_{r+1} \subseteq Z^p_r \subseteq \cdots \subset Z^p_0 = \frac{F^p}{F^{p+1}}$$

Nota:

$$\bigcap_r Z^p_r \neq Z^p_\infty .$$

Def:

$$B^p_r = \cancel{dA^{p-r+1}_{r-1} + F^{p+1} / F^{p+1}} \subset F^p / F^{p+1} \quad , B^p_\infty = \bigcup_r B^p_r$$

$$\underset{F^p}{\cap}$$

dato che $A^{p-r+1}_{r-1} \subset A^{p-r}_r$ si ha $dA^{p-r+1}_{r-1} \subset dA^{p-r}_r$ e allora si ha:

$$0 = B^p_0 \subseteq \cdots \subseteq B^p_\infty \subseteq Z^p_\infty \subset \cdots \subset Z^p_0 = F^p / F^{p+1}$$

Def:

$$E^p_r = Z^p_r / B^p_r = \frac{A^p_r + F^{p+1}}{dA^{p-r+1}_{r-1} + F^{p+1}} = \frac{A^p_r}{dA^{p-r+1}_{r-1} + (F^{p+1} \cap A^p_r)} = \frac{A^p_r}{dA^{p-r+1}_{r-1} + A^{p+1}_{r-1}}$$

Filosofia:

Se $\{F^p\}$ e' "buona" $\Rightarrow$ " $\lim_{r\to\infty} E^p_r = E^p_\infty = \frac{HF^p}{HF^{p+1}}$ "

Oss:

$d : A^p_r \longrightarrow A^{p+r}_r \quad (d(dx) = 0 \in F^{p+2r})$

supp. che $x \in dA^{p-r+1}_{r-1} + A^{p+1}_{r-1} \Rightarrow x = du + v \Rightarrow dx = dv \in dA^{p+1}_{r-1}$

$\rightsquigarrow$ il d induce $d_r : E^p_r \longrightarrow E^{p+r}_r \ \forall p, r.$ così $d_r^2 = 0$.

$$\frac{A^p_r}{dA^{p-r+1}_{r-1} + A^{p+1}_{r-1}} \qquad \frac{A^{p+r}_r}{dA^{p+1}_{r-1} + A^{p+r+1}_{r-1}}$$

Teorema: (Fatto fondamentale)

$\exists$ un isomorfismo $E^p_{r+1} = \frac{\operatorname{Ker} d_r : E^p_r \longrightarrow E^{p+r}_r}{d_r(E^{p-r}_r)}$

Dim:

Sia $[x] \in E^p_r$ t.c. $d_r[x] = 0 \in E^{p+r}_r$, $x \in A^p_r$, cioè $dx \in dA^{p+1}_{r-1} + A^{p+r+1}_{r-1}$,

$\Rightarrow dx = dy + z \Rightarrow x - y \in A^p_r$ poiché $y \in A^{p+1}_{r-1}$

così $z = d(x-y) \in dA^p_r \cap A^{p+r+1}_{r-1} \Rightarrow x - y \in F^p, d(x-y) \in F^{p+r+1}$

$\Rightarrow x - y \in A^p_{r+1} \Rightarrow x = y + (x-y) \in A^{p+1}_{r-1} + A^p_{r+1}$

Esempio:

X varietà complessa di $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$

- $A_X^{p,q} := \{(p,q)\text{-forme su } X\}$;
- d differenziale di de Rham $= \partial + \bar{\partial}$;
- Filtrazione di Hodge;
- $M = \bigoplus_{p,q \geq 0} A_X^{p,q}$, $d: M \to M$.

La Filtrazione di Hodge è definita come:

$$F^p = \bigoplus_{\substack{i \geq p \\ j}} A_X^{i,j} = \{\sum \varphi_I \underbrace{dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k}}_{k \geq p} \wedge d\bar{z} \dots\}$$

$$M = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \dots \supseteq F^n \supset F^{n+1} = 0.$$

$$M^n = \bigoplus_{p+q=n} A_X^{p,q} \quad , \quad F^p \cap M^n = \bigoplus_{i \geq p} A_X^{i,n-i}$$

$$E_0^{p,q} = F^p / F^{p+1} = \bigoplus_j A_X^{p,j}$$

$$E_0^{p,q} = A_X^{p,q} \quad , \quad d_0 : E_0^{p,q} \longrightarrow E_0^{p+0,q-0+1} = E_0^{p,q+1} = A^{p,q+1}$$

$\Rightarrow d_0 = \bar{\partial}$ (a meno del segno senza fare i conti)

$$E_1^{p,q} = H^q_{\bar{\partial}}(A_X^{p,*})$$

Oss:

$A_X^{p,q} = \Gamma(X, A^{0,q}(\Omega^p))$ (volta prossima)

$$E_\infty^{p,q} = \{[x] \subset H_d^{p+q}(X, \mathbb{C}) \mid x \in A^{p,q}, dx = 0\}$$

Teorema:

$X \subset \mathbb{P}^n$. Allora $d_r = 0$ se $r \geq 1$.

Quindi $H^*(X, \mathbb{C}) = \bigoplus H_{\bar{\partial}}(A)$

Viceversa se $\alpha \in A^{p+1}_{r-1} \subset A^p_r$, $d\alpha \in dA^{p+1}_{r-1}$, $d_r[\alpha]=0$.

$\beta \in A^p_{r+1} \Rightarrow d\beta \in A^{p+r+1}_{r-1} \Rightarrow d_r[\beta]=0$.

Ne segue che $\operatorname{Ker} d_r = \dfrac{A^{p+1}_{r-1} + A^p_{r+1}}{dA^{p-r+1}_{r-1} + A^{p+1}_{r-1}}$

Inoltre $d_r E^{p-r}_r = \{dx \mid x \in A^{p-r}_r\} = \dfrac{dA^{p-r}_r + A^{p+1}_{r-1}}{dA^{p-r+1}_{r-1} + A^{p+1}_{r-1}}$

A questo punto $\dfrac{\operatorname{Ker} d_r}{d_r E^{p-r}_r} = \dfrac{A^{p+1}_{r-1} + A^p_{r+1}}{dA^{p-r}_r + A^{p+1}_{r-1}} = \dfrac{A^p_{r+1}}{dA^{p-r}_r + (A^{p+1}_{r-1} \cap A^p_{r+1})} =$

$$= \frac{A^p_{r+1}}{dA^{p-r}_r + A^{p+1}_r} = E^p_{r+1}.$$

$\blacksquare$

Oss:

$$E^p_0 = \frac{A^p_0}{dA^{p+1}_{-1} + A^{p+1}_{-1}} = \frac{F^p}{dF^{p+1} + F^{p+1}} = \frac{F^p}{F^{p+1}}$$

$d_0 : E^p_0 \longrightarrow E^{p+0}_0 = E^p$

$$\frac{F^p}{F^{p+1}} \xrightarrow{d} \frac{F^p}{F^{p+1}} \Rightarrow E^p_1 = H\left(\frac{F^p}{F^{p+1}}\right).$$

Nota: sono facilmente descrivibili $E_0, E_1, E_\infty = \dfrac{HF^p}{HF^{p+1}}$ ← quasi sempre.

Supponiamo adesso che $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n$ e che $d : H^n \to H^{n+1}$ e che

$F^p = \bigoplus_n (F^p \cap H^n)$ (graduato $\forall p$).

Allora $A^p_r = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} A^{p,q}_r$ dove $A^{p,q}_r = \{x \in F^p \cap H^{p+q} \mid dx \in F^{p+r} \cap H^{p+q+1}\}$

Così $E^p_r = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} E^{p,q}_r$ dove $E^{p,q}_r = \dfrac{A^{p,q}_r}{dA^{p-r+1,q+r-2}_{r-1} + A^{p+1,q-1}_{r-1}}$

$\Rightarrow d_r : E^{p,q}_r \longrightarrow E^{p+r,q-r+1}_r$, $r \geq 0$

Ipotesi di lavoro:

i) $F^0 = H = F^p$, $p<0$. ii) $F^p \cap H^n = 0$, $p>n$.

Geometria algebrica

<u>Complesso filtrato</u>: $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n$, $d: M^n \to M^{n+1}$

$\exists \{F^p \subset M$, sottocomplessi t.c. $F^p \supset F^{p+1} \supset \ldots\}$

<u>Utilità</u> succ. spettrali:
Studiare $H^*(M)$ conoscendo $H^*(F^p/F^{p+1})$
<u>Esempio</u>: $M = F^0 \supset F^1 \supset F^2 = 0$
$\rightsquigarrow 0 \to F^1 \hookrightarrow M = F^0 \to F^0/F^1 \to 0$ è esatta
$\Rightarrow$ passando alla <u>succ. esatta lunga in coomologia</u>
si ottengono risultati.

<u>Def</u>: $[\cap F^p = 0 \, ; \, \cup F^p = M]$

$A_r^{p,q} := \{x \in F^p M^{p+q} \mid dx \in F^{p+r} M^{p+q+1}\}$

$A_\infty^{p,q} := \{x \in F^p M^{p+q} \mid dx = 0\}$

$B_r^{p,q} := dA_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} = A_r^{p,q} \cap dF^{p-r+1}$

$B_\infty^{p,q} := A_\infty^{p,q} \cap dM$

$E_r^{p,q} := \dfrac{A_r^{p,q}}{B_r^{p,q} + A_{r-1}^{p+1,q-1}}$, $r = 0, \ldots, \infty$

<u>Nota</u>: $\forall\, r$ d induce $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r, q-r+1}$, tale che

$$\frac{\mathrm{Ker}\, d_r}{\mathrm{Im}\, d_r} = E_{r+1}^{p,q}.$$

<u>Capiamo i casi $r = 0, \infty$:</u>
Per $r = 0$ si ha $E_0^{p,q} = \dfrac{A_0^{p,q}}{dA_{-1}^{p+1,q-2} + A_{-1}^{p+1,q-1}} =$

$$= \frac{F^p M^{p+q}}{F^{p+1} M^{p+q}}$$

per $r = \infty$ si ha ricordando che $E_\infty^p = \dfrac{A_\infty^p}{B_\infty^p + A_\infty^{p+1}} = \dfrac{\{x \in F^p \mid dx = 0\}}{\{F^p \cap dM\} + \{x \in F^{p+1} \mid dx = 0\}}$

indichiamo con $F^p H(M)$: immagine $H^*(F^p) \to H^*(M) \Rightarrow$ si ha
che $E_\infty^p \cong \dfrac{F^p H(M)}{F^{p+1} H(M)}$.

infatti considerando

$$A^p_\infty \longrightarrow \frac{F^pH(M)}{F^{p+1}H(M)}$$

chiaramente è suriettiva.
Inoltre un elemento va a zero se o sta in B^p_∞ o sta in A^{p+1}_∞
$\Rightarrow$ si ha l'isomorfismo enunciato prima.

<u>In pratica</u>: "sotto opportune ipotesi" $\forall\, p,q\ \exists\, r$ tale che

$$E_s^{p,q} = E_\infty^{p,q} \quad \forall\, s \geq r.$$

In tal caso $E_r^{p,q} \xRightarrow{\text{tende}} H^{p+q}(M)$

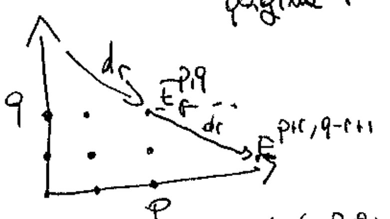
<u>Definizione</u>:
Se $F^0 = M = \oplus M^n$ ed $F^p \cap M^n = 0\ \forall\, p > n$ diremo che la filtrazione è <u>regolare</u>.

<u>Nota</u>: $E_0^{p,q} = \dfrac{F^pM^{p+q}}{F^{p+1}M^{p+q}}$

$\neq 0$ solo se $p,q \geq 0$

si parla di succ. spettrale nel primo quadrante.

pagina r



non appena $r-1 > q \Rightarrow d_r(E_r^{p,q}) = 0$
$r > p \Rightarrow d_r(E_r^{p-r,*}) = 0$

così se $r > \max(p,q)$ si ha $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \dots$

vogliamo vedere chi sono $E_\infty^{p,q}$.

<u>Prop</u>:
Sia F una filtrazione regolare $\Rightarrow$ per $r \gg 0$ $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

<u>Dim</u>:
$A_r^{p,q} = \{x \in F^pM^{p+q} \mid dx \in F^{p+r}M^{p+q+1}\} = A_\infty^{p,q}$ non appena $r > q+1$.

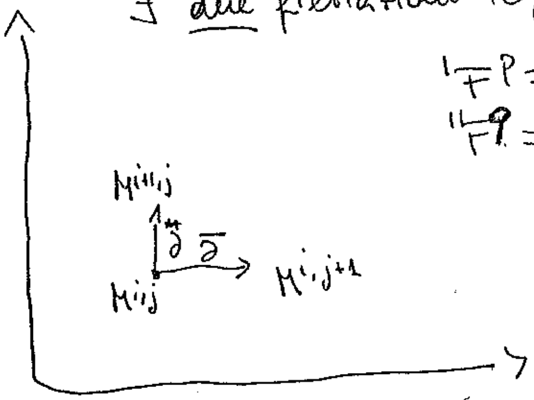
$F^0 = M$, $F^p \cap dM = F^p \cap dF^0 = d(A^0_p) = B^p_{p+1} = B^p_\infty$.

Esempio: (Complesso doppio.)

$M=\bigoplus_{i,j\geq 0} M^{i,j}$, $d=\partial+\bar\partial$, $\partial: M^{i,j}\longrightarrow M^{i+1,j}$, $\bar\partial: M^{i,j}\longrightarrow M^{i,j+1}$

in tal caso $\exists$ due filtrazioni regolari:

$${}^{I}F^p=\bigoplus_{i\geq p} M^{i,j}$$
$${}^{II}F^q=\bigoplus_{j\geq q} M^{i,j}$$



$\Rightarrow F^pM^n=\bigoplus_{i\geq p} M^{i,n-i}=0$ se $p>n$ (regolarità)

$\Rightarrow$ si hanno due successioni spettrali ${}^{I}E_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q}\Longrightarrow H(M)$.

Teorema di Leray:
X paracompatto di Hausdorff. $\mathcal{F}$ fascio su X, $\mathcal{U}=\{U_i\}$ ric. aperto loc. finito.
Allora esiste una succ. spettrale in cui $E_1^{p,q}\Rightarrow H^{p+q}(X,\mathcal{F})$?

$$E_1^{p,q} = \prod_{i_0,\dots,i_p} H^q(U_{i_0\dots i_p},\mathcal{F})$$

Dim:
Sia $0\to\mathcal{F}\to F_0\xrightarrow{d}F_1\xrightarrow{d}F_2\to\cdots$ ris. ~~aciclica~~ fiacca di $\mathcal{F}$.
ogni F_i è fiacco $\forall i$ e tale succ. è esatta.
(avevamo visto che se $\mathcal{F}$ è fiacco $\Rightarrow H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ $p>0$)
Dal teorema di de Rham astratto si ha $H^*(X,\mathcal{F})=H^*(\Gamma(X,F^*),d)$
Passiamo ai complessi di Cech:

$$\begin{array}{ccccc}
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
C^0(\mathcal{U},F^1) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U},F^1) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U},F^1) \\
\uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
C^0(\mathcal{U},F^0) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U},F^0) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U},F^0) \\
\uparrow & & & &
\end{array}
\qquad \boxed{d\delta=\delta d}$$

diventa un complesso doppio con il diff. $\delta+(-1)^k d: C^k(\mathcal{U},F^i)\longrightarrow C^{k+1}(\mathcal{U},F^i)\oplus$
così $d\delta+\delta d=0$.

consideriamo ora la prima filtrazione:

$$'F^p = \bigoplus_{i \geq p} C^*(\mathcal{U}, F^i)$$

$$'E_0^p = C^*(\mathcal{U}, F^p) \quad \left(= F^p / F^{p+1} \right)$$

$$\delta = d_0 : 'E_0^p \longrightarrow 'E_0^p$$

Allora $'E_1^p = H^*(\mathcal{U}, F_p) \Rightarrow 'E_1^{p,0} = \Gamma(X, F_p)$

$$d_1 : 'E_1^{p,0} \longrightarrow 'E_1^{p+1,0}$$

$$\overset{\shortparallel}{\pm d} \text{ (poiché è indotto da } d\text{)}$$

$\Rightarrow 'E_2^{p,0} = H^p(X, \mathcal{F})$ mentre $'E_2^{p,i} = 0$ se $i \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
E_2^{p-2,1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 'E_2^{p,0} \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, equal] & 'E^{p+2,-1} \arrow[d, equal] \\
0 & 'E_3^{p,0} & 0
\end{tikzcd}$$

$$\vdots$$

$$'E_\infty^{p,0} = 'E_2^{p,i}$$

~~Allora~~ $\cancel{H^p(C(\mathcal{U}, F^*))}$

La filtrazione indotta su $H^n(C(\mathcal{U}, F^*))$ è tale che i singoli quozienti sono dati da $E_\infty^{p,q}$, $p+q=n$ (tutti nulli tranne uno)
$\Rightarrow H^n(C^*(\mathcal{U}, F^*)) = H^n(X, \mathcal{F})$. (Abbiamo ritrovato la coomologia del fascio $\mathcal{F}$)

Usando l'altra filtrazione si ha:

$$''F^p = \bigoplus_{i \geq p} C^i(\mathcal{U}, F^*)$$

$$''E_0^p = C^p(\mathcal{U}, F^*) = \prod_{i_0, \dots, i_p} F^*(U_{i_0, \dots, i_p})$$

$$''E_1^p = \prod_{i_0, \dots, i_p} H^*(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{F}) \quad (\text{coomologia di } F^*(U_{i_0, \dots, i_p}))$$

allora $''E_1^{p,q} = \prod_{i_0, \dots, i_p} H^q(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{F})$.

Corollario:

Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia $\mathcal{F}$ aciclico $\Leftrightarrow E_1^{p,q} = 0 \quad \forall q > 0$

Allora $E_1^{p,0}$ sono gli unici $\neq 0$. Così per i ragionamenti precedenti si ha $H^p(X, \mathcal{F}) = {}''E_2^{p,0} = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

$$\begin{array}{ccccc}
E_1^{p-1,0} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{p,0} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{p+1,0} \\
 & & \| & & \\
 & & \prod_{i_0 \dots i_p} H^0(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}) & & \\
 & & \| & & \\
C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})
\end{array}$$

Geometria algebrica:

$$H^i(\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^*)^m, \mathcal{O}_X) \quad , \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

coord. $z_1, \dots, z_n$; $u_1, \dots, u_m$; $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^*)^m = X$

Nota: $X = \mathbb{C}^{n+m} - \bigcup_{i=1}^m H_i$, $H_i = \{u_i = 0\}$ iperpiano.

L'idea per calcolare questa coomologia è di usare l'ind. su m:

Per $m=0$ si ha $H^i(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$, allora

$H^0(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = \{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ olomorfe}\} = \{f \text{ intere}\}$

Così $f \in H^0(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \Longleftrightarrow f = \sum_{i_1 \dots i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$ conv. su $\mathbb{C}^n$.

$H^i(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$ se $i > 0$ (Grazie al Teorema di Dolbeault)

Infatti avevamo su $\mathbb{C}^n$ il complesso di Dolbeault:

(esatta) $\quad 0 \to \mathcal{O}_X \to A_X^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} A_X^{0,1} \to \cdots \to A_X^{0,n} \to 0$

inoltre è una risoluzione fine di $\mathcal{O}_X$.

Allora per de Rham astratto avevamo che:

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = \frac{\operatorname{Ker} \bar\partial : \Gamma(X, A^{0,i}) \to \Gamma(X, A^{0,i+1})}{\bar\partial \Gamma(X, A^{0,i-1})}$$

e se $X = \Delta(0,R)$, $0 < R \leq \infty \Rightarrow$ avevamo $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \ \forall$

Quindi in particolare vale per $\mathbb{C}^n = \Delta(0, \infty)$.

Vediamo cosa succede se $m > 0$.

Per $m=1$: poniamo per ora $n=0 \Rightarrow X = \mathbb{C}^*$

Pensiamo X come un'iperbole: $X \cong \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \cdot y = 1\}$

Sono isomorfi a livello di varietà complesse.

Così $X = \{f = 0\}$ dove $f \in H^0(\mathbb{C}^2, \mathcal{O})$, $f = z_1 z_2 - 1$.

abbiamo $\frac{\partial f}{\partial z_1} = z_2$, $\frac{\partial f}{\partial z_2} = z_1 \Rightarrow$ in $p \in X$ non sono entrambi nulli

$\Rightarrow$ essendo il gradiente non singolare si ha che X è complessa.

Su $\mathbb{C}^2$ cons. il seguente <u>morfismo di fasci</u>:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \xrightarrow{\cdot f} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \quad \text{(a livello di germi)}$$
$$g \longmapsto f \cdot g$$

esso è iniettivo (poiché vale il principio d'identità)

Cons. il complesso:

(ottengo 0 quando compongo con f)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \xrightarrow{|_X} i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

essa è una succ. esatta (con un abuso di notazione)

[Stiamo cons. $\mathcal{O}_X$ come un fascio su $\mathbb{C}^2$, se $U \subset \mathbb{C}^2 \Rightarrow$
$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(X \cap U)$]

Chi è $\mathcal{O}_X$?

È il fascio su X associato al seguente prefascio:

~~$\mathcal{F}(X \cap U)$~~ $V \subset X$ aperto, $\mathcal{F}(V) = \{ f|_V \mid f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U),\ U \subset \mathbb{C}^2$ aperto $V \subset U$

Così gli elementi di $\mathcal{O}_X$ sono le f.ni che loc. sono la restrizione ad X di f.ni olomorfe su $\mathbb{C}^2$.

Chi è $i_*\mathcal{O}_X$ fascio su $\mathbb{C}^2$?

sia $\varphi : X \longrightarrow Y$ continua $\Rightarrow \varphi_* : \{$fasci su $X\} \longrightarrow \{$fasci su $Y\}$
$\Rightarrow \varphi^{-1} : \{$fasci su $Y\} \longrightarrow \{$fasci su $X\}$

con φ_* definito nel modo seguente:

sia $\mathcal{F}$ fascio su X, $U \subset Y$ aperto.

Allora $U \longrightarrow \varphi^{-1}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$, questo è il fascio $\varphi_*(\mathcal{F})$. (Si vede che è un fascio)

Mentre φ^{-1} è un po' più complicato.

Per def. φ^{-1} supp. di avere $\mathcal{G}$ fascio su Y.
Sia $U\subset X$ aperto, in genere $\varphi(U)$ non è aperto.

Definiamo $\hat{\mathcal{G}}(U) = \varinjlim_{\varphi(U)\subset V} \mathcal{G}(V) = \dfrac{\{(V,\alpha) \mid V\subset Y \text{ aperto}, \varphi(U)\subset V,\ \alpha\in\mathcal{G}(V)\}}{\sim}$

con $(V,\alpha)\sim(W,\beta) \iff \exists\, Q\subset Y$ aperto t.c. $\varphi(U)\subset Q\subset V\cap W$ con $\alpha|_Q=\beta|_Q$.

$\hat{\mathcal{G}}$ è un prefascio su X. Così definiamo $\varphi^{-1}(\mathcal{G}) = \hat{\mathcal{G}}^+$

<u>Osservazione 1)</u>

Sulle spighe si ha che se $x\in X \Rightarrow (\varphi^{-1}(\mathcal{G}))_x \simeq \mathcal{G}_{\varphi(x)}$,

mentre in generale se $y\in Y$, $\mathcal{F}$ fascio su X, allora

$(\varphi_*\mathcal{F})_y = ?$.

<u>Caso 1</u>: supponiamo che $y\notin \overline{\varphi(X)}$. Allora $\exists$ un sistema fondamentale di intorni di $y\in V$, t.c. $\varphi^{-1}(V)=\emptyset$.

$\Rightarrow (\varphi_*\mathcal{F})(V)=0 \Rightarrow (\varphi_*\mathcal{F})_y=0$.

<u>Caso 2</u>: $\varphi: X\to Y$

2.1: φ immersione aperta $\Rightarrow X\subset Y$ aperto

2.2: φ immersione chiusa $\Rightarrow X\subset Y$ <u>chiuso</u> (caso dell'iperbole in $\mathbb{C}^2$)

2.1) $X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} Y$ aperto $\rightsquigarrow \varphi^{-1}\mathcal{G}$ funziona bene poiché $U\subset X$ aperto $\Rightarrow \varphi(U)$ aperto $\Rightarrow \hat{\mathcal{G}}(U)=\mathcal{G}(U)$ che è già fascio

$\Rightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}|_X$.

2.2) $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ chiuso, $\mathcal{F}$ fascio su X

$i_*\mathcal{F} = ?$

<u>Teorema</u>:

$H^*(X,\mathcal{F}) = H^*(Y, i_*\mathcal{F})$ <u>con i immersione chiusa</u>.

Ritorniamo a $i_*\mathcal{F}$.

Se $y\notin X \Rightarrow y\notin\overline{X} \Rightarrow (i_*\mathcal{F})_y = 0$.

supp. quindi $x \in X$. Allora

$$(i_*\mathcal{F})_x = \varinjlim_{x\in V\subset Y} i_*\mathcal{F}(V) = \varinjlim \mathcal{F}(\underset{i^{-1}(V)}{\underbrace{V\cap X}}) = \mathcal{F}_x .$$

Allora qui le cose funzionano bene.

<u>Dim</u> (Teorema)

<u>Lemma</u>:

$\mathcal{F}$ fiacco su $X \underset{i \text{ chiusa}}{\hookrightarrow} Y$. Allora $i_*\mathcal{F}$ è fiacco su Y.

<u>Dim</u>:

Sia $V \subset Y$ aperto.

Tesi: $(i_*\mathcal{F})(Y) \overset{?}{\twoheadrightarrow} (i_*\mathcal{F})(V)$

$$\begin{tikzcd}
(i_*\mathcal{F})(Y) \arrow[r, two heads, "?"] \arrow[d, equal] & (i_*\mathcal{F})(V) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{F}(X\cap Y) \arrow[d, equal] & \mathcal{F}(X\cap V) \\
\mathcal{F}(X) \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

Inoltre $\Gamma(Y, i_*\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Cons. la ris. fiacca $0 \to \mathcal{F} \to F_0 \to F_1 \to \cdots$ (canonica)

Applico i_* : $0 \to i_*\mathcal{F} \to i_*F_0 \to i_*F_1 \to \cdots$ (cont. ad essere fi

(Per l'esattezza è importante che i sia chiusa)

$\Rightarrow$ usando <u>de Rham</u> si ha $H^*(X,\mathcal{F}) = H^*($ - - - -

$$H^p(Y, i_*\mathcal{F}) = \frac{\operatorname{Ker}: \Gamma(Y, i_*F_p) \to \Gamma(Y, i_*F_{p+1})}{\operatorname{Im}(\quad)} =$$

$$= \frac{\operatorname{Ker}: \Gamma(X, F_p) \to \Gamma(X, F_{p+1})}{\operatorname{Im}(\quad)} = H^p(X, \mathcal{F})$$

<u>Morale</u>: $\mathcal{F}$ e $i_*\mathcal{F}$ sono la stessa cosa quando i è un'immersione chiusa.

torniamo al discorso iniziale:

Y var. complessa
$\overset{i}{\hookuparrow}$
X sottovarietà . Abbiamo un morfismo di fasci

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{r} i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

con $r(f) = f|_X$, più precisamente se $f \in \mathcal{O}(U)$, $U \subset Y$
$\Rightarrow f \longmapsto f|_X \in \mathcal{O}_X(X \cap U) = i_*\mathcal{O}_X(U)$.

Con l'abuso di notazione $i_*\mathcal{O}_X$ diventa $\mathcal{O}_X$.

Il nucleo di r è $I_X = \{ f \mid f|_X = 0 \}$, così abbiamo

$$0 \longrightarrow I_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Supponiamo adesso che $X = \{ f = 0 \}$, $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$
(Naturalmente Y non compatta e $df \neq 0$ su X)

Allora:
$$0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\cdot f} \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \quad \text{è \underline{esatta}}$$

<u>Teorema</u>:
Supponiamo $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \ \forall i > 0$. Allora

1) $\qquad H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^0(X, \mathcal{O}_X) \to 0$

2) $\qquad H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad$ se $i > 0$.

<u>Dim</u>:
Cons: $0 \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{f} H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^0(X, \mathcal{O}_X) \to \underset{=0}{H^1(Y, \mathcal{O}_Y)} \to \cdots$

$$\cdots \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^i(Y, \mathcal{O}_Y)} \to H^i(X, \mathcal{O}_X) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^{i+1}(Y, \mathcal{O}_Y)}$$

Geometria algebrica:

$X = \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^*)^m$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$z_1, \dots, z_n$ ↑ , $u_1, \dots, u_m$ ↑ coordinate.

vogliamo studiare $H^i(X, \mathcal{O}_X)$.

Teorema:

$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ se $i > 0$

$H^0(X, \mathcal{O}_X) = \left\{ \sum_{\substack{i_1 \dots i_n \in \mathbb{N} \\ j_1 \dots j_m \in \mathbb{Z}}} a_{i_1 \dots j_m} z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} u_1^{j_1} \dots u_m^{j_m} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{conv. totalmente} \\ \text{sui compatti} \end{array} \right\}$

Dim:

Per induzione su m.

Per $m = 0$ si ha $X = \mathbb{C}^n$. Allora

$H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) = \{f. \text{ni intere}\}$ (usare la formula di Cauch

$H^i(X, \mathcal{O}_X) = \dfrac{(0,i)\text{-forme } \bar\partial\text{-chiuse}}{\bar\partial\text{-esatte}}$ (Teorema di Dolbeault)

$= 0$ (poiché X è un polidisco)

Supponiamo ora $m > 0$;

indichiamo con $Y = \underset{z_i}{\mathbb{C}^n} \times \underset{w_1, w_2}{\mathbb{C}^2} \times \underset{u_1, \dots, u_{m-1}}{(\mathbb{C}^*)^{m-1}}$

per ipotesi induttive sappiamo che $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ e

$H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \cdots$

in particolare $\underset{f}{1 - w_1 \cdot w_2} \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Così $X \simeq \{f = 0\} \subset Y$. Infatti sia

$i : X \longrightarrow Y$

$(z_I, u_J) \overset{\sim}{\hookrightarrow} (z_I, \underset{w_1}{u_m}, \underset{w_2}{\tfrac{1}{u_m}}, u_J)$

Detto ciò abbiamo la succ. esatta di fasci:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\cdot f} \mathcal{O}_Y \longrightarrow i_* \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ abbiamo in coomologia: $\longrightarrow$

$$0 \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\cdot f} H^0(Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \overset{\text{perché } i \text{ è chiusa}}{H^0(X,\mathcal{O}_X)} \longrightarrow \underset{\text{per ind}}{H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=0}$$

$$\Rightarrow \overset{i>0}{\dashrightarrow} H^i(Y,\mathcal{O}_Y) \overset{0}{=} \to H^i(X,\mathcal{O}_X) \to H^{i+1}(Y,\mathcal{O}_Y)=0$$

Così $H^i(X,\mathcal{O}_X)=0$, se $i>0$, inoltre

$$H^0(X,\mathcal{O}_X) \underset{\text{iso indotto da } i}{\cong} \frac{H^0(Y,\mathcal{O}_Y)}{(f)}$$
← pensato come anello
← pensato come ideale.

vediamo prima il caso $\underset{u}{\mathbb{C}^*} \overset{i}{\hookrightarrow} \underset{w_1,w_2}{\mathbb{C}^2} \Rightarrow$ se abbiamo una f.ne olomorfa $\alpha = \sum_{i,j\geq 0} \alpha_{ij} w_1^i w_2^j$.

Allora $\alpha \circ i = \sum_{i,j\geq 0} \alpha_{ij} u^i \left(\frac{1}{u}\right)^j = \sum_{i,j\geq 0} \alpha_{ij} u^{i-j} = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i-j=h} \alpha_{ij}\right) u^h$

e analogamente nel caso generale.

Applicazioni:

Teorema:

$\mathbb{P}^n$, $\mathcal{O}(k)$ $k\in\mathbb{Z}$

$$\dim H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(k)) = \begin{cases} \binom{n+k}{n} & i=0,\ k\geq 0 \\ 0 & i\neq n \\ \binom{-k-1}{n} & i=n,\ k\leq -n-1. \end{cases}$$

~~se~~ $k\neq 0$

inoltre $\dim H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(k)) = \dim H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1-k))$

in particolare $\neq 0$ per $i=n$ e $k\leq -n-1$. (Dualità di Serre)

Dim:

Ricordo chi erano gli $\mathcal{O}(k)$ su $\mathbb{P}^n$:

Esercizio: $N = \{\text{pol. numerici}\} \subset \mathbb{Q}[t]$ è un gruppo abeliano libero con base $\binom{t}{n}$, $n\geq 0$.

Sugg.: per induzione sul grado.

$\mathcal{O}(k)$ = fascio delle sezioni olomorfe del fibrato ~~$\mathcal{O}(k)$~~ E_k con

$$\underset{(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}/\sim}{E_k} \xrightarrow{p} \underset{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}/\sim}{\mathbb{P}^n}$$

con $(x_0, \dots, x_n, t) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n, \lambda^k t)$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$

Indichiamo ora con $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$
$x \longrightarrow [x]$

$$\begin{tikzcd} \varphi : \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\times\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[d] \\ \tilde{p}=p : E_K \arrow[r, "p"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

<u>Ricordo:</u> $U\subset\mathbb{P}^n$ aperto. Allora $\Gamma(U,\mathcal{O}(k))\cong\{f\in\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) \mid f(\lambda x)=\lambda^k f(x)\ \forall\lambda\in\mathbb{C}^*\}$
(sostanzialmente le sezioni globali sono (H^0) i polinomi omogenei di grado k)

Sia $A\subset\{0,\dots,n\}$ sottoinsieme, indichiamo con

$$U_A := \{[x_0,\dots,x_n]\in\mathbb{P}^n \mid x_i\neq 0 \text{ se } i\in A\}$$

così $U_\phi=\mathbb{P}^n$, se $A=\{k\} \Rightarrow U_A=U_k=\{x \mid x_k\neq 0\}$ ← uno degli aperti affini solito.
in generale sto facendo tutte le intersezioni degli aperti affini.
<u>Nota:</u> $U_A\cong\mathbb{C}^a\times(\mathbb{C}^\times)^{n-a}$ se $A\neq\phi$, $a=|A^c|$
Dunque $\mathcal{U}=\{U_0,U_1,\dots,U_n\}$ è un ric. aciclico di $\mathbb{P}^n$ per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$.
Infatti $H^i(U_A,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})=0\ \forall i>0,\ \forall A$.
E lo stesso risultato è vero anche per il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(K)$ perché su ogni aperto è banale. Infatti

$$\begin{tikzcd} E_K|_{U_0} \cong (1,x_1,\dots,x_n,t) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\cong"] & U_0\times\mathbb{C} \\ U_0 \quad (1,x_1,\dots,x_n) & \end{tikzcd}$$

(aver fissato 1 mi fa fissare λ).

allora per il teorema di Leray:
$H^*(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(k))$ è la stessa di

$$0\longrightarrow\prod_{i=0}^n\Gamma(U_i,\mathcal{O}(k))\xrightarrow{\delta}\prod_{i<j}\Gamma(U_{ij},\mathcal{O}(k))\longrightarrow\cdots\longrightarrow\Gamma(U_{01\dots n},\mathcal{O}_k)\to 0$$

$A\subset\{0,\dots,n\}$

$$C_A:=\Gamma(U_A,\mathcal{O}(k))=\left\{\sum a_{\dots}x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n} \;\middle|\; \begin{array}{l} i_0+\dots+i_n=k \\ i_j\geq 0 \text{ se } j\notin A\end{array}\right\}$$

$$\pi^{-1}(U_a)\cong\{x\in\mathbb{C}^{n+1} \mid x_i\neq 0\ \forall i\in A\}$$

Complesso di Čech:

$$0\longrightarrow\prod_{|A|=1}C_A\xrightarrow{\delta}\prod_{|A|=2}C_A\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_{\{0,\dots,n\}}\longrightarrow 0$$

ora se $f \in \prod_{|A|=k} C_A$, $|B|=k+1$. Allora $(B=(b_0<b_1<\cdots<b_{k+1})$

$$(\delta f)_B = \sum_{h=0}^{k+1} (-1)^h \cdot f_{B-\{b_h\}}$$

Supponiamo $k \geq n$ così:

$\forall\, h=0,\dots,n$ definiamo $P_h : C_A \to C_A$, $A \neq \phi$. lineare in modo da dover definire P_h solo sul monomio:

$$P_h(x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_h<0 \\ \dfrac{x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}}{\#\{j \mid i_j \geq 0\}} & \text{se } i_h \geq 0. \end{cases}$$

allora $\sum_{h=0}^{n} P_h = Id_{C_A}$ $\forall A$

Voglio mostrare che $P_h \sim 0$ in grado ≥ 1, così $\exists\, K_h : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{O}(k)) \to C^{*-1}$ t.c. $\delta K_h + K_h \delta = P_h : C^i \to C^i$, $i \geq 1$. $\Rightarrow H^i = 0$, $i \geq 1$.

(

Geometria algebrica:

/ 23/05 /

$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ $\quad \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la proiezione naturale

$U \subset \mathbb{P}^n$ un aperto. Allora:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}(k)) = \{ f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) \mid f(\lambda x) = \lambda^k f(x), \lambda \in \mathbb{C}^* \}$$

ad esempio i polinomi omogenei di grado k sono sezioni.

Ricordiamo cosa avevamo fatto la volta scorsa:

$A \subset \{0, \dots, n\}$, $U_A = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0 \ \forall i \in A\}$.

In particolare se $A = \{h\} \Rightarrow U_A = U_h \simeq \mathbb{C}^n$ (aperto affine std.)

Oss:

$A = \{i_0 < i_1 < \dots < i_h\} \Rightarrow U_A = U_{i_0, \dots, i_h}$.

Inoltre se $A \neq \emptyset \Rightarrow U_A \simeq \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$, $k = n+1-|A|$. E sempre in tal caso $\pi^{-1}(U_A) = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k+1}$.

In più $\mathcal{O}(k)$ è banale ($\simeq \mathcal{O}_X$) su U_A.

$\Rightarrow H^i(U_A, \mathcal{O}(k)) = 0$ se $A \neq \emptyset$ e $i > 0$.

Così per il teorema di Leray si ha che $H^*(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ è calcolata dal complesso $(\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0,\dots,n})$ $C^*_<(\mathcal{U}, \mathcal{O}(k)) =$

$$= \prod_{|A|=1} C_A \xrightarrow{\delta} \prod_{|A|=2} C_A \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C_{\{0,\dots,n\}} \to 0$$

con $C_A = \Gamma(U_A, \mathcal{O}(k))$.

Avevamo anche visto che $C_A = \{ \sum \overset{\text{convergenti}}{a_*} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \mid \begin{matrix} i_0 + \dots + i_n = k \\ i_a \geq 0 \text{ se } a \notin A \end{matrix} \}$

In particolare se $A \subset B \Rightarrow C_A \subset C_B$. In questo modo penso ogni $C_A \subset C_{\{0,\dots,n\}}$.

Ora se $f \in \prod_{|A|=p} C_A$ si ha $(\delta f)_{\underset{\{i_0,\dots,i_p\}}{B}} = \sum_h (-1)^h f_{i_0 \dots \hat{i_h} \dots i_p}$

Possiamo determinare subito il primo e l'ultimo gruppo di coomologia.

$$H^0 = \left\{ (f_0, \dots, f_n) \;\middle|\; \begin{matrix} f_i \in C_i \\ f_i - f_j = 0 \quad \forall i,j \end{matrix} \right\}$$

$\Rightarrow f_i = f_j \ \forall i,j \Rightarrow H^0 = \{(f, \dots, f) \mid f \in C_i \ \forall i\}$

$\Rightarrow$ tutti gli esp. devono essere $>0 \Rightarrow f = \sum a_* x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$, $\begin{matrix} i_0 + \dots + i_n = k \\ i_h \geq 0 \end{matrix}$.

$\Rightarrow \dim H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = \binom{n+k}{k}$.

Vediamo cosa è: $\operatorname{Im} \delta : \prod_{|A|=n} C_A \longrightarrow C_{\{0,\dots,n\}}$.

Essa è costituita da tutte le serie in cui ogni monomio ha almeno un esponente ≥ 0. Inoltre una base del conucleo è $x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$, $i_0 + \dots + i_n = k$ ed $i_h < 0$.

Così otteniamo che se $k \geq -n \Rightarrow H^n = 0$. Mentre se $\underline{\underline{k < -n}} \Rightarrow$

$$\dim H^n = \binom{n + (-k-n-1)}{n} = \binom{-k-1}{n}.$$

Mentre $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = 0 \quad \forall\, 0 < i < n$ (Caratteristica del proiettivo)

Infatti:

Supponiamo $0 < |A| \leq n$, $\forall h = 0, \dots, n$ definiamo $P_h : C_A \to C_A$ lineare tale che

$$P_h(x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i_h < 0 \\ \dfrac{x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}}{\#\{j \mid i_j \geq 0\}} & \text{se } i_h \geq 0 \end{cases}$$

Oss.

$$\sum_{h=0}^{n} P_h = \mathrm{Id}.$$

[L'idea a questo punto è mostrare che ogni P_h è omotopo a 0]

$P_h : \prod_{|A|=p} C_A \circlearrowleft \quad p = 0, \dots, n-1$ (estendendolo in modo ovvio)

Bisogna provare che $\exists\, K_0, \dots, K_n$ omotopie (di grado -1) tali che $K_h \delta + \delta K_h = P_h \ \prod_{|A|=p} C_A \circlearrowleft$, $p = 2, \dots, n$.

Mostriamolo per $h = 0$.

$K := K_0$.

$$(Kf)_{i_0 \dots i_p} := \begin{cases} 0 & \text{se } i_0 = 0 \\ P_0(f_{0, i_0, \dots, i_p}) & \text{[è ben definito]} \end{cases}$$

Con un po' di conti si mostra allora che $KS + SK = P_0$, in grado $1, \dots, n-1$. (Esercizio)

Da qui la tesi! (ovviamente.)

Teorema:
X var. complessa. $\mathcal{U}$ ric. aperto. Allora esiste un raffinamento (loc. finito) $\mathcal{V}$ di $\mathcal{U}$ tale che $\forall V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V} \Rightarrow H^p(V_1 \cap \dots \cap V_n, \mathcal{O}_X) = 0$ $\forall p > 0$.

Lemma:
$V_1, \dots, V_n \subset \mathbb{C}^n$ aperti, biolomorfi ad un polidisco. Allora
$H^p(V_1 \cap \dots \cap V_n, \mathcal{O}) = 0 \ \forall p > 0$.

Oss: $n=1$ è il Lemma di Dolbeault.
Caso $n=2$ (mostriamo solo questo)
Prendiamo Δ_1, Δ_2 polidischi e le due funzioni olomorfe

$$f : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} V_1 \subset \mathbb{C}^n \qquad f = (f_1, \dots, f_n)$$
$$g : \Delta_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \subset \mathbb{C}^n \qquad g = (g_1, \dots, g_n)$$

Cons. $\Gamma = \left\{ (x,y) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \;\middle|\; \begin{matrix} f_i(x) - g_i(y) = 0 \\ i = 1, \dots, n \end{matrix} \right\}$

$\Rightarrow (x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow f(x) \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow g(y) \in V_1 \cap V_2$.

Perciò $\Gamma \xrightarrow{\sim} V_1 \cap V_2$.
$(x,y) \longmapsto f(x)$

Tesi: $H^p(\Gamma, \mathcal{O}) = 0 \ \forall p > 0$.

Ora $\Gamma \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_n = \Delta_1 \times \Delta_2$, $\Gamma_k = \{(x,y) \mid f_i(x) = g_i(y), \ i \geq k\}$

Su Γ_k abbiamo:

una agisce sulla prima
una sulla seconda

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_k} \xrightarrow{\cdot (f_k - g_k)} \mathcal{O}_{\Gamma_k} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_{k-1}} \longrightarrow 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{esatta} \\ \text{corta}\end{matrix}\right)$$

posto $\Gamma_{k+1} = \{(x,y) \in \Gamma_k \mid f_k = g_k\}$.
Allora cons. la succ. esatta lunga di coomologia:

$$H^1(\Gamma_k, \mathcal{O}_{\Gamma_k}) \to H^1(\Gamma_{k-1}, \mathcal{O}) \to H^2(\Gamma_k, \mathcal{O}) \to \cdots \Rightarrow H^1(\Gamma_{k-1}, \mathcal{O})$$

per ind su k $\longleftarrow$ $\overset{\shortparallel}{0}$ $\qquad$ $\overset{\shortparallel}{0}$ $\qquad$ $\overset{\shortparallel}{0}$ e così tutti gli altri.

Corollario:

Sia X una varietà.

$\mathcal{U}$ ric. aperto, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ con ogni U_i carta olomorfa.

$(\exists\, \varphi : U_i \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_i \subset \mathbb{C}^n)$.

Se $\mathcal{V} = \{V_j\}$ è un ricoprimento tale che:

1) ogni $V_j \simeq$ polidisco.

2) $\forall\, x \in X\ \exists\, U_i$ t.c. $\bigcup_{x \in V_j} V_j \subset U_i$.

3) $\mathcal{V}$ loc. finito.

$\Rightarrow \mathcal{V}$ è aciclico. $(H^p(V_{i_0 \dots i_n}) = 0\ \forall p > 0)$

Dim:

Supponiamo che $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k} \neq \emptyset$. Allora $\exists\, U_i$ t.c.

$V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k} \subset U_i \subset \mathbb{C}^n$ (a meno di biolomorfismi)

$\Rightarrow$ per il lemma si ha che $V_{i_1 \dots i_k}$ è aciclico. ∎

Esistenza di ric. come nel corollario:

1) X paracompatto $\Rightarrow$ non è restrittivo supp. $\mathcal{U}$ loc. finito. $\mathcal{U} = \{U_i\}$.

2) (Teorema di restringimento) $\forall i\ \exists\, W_i \subset U_i$ aperto tale che $\overline{W_i} \subset U_i$ e $\bigcup W_i = X$.

3) $\forall\, x \in X$ scegliamo $\Delta_x \subset X$ polidisco (in un opp. sist. di coord.) tale che:

i) $x \in W_i \Rightarrow \Delta_x \subset W_i$,

ii) ~~se~~ $\Delta_x \cap$ finito di U_j

iii) se $\Delta_x \cap W_i \neq \emptyset \Rightarrow \Delta_x \subset U_i$.

Sia $y \in X \Rightarrow y \in W_i \Rightarrow$ per i) e iii) se $y \in \Delta_x \Rightarrow \Delta_x \subset U_i$ - (carta).

(

Geometria algebrica: 30/05

Ricordi:

X var. complessa, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ric. aperto.
Sia $\mathcal{V} = \{V_j\}$ un altro ric. t.c.:
i) $V_j \simeq \Delta(0,R)$ (polidisco);
ii) $\forall x \in X$, $\exists i$ t.c. $\bigcup\{V_j \mid x \in V_j\} \subset U_i$.
Allora $\{V_j\}$ è Leray aciclico per $\mathcal{O}_X$, i.e., $H^q(V_{j_1 \dots j_k}, \mathcal{O}_X) = 0$

con $q > 0$.
Nota: Non serve che il ric. sia loc. finito, poiché cons. un numero finito di V_{j_i}.
Così per il teorema di Leray si ha che

$$H^i(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

vogliamo vedere che dato un ric. aperto è sempre possibile trovarne uno con le proprietà 1. e 2.

Lemma:
Sia X paracompatto T_2 e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ric. aperto loc. finito, allora $\exists$ $\{V_i\}$ ric. aperto, $i \in I$ t.c. $\overline{V_i} \subset U_i$ $\forall i$.

Dim:
X varietà. Sia f_i partizione di 1 subordinata a $\{U_i\}$,

$$f_i : X \longrightarrow [0,1] \quad C^\infty$$

$\Rightarrow$ supp. $f_i \subset U_i$, $\sum f_i = 1$. Allora basta prendere

$$V_i = \{x \mid f(x) \neq 0\}.$$

$\blacksquare$

Teorema:
X var. complessa. $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ric. aperto loc. finito. Allora $\forall x \in X$ è possibile def. un polidisco $\Delta(x,r) \subset X$, cioè $\Delta(x,r) = \varphi^{-1}(\Delta(\underset{0}{\varphi(x)}, r))$ con $r < \infty$ t.c. $\Delta(0,r) \subset V$ carta loc. t.c. $\forall y \in X$ $\exists i$ con

$$\bigcup_{y \in \Delta(x,r)} \Delta(x,r) \subset U_i.$$

Dim (Teorema)

$X = \bigcup V_i$, $\overline{V}_i \subset U_i$ (possibile grazie al lemma)

allora fissato $x \in X$, sappiamo che:

$\exists$ $x \in A$ aperto $| A \cap U_i \neq 0$ per un # finito di indici i.

Iniziamo considerando:

$\Delta(x, r) \subset A$, a meno di restringere r si può supporre che:

1) $x \in \overline{V}_i \Rightarrow \Delta(x, r) \subset U_i$

2) $x \in V_i \Rightarrow \Delta(x, r) \cap \overline{V}_i = \phi$. (Attenzione a priori qui devo restringere!

Dunque sia $y \in X$, e sia i tale che $y \in V_i$, $y \in \Delta(x, r)$.

Allora $\Delta(x, r) \cap V_i \neq \phi$, così se $x \in \overline{V}_i \Rightarrow \Delta(x, r) \subset U_i$.

Abbiamo così costruito un ric. Leray-aciclico. $\boxtimes$.

Corollario:

X compatto, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ r.c. aperto finito. Allora ne esiste uno finito di polidischi $\Delta(x_1, r_1), \dots, \Delta(x_k, r_k)$ t.c. è un raff. stellato di $\mathcal{U}$ e tale che $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta(x_i, \frac{r_i}{2}) = X$.

Allora: $\{\Delta(x_i, r)\}$, $\{\Delta(x, \frac{r_i}{2})\}$ sono Leray-aciclici per $\mathcal{O}_X$.

Teorema (Vitali) [Ricordo]

[Ricordo: se $U \subset \mathbb{C}^n$ è aperto $\Rightarrow \mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C}$ olomorfe$\}$ è uno spazio di Frechet.

Sia $U \subset V \subset \mathbb{C}^n$, con U e V aperti. Se $\overline{U} \subset V$ è compatto, allora $\mathcal{O}(V) \xrightarrow{|_U} \mathcal{O}(U)$ è compatta.

Teorema (Schwartz)

Siano $F, T : V \to W$ op. lin. cont. tra sp. di Frechet, se:

1) T è compatto;

2) $F+T$ è suriettivo,

Allora $F(V)$ è chiuso in W di codimensione finita.

Così $\dim W/F(V) < \infty$.

Corollario:
Se $Id: V \to V$ è compatta ($\Leftrightarrow$ V è loc. compatto). Prendiamo $F = 0$, $T = Id \Rightarrow \dim V = \infty$.

Teorema (di finitezza) di $\mathrm{rg}(E)=r$
Sia E fibrato vett. olomorfo su X var. complessa compatta. Indichiamo con $\mathcal{O}(E)$:= fascio delle sezioni olomorfe di E.
$$\Gamma(U, \mathcal{O}(E)) = \left\{ \sigma : U \to p^{-1}(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{olomorfe} \\ p \circ \sigma = id \end{array} \right\}$$
Allora $\dim H^q(X, \mathcal{O}(E)) < \infty$.

Dim:
Sia $\{U_i\}$ ric. finito di carte loc. dove E si banalizza, così $p^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{C}^r$. Prendiamo ora
$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U}' = \{\Delta(x, r_i)\} \\ \mathcal{U}'' = \{\Delta(x, \frac{r_i}{2})\} \end{array}\right\} \text{come nel corollario}$$
Poiché $E|_{\Delta(x,r)} \simeq \Delta \times \mathbb{C}^r \Rightarrow \mathcal{O}(E)|_{\Delta(x,r)} \simeq \underbrace{\mathcal{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\Delta}_{r \text{ volte}}$
$\Rightarrow \Gamma(\Delta(x,r), \mathcal{O}(E)) \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \Gamma(\Delta, \mathcal{O}_X)$ (Frechet)
Inoltre $\mathcal{U}', \mathcal{U}''$ sono Leray-aciclici anche per $\mathcal{O}(E)$.
Allora
$$\begin{tikzcd} H^*(\mathcal{U}', \mathcal{O}(E)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "?"'] & H^*(X, \mathcal{O}(E)) \\ H^*(\mathcal{U}'', \mathcal{O}(E)) \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

ora per il teorema di Vitali si ha che:
$$\Gamma(\Delta(x,r), \mathcal{O}(E)) \longrightarrow \Gamma(\Delta(x, \tfrac{r}{2}), \mathcal{O}(E)) \text{ è compatta}$$
così come
$$C^p(\mathcal{U}', \mathcal{O}(E)) \longrightarrow C^p(\mathcal{U}'', \mathcal{O}(E)) \text{ è compatta}$$
[sto considerando intersezioni finite].

Allora si ha:

$$\begin{tikzcd} T: C^p(\mathcal{U}', \mathcal{O}(E)) \arrow[r, "cpt."] & C^p(\mathcal{U}'', \mathcal{O}(E)) \\ Z^p(\mathcal{U}', \mathcal{O}(E)) \arrow[u, hook, "i \text{ continua}"] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z^p(\mathcal{U}'', \mathcal{O}(E)) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[d, equal, "\text{Ker } \delta"] \\ \text{Ker } \delta & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ è uno spazio chiuso

Quindi fattorizzando e usando che Z^p è chiuso si ha che $T|_{Z^p}$ è ancora compatto.

Abbiamo dunque: $\delta, T : Z^p(\mathcal{U}', \mathcal{O}(E)) \oplus C^{p-1}(\mathcal{U}'', \mathcal{O}(E)) \to Z^p(\mathcal{U}'', \mathcal{O}(E$

con $\delta(x, y) = \delta y$ continuo e $T(x, y) = Tx$.

Osserviamo ora che $\delta + T$ è suriettiva, infatti:

$$H^p(\mathcal{U}') \xrightarrow{\sim} H^p(\mathcal{U}'') = 0$$

e ogni $z \in Z^p(\mathcal{U}'', \dots)$ è coomologo a Tx, $x \in Z^p$

allora sono nelle ipotesi del teorema di Schwartz e così $\dim Z^p / \delta C^{p-1} = H^p < \infty$ $\boxtimes$

Definizione:

X cpt. di dimensione 1.

$g(X) := \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ si dice genere di X.

Geometria algebrica:

$\boxed{\mathrm{Pic}\,(\text{Polidisco}) = 0}$

Avevamo visto in generale che $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.
Si ha la succ. esatta:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0$$

allora si ha la succ. esatta lunga in coomologia:
(sarebbe la prima classe di Chern)

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$$

ma se $X \simeq$ polidisco $\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (Dolbeault).
Quindi dobbiamo far vedere che $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ (se X è polidisco)
(Quest'ultima è applicazione del fatto dell'invarianza omotopica della coomologia singolare a coeff. in $\mathbb{Z}$. Allora $X \simeq pt \Rightarrow$ $H^2(pt, \mathbb{Z})$ è banale.)
Cerchiamo di dim. direttamente che $H^2(\text{polidisco}, \mathbb{Z}) = 0$.

Parentesi:

T. di de Rham (astratto): [generalizzazione senza hp. di aciclicità]
X sp. top., $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{A}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{d} \cdots$ (esatta di fasci)
(per il momento senza nessuna ipotesi sui fasci).
A tale succ. possiamo associare la succ. delle sezioni globali:

$$\Gamma(X, \mathcal{A}_0) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{A}_1) \to \cdots$$

Allora, fissato $k \geq 0$, $\exists$ un'applicazione:

$$\varphi : H^k(\Gamma(X, \mathcal{A}_\bullet)) \to H^k(X, \mathcal{F})$$

t.c.: 1) se $H^i(X, \mathcal{A}_j) = 0$, $i > 0$, $i+j = k-1$ $\Rightarrow \varphi$ è iniettiva.

2) se $H^i(X, \mathcal{A}_j) = 0$, $i > 0$, $i+j = k$ $\Rightarrow \varphi$ è surgettiva.

(Per $k=0$ il Th. è ovvio in quando il funtore sezioni globali è esatto a sx).

Dim (Th. parentesi). $k>0$

(*) $0 \to \mathcal{F} \to A_0 \to B_1 \to 0$ spezziamo nel modo solito.

$0 \to B_1 \to A_1 \to A_2 \cdots$

$\Rightarrow$ cons. la succ. esatta indotta da (*) si ha:

$$H^{k-1}(X,A_0) \to H^{k-1}(X,B_1) \to H^k(X,\mathcal{F}) \to H^k(X,A_0)$$

per hp induttiva $\exists\, \varphi$ $\to$ $\uparrow \varphi$ allora basta prendere questa composizione. (Per esercizio dimostrare iniettività e suriettività sfruttando l'hp. induttiva)

$$H^k_i(\Gamma(X,A_*))$$

Nota: la cosa importante nel teo. è avere una succ. esatta per poterla "spezzare".

Richiamo:

$f: X \to Y$ continua gli potevamo associare alcuni funtori

1) $f^{-1}: \{\text{fasci su } Y\} \to \{\text{fasci su } X\}$.

con $[x \in X, \mathcal{F}$ fascio su $Y] \Rightarrow (f^{-1}\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_{f(x)}$ (**)

in particolare $f^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

$f^{-1}(\mathcal{F})$ era il fascio associato al prefascio $U \to \varinjlim \mathcal{F}(V)$, $V \subset Y$ aperto, $f(U) \subset V$.

segue che se $V \subset Y$ $\exists$ un'app. nat

$$\mathcal{F}(V) \to f^{-1}(\mathcal{F}(f^{-1}V))$$

Inoltre se $U \subset Y \Rightarrow$ ho $f^*: \Gamma(U,\mathcal{F}) \to \Gamma(f^{-1}U, f^{-1}\mathcal{F})$

Oss: f^{-1} è un funtore esatto.

Infatti $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ esatta in Y $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $0 \to f^{-1}\mathcal{F} \to f^{-1}\mathcal{G} \to f^{-1}\mathcal{H} \to$ è esatta per la proprietà (**) sulle spighe.

Sia ora $f : X \to Y$ continua, $\mathcal{F}$ fascio su Y.

Allora viene indotta $f^* : H^0(Y, \mathcal{F}) \to H^0(X, f^{-1}\mathcal{F})$

ed essa si può estendere a

$$f^* : H^k(Y, \mathcal{F}) \to H^k(X, f^{-1}\mathcal{F})$$

in modo naturale, cioè in modo che f^* commuti con le succ. esatte lunghe di coomologia:

$$\begin{tikzcd}
H^i(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & H^i(X, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(X, \mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \arrow[d] \cdots \\
H^i(X, f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & H^i(X, f^{-1}\mathcal{G}) \arrow[r] & H^i(X, f^{-1}\mathcal{H}) \arrow[r] & H^{i+1}(X, f^{-1}\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

Supponiamo di avere $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ric. aperto di Y. Allora possiamo def. f^* in modo ovvio:

$$\begin{tikzcd}
C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f^*"] & {} \\
C^p(f^{-1}\mathcal{U}, f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r, "\delta"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$f^{-1}\mathcal{U} = \{f^{-1}(U_i)\}$$

$\Rightarrow$ ho indotto $f^* : H^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^k(f^{-1}\mathcal{U}, f^{-1}\mathcal{F})$ e si passa al limite diretto.

$$\begin{tikzcd}
H^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\text{passo a limite}"] & H^k(f^{-1}\mathcal{U}, f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[d] \\
H^k(Y, \mathcal{F}) \arrow[r, bend left, "\text{compongo}"] & H^k(X, f^{-1}\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

oppure posso prendere una risoluzione fiacca:

$$0 \to \mathcal{F} \to A_0 \to A_1 \to \cdots$$

$\Rightarrow H^k(Y, \mathcal{F}) = H^k(\Gamma(Y, A_*))$

$\xi \in$ è rappr. da una $\xi \in \Gamma(Y, A_k)$ t.c. $d\xi = 0$

$\Rightarrow f^*\xi \in \Gamma(X, f^{-1}A_k)$ e $d(f^*\xi) = 0$.

Quindi: $f^* : H^k(Y, \mathcal{F}) = H^k(\Gamma(Y, A_*)) \xrightarrow{f^*} H^k(\Gamma(X, f^{-1}A_*))$

$$\downarrow \varphi$$

$$H^k(X, f^{-1}\mathcal{F}).$$

Nota: Non ho l'uguale poiché sebbene f^{-1} sia esatto non è affatto vero che è aciclico.

abbiamo allora visto che data $f : X \to Y$ continua è definita $f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Z})$.

Oss:
Se f è costante $\Rightarrow f^* : H^i \longrightarrow H^i$ è l'app. nulla $\forall\ i > 0$.
(perché $f^{-1} \mathcal{U} = X$ e avevamo visto che se tra gli aperti di Čech c'era tutto lo spazio $\Rightarrow$ tutte le coomologie superiori si annullavano)

opp. potevamo osservare che:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$g^* \circ f^* = (gf)^*$$

$\Rightarrow$ se $f(X) = pt \in Y \Rightarrow$ possiamo fattorizzare:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & pt \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \quad f^* : H^i(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{H^i(pt, \mathbb{Z})}_{=0} \longrightarrow H^i(X, \mathbb{Z}).$$

Teorema:
Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ omotope. ~~Allora~~ Cioè esiste:

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y \quad t.c.\ F_0 = f,\ F_1 = g$$

Allora $f^* = g^*$. (Nella coomologia a valori in un fascio costante

Corollario:
Se X è contraibile $\Rightarrow H^{i>0} = 0$.

Dim (Teorema)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "i_1"] \arrow[r, bend right, "i_0"'] \arrow[rr, bend right, "g"'] & X \times [0,1] \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

$p(x,t) = x$.
$i_\alpha(x) = (x, \alpha)$

$\Rightarrow f^* = i_0^* \circ F^*$, $g^* = i_1^* \circ F^*$. Basta allora vedere che $i_0^* = i_1^*$.
Così $H^*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^*(X \times [0,1], \mathbb{Z}) \overset{i_0^*}{\underset{i_1^*}{\rightrightarrows}} H^*(X, \mathbb{Z})$

e $i_0^* \circ p^* = i_1^* \circ p^* = Id$. Allora basta mostrare che <u>p^* è suriettiva</u>

Lemma:

Sia $0 \to \mathbb{Z} \to F_0 \to F_1 \to \dots$ risoluzione fiacca su $X \times [0,$

così che $H^*(X \times [0,1], \mathbb{Z}) = H^*(\Gamma(X, F_0))$. Allora applicando il funtore p_* si ottiene:

$$0 \to p_* \mathbb{Z} \to p_* F_0 \to p_* F_1 \to \dots$$

Tale succ. è esatta. Inoltre $p_* \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Nota: In generale p_* non è esatto.

Questo lemma implica il teorema:

Ricordiamo che $(p_* F_i)(U) = F_i(U \times [0,1])$. Allora per definizione p_* preserva la fiacchezza del fascio.

Sia $\xi \in H^k(X \times [0,1], \mathbb{Z})$, esso è rappresentato da un elemento $\xi \in \Gamma(X \times [0,1], F_k)$ t.c. $d\xi = 0$.

$$\Gamma(X \times [0,1], F_k) = \Gamma(X, p_* F_k)$$

$\Rightarrow$ per il lemma $\xi \rightsquigarrow \alpha \in H^k(X, p_* \mathbb{Z})$

Inoltre sempre per il lemma si ha $p_* \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Voglio mostrare che $p^* \alpha = \xi \in H^k(X \times [0,1], \mathbb{Z})$: (così avrei mostrato la suriettività)

innanzitutto abbiamo: $\exists$ app. naturali

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathbb{Z} & \to & p_* F_0 & \to & p_* F_1 & \to \dots \quad \text{esatta} \\ & & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & \\ 0 \to & \mathbb{Z} & \to & p^{-1} p_* F_0 & \to & p^{-1} p_* F_1 & \to \dots \quad \text{ancora esatta.} \end{array}$$

appl. p^{-1} si ha.

$\rightsquigarrow f: X \to Y$, $\mathcal{F}$ su $X \Rightarrow \exists\, \eta: f^{-1} f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ morf. di fasci

definito come: $U \subset X$ aperto, $V \subset Y$ t.c. $f(U) \subset V$. Allora

$(f_* \mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\eta_U} \mathcal{F}(U)$.

quindi

quindi $(f_* \mathcal{F})(V)$ $\quad$ η morf. di prefasci da $f^{-1} f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ $\Rightarrow$ appl. la proprietà univers. dei fasci ...

prefascio $\rightsquigarrow f^{-1} f_*$

$\Rightarrow$ è facile vedere che $\psi(\rho^* \xi) = \xi$.

<u>Dim</u> (Lemma) [Idea]:

P_* è esatto a sinistra. ~~Quindi~~

i) $P_* \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Infatti sia $x \in X$, $\xi \in (P_* \mathbb{Z})_x$.

Sia U, $x \in U$, aperto t.c. $\xi \in P_* \mathbb{Z}(U) = \Gamma(U \times [0,1], \mathbb{Z})$.

<u>Se U è connesso</u> $\Rightarrow \Gamma(U \times [0,1], \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

ii) Esattezza in $P_* F_1$. Sappiamo che è esatto a sx $\Rightarrow$

$$0 \to P_* \mathbb{Z} \to P_* F_0 \to P_* F_1 \quad \text{è esatta}$$

sia $\xi \in (P_* F_1)_x$ tale che $d\xi = 0$. Allora $\xi \in \Gamma(U \times [0,1], F_1)$

Per l'esattezza della successione, loc. $\xi = d\eta \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall t \in [0,1] \ \underset{U_t, \varepsilon > 0}{\exists} \eta_t \in \Gamma(U_t \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon), F_0)$ t.c. $d\eta_t = \xi$

Ma $[0,1]$ è cpt $\Rightarrow$ posso estrarre $t_1, \dots, t_k$ e passare a un sottoric. finito

$\Rightarrow$ abbiamo $U_1 \times A_1, \dots, U_k \times A_k$ con $A_i \subset [0,1]$ aperto e $\bigcup A_i = [0,1]$

A meno di $\bigcap U_i$, posso supporre che siano della forma:

$$U \times A_1, \dots, U \times A_k \quad \text{dove } U \text{ è connesso e } \xi \text{ è esatta.}$$

Sempre per compattezza di $[0,1]$ si può supporre che $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \subset A_i$ $i=1,$ (eventualmente aumentando k).

A meno di restringere A_i posso supporre $A_i \cap A_j = \phi$ se $|i-j| \geq 2$.

Prendiamo $\eta_i \in \Gamma(U \times A_i, F_0)$ t.c. $d\eta_i = \xi$.

Ora $\eta_i - \eta_j \in \Gamma(U \times (A_{ij}), F_0)$. $\Rightarrow d(\eta_i - \eta_j) = 0$. Quindi $\eta_i - \eta_j \in \Gamma(U \times$

ed è un cociclo di Čech poiché le 3-intersezioni sono vuote.

Siccome $U \times A_{ij}$ è connesso $\Rightarrow \eta_{ij} := \eta_i - \eta_j \in \mathbb{Z}$. Definisco allora

$h = \{ h_1 = 0, h_2 = \eta_{12}, h_3 = h_2 + \eta_{23}, \dots \}$

$(\delta h)_{i,i+1} = h_{i+1} - h_i = \cancel{\eta_i \eta_{i+1}} = \eta_{i,i+1}$ dunque $d(\underset{F_i}{\eta_i - h_i}) = d\eta_i = \xi$ ma

definisce una sezione global poiché $\eta_i - h_i$

Geometria algebrica:

X varietà complessa compatta, $\dim X = n$, connessa.

Abbiamo considerato $\mathcal{M}(X) =$ "campo delle f.ni meromorfe".

Teorema (già visto)

$k := \operatorname{degtr}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(X) \leq n$.

Possiamo allora evincere che $\exists f_1, \dots, f_k \in \mathcal{M}(X)$ a.i.

t.c. la mappa:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_k] \arrow[r, hook, "t_i \mapsto f_i"] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}(X) \\ \mathbb{C}(t_1, \dots, t_k) \arrow[ur, hook, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

campo delle f.ni razionali $\to \mathbb{C}(t_1, \dots, t_k)$

ϕ sia un morfismo di campi iniettivo.

Inoltre $\operatorname{Im} \phi = \mathbb{C}(f_1, \dots, f_k) \subset \mathcal{M}(X)$. Essa è un'estensione algebrica.

Teorema (Siegel)

$\mathcal{M}(X)$ è un'estensione alg. finita su $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_k)$.

INIZIO

Dim:

Ci occorrono un paio di fatti:

1) $\operatorname{Pic}(\Delta) \simeq 0$;

2) ... "non serve se $k = n$" (Moishezon).

Def:

X si dice varietà di Moishezon se $\operatorname{degtr} \mathcal{M}(X) = \dim X$.

Mettiamoci allora nel caso Moishezon.

Lemma: (già visto)

X var. compatta, $X = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta(x_i, 1)$ ed $X = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta(x_i, \frac{1}{2})$.

Sia $L \to X$ line bundle banale $\overline{\Delta(x_i, 1)}$ $\forall i$. (meglio: su un intorno

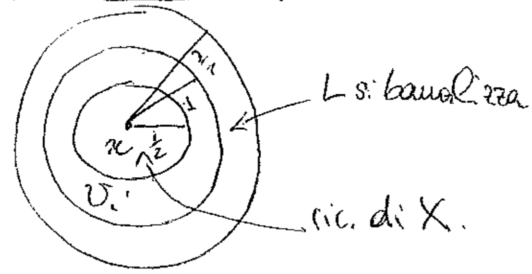
Così L era dato da un cociclo $g_{ij} \in \mathcal{O}(V_i \cap V_j)^*$.

$\|L\| := \max_{\overline{U_i \cap U_j}} |g_{ij}|$. Se $2^h \geq \|L\| \Rightarrow H^0(X, L) \to \bigoplus_{i=1}^{N} \frac{\mathcal{O}_{x_i}}{\mathfrak{m}_{x_i}^h}$ è iniettiva.

Prop:

$\exists$ un ric. V_i buono $\forall L$.

Dim:



Teorema:

$\forall L \in Pic(X)\ \exists\ \nu_L \in \mathbb{N}$ tale che $\forall L_1,\dots,L_k \in Pic$.
e $\forall d_1,\dots,d_k \in \mathbb{N}$ si ha che:

$$H^0(X, L_1^{d_1}\otimes\cdots\otimes L_k^{d_k}) \leq N\cdot\binom{n+d_1\nu_{L_1}+\cdots+d_k\nu_{L_k}}{n}$$

Dim:

Dato L scelgo un cociclo $\{f_{ij}\in \mathcal{O}(V_i\cap V_j)^*\}$ e pongo ν_L in modo che $2^{\nu_L} \geq \max_{V_i\cap V_j}|f_{ij}|$.
Infatti il cociclo di L^s è $\{f_{ij}^s\}$, in particolare $2^{s\cdot\nu_L}\geq \max_{V_i\cap V_j} |f_{ij}^s|$, similmente se $\{f_{ij}\}\longleftrightarrow L$ e $\{g_{ij}\}\longleftrightarrow M$ $\in Pic(X)$

allora $L\otimes M \longleftrightarrow \{f_{ij}\cdot g_{ij}\}$.

Vediamo per semplicità il caso $k=2$.
$L, M \in Pic \Rightarrow$ cociclo di $L^r\otimes M^s$ è $\{f^r_{ij}\cdot g^s_{ij}\}$
allora $2^{r\nu_L+s\nu_M}\geq \max|f^r_{ij}\cdot g^s_{ij}|$.

Così $H^0(X, L^r\otimes M^s) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^N \frac{\mathcal{O}_{x_i}}{\mathfrak{m}_{x_i}^{r\nu_L+s\nu_M}}$ che ha la dimensione voluta.

Cons. ora X varietà di dimensione n.

$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ a.i. (quindi base di trascendenza).

Teorema:

$\mathbb{C}(f_1, \dots, f_n) \subset \mathcal{M}(X)$ è finita.

Dim:

Basta far vedere che $\exists\, s > 0$ t.c. $\forall\, g \in \mathcal{M}(X)$ è algebrico di grado $\leq s$ su $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_n) =: K$.

Cioè $\dim_K K(g) \leq s \iff g$ radice di un polinomio $p(t) \in K[t]$ con $\deg p \leq s$ (p irriducibile)

grazie al teorema dell'elemento primitivo:

Teorema (dell'elemento primitivo)

$K \subset L$ estensione finita e separabile (sempre vero se char $= 0$).

Allora $\exists\, \theta \in L$ t.c. $K[\theta] = L$.

infatti:

$K = \mathbb{C}(f_1, \dots, f_n) \subset \mathcal{M}(X)$. Sia $g \in \mathcal{M}(X)$ t.c. $[K(g) : K]$ sia massimo $\leq s$. L'affermazione è $K(g) = \mathcal{M}(X)$.

Se così non fosse, applicando il teo. dell'elemento primitivo a $K \subset K(g, h)$ (con $h \in \mathcal{M}(X) \setminus K(g)$), esisterebbe θ t.c. $K(\theta) = K(g$

Ma $[K(g) : K] \leq [K(\theta) : K] \leq [K(g), K]$

$\implies K(\theta) = K(g)$.

Ora abbiamo $f_1, \dots, f_k$ base di trascendenza,

Ed $\exists\, L \in \mathrm{Pic}(X)$, $s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L)$ t.c. $f_i = \frac{s_i}{s_0}$

Sia ora $g \in \mathcal{M}(X)$ qualsiasi, allora $\exists\, M \in \mathrm{Pic}(X)$ ed $\alpha_0, \alpha_1 \in H^0(X, M)$, $g = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

D'altra parte sappiamo che:

$$(1) \qquad \dim H^0(X, L^r \otimes M^s) \leq N \binom{n + \overset{L}{d_1} r + \overset{M}{d_2} s}{n} =$$

$$= \frac{N}{n!} d_1^n r^n + \ldots \text{ (termini di grado} < n \text{ in } r\text{)}$$

Indichiamo con $W(r,s) \subset \mathbb{C}[t_0, \ldots, t_n, u_0, u_1]$ i polinomi biomogenei di grado r su $t_0, \ldots, t_n$ e di grado s su u_0, u_1.

Allora $\dim_{\mathbb{C}} W(r,s) = (s+1) \cdot \binom{n+r}{n} = \frac{s+1}{n!} r^n + \ldots$ (2)

Da (1) e (2) si ha che se $s+1 > N \cdot d_1^n$ ($\#$ che dipende solo da X e L)

allora $\dim W(s,r) > \dim H^0(X, L^r \otimes M^s)$ con $r \gg 0$.

Quindi sia s t.c. $\dim W(s,r) > \dim H^0(X, L^r \otimes M^s)$ $\forall M, \forall r \gg 0$.

Definisco allora l'applicazione:

$$W(r,s) \longrightarrow H^0(X, L^r \otimes M^s)$$

$$p(t_0, \ldots, t_n, u_0, u_1) \longmapsto p(s_0, \ldots, s_n, \alpha_0, \alpha_1)$$

che non può essere iniettiva. Così $\exists\, p \neq 0$ t.c. $p \mapsto 0$.

Se ora prendo $\dfrac{p(s_0, \ldots, s_n, \alpha_0, \alpha_1)}{s_0^r \alpha_0^s} = \tilde{p}(f_1, \ldots, f_n, g) = 0$

di grado $\leq s$ in g.

{ qui sto usando l'ipotesi Moishezon }

FINE