FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

FIBRATI OLOMORFI E TEOREMI DI FINITEZZA SU VARIETÀ COMPATTE

Tesi di Laurea in matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof. Marco Manetti

Presentata da:
Sara Pirozzi

Anno Accademico: 2008/2009

A Papà

Indice

Introduzione

In questa tesi intendiamo dimostrare un teorema di finitezza per fibrati olomorfi su varietà complesse compatte.

Per fare ciò suddividiamo il lavoro in tre parti. Nella prima parte analizziamo alcune definizioni e alcuni teoremi di analisi funzionale riguardanti spazi di Fréchet e operatori compatti. Molto importanti in questa fase della trattazione sono sostanzialmente due fatti. Il primo riguarda lo spazio delle funzioni continue che dimostreremo essere uno spazio di Fréchet, mentre il secondo è un teorema con il quale dimostriamo che un'applicazione lineare, continua, suriettiva e compatta tra spazi di Fréchet ha per codominio uno spazio a dimensione finita.

Nella seconda parte ci occuperemo delle funzioni olomorfe in più variabili su un aperto di $\mathbb{C}^n$. Daremo alcune delle proprietà più importanti di queste funzioni come la formula di Cauchy, il teorema di Hartogs e il lemma di Schwarz. Deriverà dalla semplice definizione di funzione olomorfa che lo spazio delle funzioni olomorfe è un sottospazio chiuso dello spazio delle funzioni continue su un aperto e quindi è di Fréchet. Sempre in questa seconda parte della trattazione dimostriamo il teorema di Vitali per aperti di $\mathbb{C}^n$, teorema che in seguito sarà tradotto per aperti di varietà complesse e molto utile nella dimostrazione finale. Termineremo questa seconda parte con la definizione di varietà complessa e con alcuni esempi.

Nella terza ed ultima parte di questa tesi ci occupiamo dei fibrati olomorfi su varietà complesse e dello spaizo delle sezioni globali. In primo luogo diamo la definizione di fibrato olomorfo proponendo alcuni esempi molto importanti come il fibrato tangente e i fibrati $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$. Introduciamo, anche, il concetto di sezione globale di un fibrato olomorfo e dimosriamo che lo spazio delle sezioni globali è isomorfo allo zeresimo gruppo di coomologia del fibrato stesso su un ricoprimento della varietà. Diamo, anche, dei cenni di teoria dei fasci considerando un fibrato olomorfo come un caso particolare. In questa terza parte apriamo una parentesi topologica riguardante i ricoprimeni e i raffinamenti che concludiamo con il teorema dei restringimenti fondamentale nella dimostrazione del teorema finale.

Concludiamo questa tesi con la dimostrazione del teorema di finitezza che enunciamo:

Teorema 0.0.1. *Siano X una varietà complessa compatta ed E un fibrato olomorfo su X. Allora lo spazio vettoriale delle sezioni globali $\Gamma(X, E)$ ha dimensione finita su $\mathbb{C}$.*

Capitolo 1

Spazi di Fréchet e operatori compatti

1.1 Spazi vettoriali topologici

Definizione 1.1. Sia V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ (assumeremo $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) e sia τ una topologia su V allora la coppia (V, τ) si dice **spazio vettoriale topologico** se (V, τ) è uno spazio di Hausdorff e se le applicazioni:

$$V \times V \to V$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$\mathbb{K} \times V \to V$$

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

sono continue.

Definizione 1.2. Per **dimensione** di uno spazio vettoriale topologico intendiamo la sua dimensione algebrica cioè la cardinalità di una sua **base**, ossia un sottoinsieme massimale di elementi linearmente indipendenti.

Per semplificare la notazione indichiamo uno spazio vettoriale topologico (V, τ) con V.

Definizione 1.3. Sia $x \in V$ spazio vettoriale topologico e $\mathcal{J}$ una famiglia di intorni di x allora si dice che $\mathcal{J}$ è un **sistema fondamentale di intorni** se per ogni altro intorno I di x esiste un intorno della famiglia $J \in \mathcal{J}$ contenuto in I.

Definizione 1.4. Uno spazio vettoriale topologico si dice **localmente compatto** se possiede un sistema fondamentale di intorni compatti ed è **localmente convesso** se possiede un sistema fondamentale di intorni convessi.

Per stabilire se una topologia su uno spazio vettoriale soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale topologico, abbiamo un criterio dato dalla seguente proprosizione di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 1.1.1. (V, τ) *è uno spazio vettoriale topologico su un campo* $\mathbb{K}$ *se e solo se* V *è di Hausdorff,* τ *è invariante per traslazioni e possiede una base* $\mathcal{B}$ *di intorni di zero tale che:*

1. *per ogni* $L \in \mathcal{B}$ *esiste* $U \in \mathcal{B}$ *tale che* $U+U \subset L$ *dove* $U+U = \{x+y$ *tali che* $x, y \in U\}$*;*
2. $L \in \mathcal{B}$ *implica che per ogni insieme finito* $A \subset V$ *esiste* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tale che* $A \subset \lambda L$ *(*L *è* ***radiale****), questo significa che* $\cup_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda L = V$*;*
3. $L \in \mathcal{B}$ *allora* $\lambda L \subset L$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tale che* $|\lambda|<1$ *(*L *è* ***cerchiato****)*
4. *esiste* $\lambda \in \mathbb{K}$ *con* $0 < |\lambda| < 1$ *tale che per ogni* $L \in \mathcal{B}$*,* $\lambda L \in \mathcal{B}$*.*

Dimostrazione. Teorema 1.2 pag.14[1] □

Definizione 1.5. Una topologia su uno spazio vettoriale è **invariante per traslazioni** se le traslazioni sono omeomorfismi per ogni $x \in V$.

Definizione 1.6. Siano X, Y due spazi vettoriali topologici e $f \colon X \to Y$ un'applicazione allora diremo che f è un **isomorfismo di spazi vettoriali topologici** se è un omeomorfismo lineare.

Ricordiamo che i funzionali su uno spazio vettoriale godono delle seguenti proprietà:

Teorema 1.1.2. *Sia* $f \colon V \to \mathbb{K}$ *un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale topologico* V *nel campo* $\mathbb{K}$ *non identicamente nulla allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. f *è continua;*
2. *il nucleo di* f *è un sottospazio chiuso di* V*;*
3. *il nucleo di* f *non è un sottoinsieme denso in* V*;*
4. f *è limitata su ogni intorno di zero.*

Dimostrazione. Teorema 1.18 pag.15[2] □

Analizziamo, ora, due importanti risultati riguardanti gli spazi vettoriali topologici a dimensione finita che saranno necessari ai fini della trattazione.

Teorema 1.1.3. *Sia* V *uno spazio vettoriale topologico su* $\mathbb{C}$ *e sia* $W \subset V$ *un sottospazio vettoriale di dimensione finita* n*, allora* W *è isomorfo a* $\mathbb{C}^n$ *come spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Sia $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base di W e sia $\varphi \colon \mathbb{C}^n \to W$ tale che $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$. Questo è un isomorfismo di spazi vettoriali ed è continuo dato che la somma e il prodotto per uno scalare sono continue in V. Quindi basta dimostrare che φ è aperta e siccome gli aperti sono invarianti per traslazioni basta dimostrarlo per la palla di centro 0 e raggio r. Osserviamo che la frontiera della palla $\partial B(0, r)$ è compatta e non contiene lo zero quindi l'insieme compatto $\varphi(\partial B(0, r))$ non contiene l'origine o di V e possiamo, quindi, trovare un intorno $Z \subset W$ di o tale che $\partial B(0, r) \cap Z = \emptyset$. Per la continuità del prodotto esiste $\delta > 0$ reale tale che esiste un altro intorno T dell'origine di V tale che $\lambda T \subset Z$ per ogni

$\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| \leq \delta$. Vogliamo dimostrare che $\delta T \subset \varphi(B(0,r))$. Ipotizziamo per assurdo che esista $u = \delta t_0 \in \delta T$ tale che $u \notin \varphi(B(0,r))$ quindi $\varphi^{-1}(u) \notin B(0,R)$. Quindi possiamo trovare ρ tale che $|rho| < 1$ e $\rho\varphi^{-1}(u) = \varphi^{-1}(\rho u) \in \partial B(0,r)$ quindi $\rho u = \rho\delta t_0 \in \varphi(\partial B(0,r))$ ma siccome $|\rho\delta| < \delta$ allora $\rho\delta t_0 \in Z$ il che è assurdo. Osserviamo, inoltre, che W è un sottospazio vettoriale chiuso. Supponiamo per assurdo che W è aperto. Siano $v \in \overline{W} \setminus W$ e H il sottospazio generato da W e v. La dimensione di H è chiaramente $n+1$ e W non è chiuso in H. Per la prima parte del teorema $H \cong \mathbb{C}^{n+1}$ e W è un iperpiano di H ma questo è assurdo dato che gli iperpiano di $\mathbb{C}^{n+1}$ sono chiusi. □

Diamo ora il secondo e più importante dei due risultati.

Teorema 1.1.4. *Sia $\mathbb{K}$ un campo ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) e sia V spazio vettoriale topologico localmente compatto su $\mathbb{K}$ allora V ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Sia $W \subset V$ un intorno di zero compatto e cerchiato, e sia $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ una successione infinitesima tale che $\lambda_n \neq 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Proviamo che $\{\lambda_n W\ : n \in \mathbb{N}\}$ è una base di intorni di zero in V. Sia U un intorno di zero allora scelgo N intorno di zero cerchiato tale che $N + N \subset U$. W è compatto allora esiste $x_i \in W$ $(i = 1,\ldots,k)$ tali che $W \subset \bigcup_{i=1}^{k}(x_i + N)$ e inoltre possiamo trovare un $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda|<1$ e $\lambda x_i \in N$ per ogni $i = 1,\ldots,k$. $\{\lambda_n\}$ è infinitesima quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $|\lambda_n| \leq |\lambda|$ e

$$\lambda_n W \subset \lambda W \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^{k}(\lambda x_i + \lambda N) \subset N + N \subset U$$

quindi $\{\lambda_n W\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base di intorni di zero. Sia $\rho \in \mathbb{K}$ tale che $0<|\rho| \leq \frac{1}{2}$, W è compatto e ρW è un intorno di zero quindi esiste $y_l \in W$ $l = 1,\ldots,m$ tali che $W \subset \bigcup_{l=1}^{m}(y_l + \rho W)$. Sia M il più picccolo sottospazio di V contenente $\{y_l\}_{l=1,\ldots,m}$ allora la dimensione di M è minore o uguale di m. Vogliamo dimostrare che $V = M$. Supponiamo per assurdo che $V \neq M$ allora esiste $w \in V \setminus M$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $(w + \lambda_{n_0}W) \cap M = \emptyset$ perché M ha dimensione finita allora è completo quindi è chiuso in V e $\{w + \lambda_n W\colon n \in \mathbb{N}\}$ è una base di intorni di w. Sia $\Omega = \{\mu \in \mathbb{K}$ tale che $(w + \mu W) \cap M \neq \emptyset\}$ e sia $\delta = \inf_{\mu\in\Omega}|\mu|$, sicuramente $\delta \geq |\lambda_{n_0}|>0$. Sia $v_0 \in W$ allora se scelgo $\mu_0 \in \Omega$ tale che $\delta \leq |\mu_0| \leq \frac{3}{2}\delta$ $y = w + \mu_0 v_0 \in M$. Per definizione di $\{y_l\}$ esiste l_0 tale che $v_0 = y_{l_0} + \rho v_1$ $v_1 \in W$ quindi:

$$w = y - \mu_0 v_0 = (y - \mu_0 y_{l_0}) - \mu_0\rho v_1 \in M + \mu_0\rho W$$

ma $|\mu_0\rho| \leq |\frac{3}{2}\delta\frac{1}{2}| \leq \frac{3}{4}\delta$ e questo è assurdo poiché δ è un estremo inferiore quindi $V = M$. □

1.2 Spazi di Fréchet

Definizione 1.7. Uno spazio vettoriale topologico X si dice **spazio di Fréchet** se:

1. la sua topologia è indotta da una distanza d invariante per traslazioni:

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \textit{ per ogni } x, y.z \in X$$

2. X è completo rispetto a questa metrica

3. X è localmente convesso.

Conseguenza della sola definizione di spazio di Fréchet è la seguente osservazione che nella sua evidenza costituisce un fatto che avrà molta rilevanza nel seguito.

Osservazione 1. Sia X uno spazio di Fréchet, sia $Y \subset X$ un sottospazio vettoriale chiuso allora anche Y è di Fréchet.

Diamo ora degli esempi di spazio di Fréchet.

Esempio 1.1. Uno spazio vettoriale dotato di una famiglia numerabile di seminorme è uno spazio di Fréchet. Una seminorma su uno spazio vettoriale X è una funzione reale p su X tale che:

1. $p \colon X \to [0; +\infty)$
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
3. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

per ogni $x, y \in X$ e ogni scalare α. Sia, quindi, X il nostro spazio vettoriale e $\mathcal{P}$ una famiglia numerabile di seminorme tale che per ogni $x \neq 0 \in X$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$. Consideriamo per ogni $p \in \mathcal{P}$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme:

$$V(p, n) = \left\{ x : p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

La famiglia $\mathcal{B}$ di tutte le intersezioni finite dei $V(p, n)$ è un sistema fondamentale di intorni di zero convessi e cerchiati per una topologia τ su X che lo rende uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

Infatti, diremo che un insieme $A \subset X$ è aperto se e solo se A è un unione, anche vuota, di traslati di elementi della base $\mathcal{B}$. Ovviamente abbiamo cosi definito una topologia τ invariante per traslazioni di cui $\mathcal{B}$ è un sistema fondamentale di intorni cerchiati e convessi. Verifichiamo che X è di Hausdorff. Sia $x \in X$ diverso da zero, allora per ipotesi esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) > 0$ ciò vuol dire che $x \notin V(p, n)$ se $np(x) > 1$. Quindi zero non appartiene all'intorno di x $\;x + V(p, n)$ e quindi x non appartiene alla chiusura dello zero. Ciò dimostra, per l'arbitrarietà di x, che zero è un punto chiuso e per l'invarianza per traslazioni della topologia ogni punto è chiuso. Ora verifichiamo la continuità di somma e prodotto per uno scalare. Sia U un intorno di zero in X allora esisteranno $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}$ e $n_i, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tali che:

$$U \supset V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_m, n_m).$$

Poniamo

$$V = V(p_1, 2n_1) \cap \cdots \cap V(p_m, 2n_m).$$

Dalla prima proprietà delle seminorme discende che $V + V \subset U$ e quindi la somma è continua. Sia ora $x \in X$ e α uno scalare e U e V come prima, allora $x \in sV$ per qualche $s > 0$. Poniamo $t = \frac{s}{1+|\alpha|s}$, prendiamo $y \in x + tV$ e uno scalare β tale che $|\beta - \alpha| < \frac{1}{s}$ allora

$$\beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x$$

e visto che $|\beta|t \leq 1$ e V è cerchiato

$$|\beta|tV + |\beta - \alpha|sV \subset V + V \subset U.$$

Questo dimostra che la motliplicazione per uno scalare è continua. Quindi X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Inoltre le p_i sono continue poiché per una seminorma vale sempre la disuguaglianza:

$$|p(x) - p(y)| < p(x) - p(y).$$

Affinché X sia uno spazio di Fréchet la topologia deve essere indotta da una metrica invariante per traslazione e la nostra metrica è definibile direttamente attraverso la sua distanza:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)}$$

per ogni $x, y \in X$ e $p_i \in \mathcal{P}$. Dobbiamo però provare che d è compatibile con la topologia τ. Per fare ciò basta mostrare che le palle

$$B_r = \{x : d(x, 0) < r\} \quad r > 0$$

formano un sistema fondamentale di intorni di zero. Dalla continuità delle p_i e per l'uniforme convergenza della serie che definisce la distanza possiamo dire che d è continua su $X \times X$ e quindi le palle B_r sono aperte. Se W è un intorno di zero allora

$$W \supset V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_m, n_m)$$

per appropriati indici $i = i, \ldots, m$. Se $x \in X$ allora

$$\frac{2^{-i} p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)} < r$$

per ogni i quindi posso scegliere r abbastanza piccolo in modo che le p_i con $i = 1, \ldots, m$ siano talmente piccole che B_r sia contenuto in ogni $V(p_i, n_i)$ e quindi $B_r \subset W$. Se X è uno spazio completo rispetto a questa metrica allora X è uno spazio di Fréchet.

Osservazione 2. Se X è lo spazio vettoriale dell'esempio 1.1 e $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$ la completezza di X rispetto a questa distanza non dipende da come numeriamo le seminorme. Dimostriamo, infatti, che una successione $\{x_n\} \subset X$ è di Cauchy nella distanza d se e solo se lo è per ogni seminorma. Dimostriamo la prima implicazione e quindi supponiamo che $\{x_n\}$ sia di Cauchy per d. Vogliamo verificare che se esistesse una seminorma rispetto alla quale $\{x_n\}$ non è di Cauchy allora si arriva ad un assurdo. Sia quindi p_i tale che esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni n, m tale che $p_i(x_n - x_m) > \epsilon$. Siccome tutte le seminorme sono a valori positivi:

$$d(x_n, x_m) > \frac{2^{-i} p_i(x_n - x_m)}{1 + p_i(x_n - x_m)} > \frac{2^{-i}\epsilon}{1 + \epsilon} > 0$$

per ogni n, m e questo è assurdo.

Sia ora $\{x_n\}$ di Cauchy per ogni p_i allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che $p_i(x_n - x_m) < \epsilon$ per ogni $n, m > n_\epsilon$. Quindi abbiamo che:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \epsilon.$$

Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto consideriamo lo spazio delle funzioni continue da U in $\mathbb{C}$ e lo indichiamo

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} |\ f \text{ è continua }\}$$

Su questo spazio possiamo definire una topologia detta **compatta aperta** la cui prebase è composta dagli insiemi:

$$W(K, V) = \{f \in \mathcal{C}(U) \text{ tali che } f(K) \subset V\}.$$

Possiamo facilmente dimostrare, però, che siccome U è localmente compatto di Hausdorff, un sistema fondamentale di intorni di $f \in C(U)$ nella topologia compatta-aperta è dato dagli aperti

$$W(f, K, \epsilon) = \{g \in C(U) \mid \sup_{z \in K} |g(z) - f(z)| < \epsilon\},$$

con K compatto ed $\epsilon > 0$.

Vogliamo mostrare che la topologia dalla base $W(f, K, \epsilon)$ al variare di $f \in \mathcal{C}(U)$ e quella indotta dalla base formata dalle intersezioni finite di elementi della prebase della topologia compatta aperta coincidono. Fissiamo $f \in \mathcal{C}(U)$. Cominciamo con il dimostrare che per ogni elemento della prebase $W(K, V)$ intorno di f esiste un $\epsilon > 0$ tale che:

$$W(f, K, \epsilon) \subseteq W(K, V).$$

Poiché K è compatto e f è continua allora $f(K)$ è compatto ma sappiamo anche che $f(K) \subset V$ con V aperto. Per la compattezza di $f(K)$ esiste $\epsilon > 0$ tale che $B_\epsilon(f(K)) \subset V$ e quindi se $d(y, f(K)) < \epsilon$ allora $y \in V$. Sia ora $g \in W(f, K, \epsilon)$ allora $\sup_{z \in K} |g(z) - f(z)| < \epsilon$ quindi $d(g, f(K)) < \epsilon$ quindi $g(K) \subset V$. Ciò prova che $W(f, K, \epsilon) \subset W(W, V)$. Fissiamo, ora, un compatto $K \subset U$ e un $\epsilon > 0$. Dobbiamo trovare dei compatti K_i contenuti in U e degli aperi V_i di $\mathbb{C}$ tali che $f(K_i) \subset V_i$ per $i = 1, \ldots, n$ e:

$$W(f, K, \epsilon) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} W(K_i, V_i). \tag{1.1}$$

Siccome $f(K)$ è compatto allora esisteranno $z_1, \ldots, z_n \in K$ tali che

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\epsilon}{3}}(f(z_i)).$$

Per $i = 1, \ldots, n$ consideriamo $K_i = K \cap f^{-1}(\overline{B_{\frac{\epsilon}{3}}(f(z_i))}$ e $V_i = B_{\frac{2\epsilon}{3}}(f(z_i))$. Allora K_i è compatto e $f(K_i) \subset V_i$ poiché

$$f(f^{-1}(\overline{B_{\frac{\epsilon}{3}}(f(z_i))}) \subset \overline{B_{\frac{\epsilon}{3}}(f(z_i))} \subset V_i.$$

Quindi $f \in \bigcap_{i=1}^n W(K_i, V_i)$. Rimane da verificare **??**. Sia $g \in \bigcap_{i=1}^n W(K_i, V_i)$. Se $z \in K$ allora esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $z \in K_i$ quindi la distanza $d(f(z), f(z_i)) < \epsilon$ dunque:

$$f(z) \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(f(z_i)) \text{ e } d(g(z), f(z)) < \frac{2\epsilon}{3}$$

dato che $g \in W(K_i, V_i)$. Quindi possiamo concludere che $d(g(z), f(z)) < \epsilon$ per ogni $z \in K$.

Attraverso questa topologia lo spazio delle funzioni continue su un aperto diventa uno spazio vettoriale topologico.

Proposizione 1.2.1. *Lo spazio vettoriale topologico delle funzioni continue su un aperto a valori in $\mathbb{C}$ dotato della topologia compatta aperta è uno spazio di Fréchet.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}(U)$ lo spazio delle funzioni continue su $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto, allora vogliamo verificare che questo è dotato di una famiglia numerabile di seminorme e rispetto alla metrica indotta esso è completo. Se U non è vuoto allora possiamo trovare una famiglia numerabile di compatti $\{K_n\}$ tali che $K_n \neq \emptyset$ e K_n sia contenuto nella parte interna di K_{n+1} per ogni n. Allora possiamo definire le seminorme nel modo seguente

$$p_n(f) = \sup_{z \in K_n} \{|f(x)|\}.$$

per ogni $f \in \mathcal{C}(U)$. Per quanto detto nell'esempio 1.1 l'insieme di tutte le intersezioni finite degli insiemi

$$V_n = \left\{ f \in \mathcal{C}(U) : p_n(f) < \frac{1}{n} \right\}$$

formano un sistema fondamentale di intorni convessi di zero per $\mathcal{C}(U)$ e la metrica indotta è:

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}.$$

Dimostriamo che $\mathcal{C}(U)$ è completo rispetto a questa metrica. Sia $\{f_i\}$ una successione di Cauchy di funzioni continue su U, allora per ogni n $p_n(f_i - f_j)$ tende a zero se i, j tendono a più infinito quindi $\{f_i\}$ converge uniformemente su ogni K_n ad una funzione $f \in \mathcal{C}(U)$. Quindi X è completo ed è perciò di Fréchet. Resta da dimostrare che la topologia indotta da questa metrica coincide con la topologia compatta aperta. Consideriamo il sistema fondamentale di intorni di $g \in C(U)$ nella topologia compatta-aperta dato dagli aperti

$$W(g, K, \epsilon) = \left\{ f \in C(U) \mid \sup_{z \in K} |f(z) - g(z)| < \epsilon \right\},$$

con K compatto ed $\epsilon > 0$. Un sistema fondamentale di intorni della topologia data dalle seminorme, invece, è data dagli insiemi:

$$V_n + g = \left\{ f : p_n(f - g) < \frac{1}{n} \right\} \text{ per ogni } g \in \mathcal{C}(U)$$

cioè dai traslati della prebase di intorni di zero. Vogliamo dimostrare che le topologie indotte da queste prebasi sono uguali. Dimostriamo innanzi tutto che per ogni $V_n + g$ esiste un

$W(g, K, \epsilon)$ tale che $W(g, K, \epsilon) \subset V_n + g$. Questa inclusione è facile da dimostrare poiché basta considerare come elemento della base di intorni della topologia compatta aperta $W(g, K_n, \frac{1}{n})$. Viceversa dobbiamo mostrare che per ogni $W(g, K, \epsilon)$ esiste un $V_n + g$ tale che $V_n + g \subset W(g, k, \epsilon)$. Ricordiamo che $\{K_n\}$ è un ricoprimento di U allora:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} Int(K_i)$$

dove con $Int(K_i)$ indichiamo la parte interna di K_i. Abbiamo trovato, quindi, un ricoprimento aperto di K ma dato che K è compatto, possiamo estrarre un ricoprimento finito ottenendo che:

$$K \subset \bigcup_{i=0}^{h} K_i \subset K_h.$$

Basta, quindi, considerare $V_n + g$ con n tale che $\frac{1}{n} < \epsilon$ e $K_h \subseteq K_n$. □

Definizione 1.8. Siano S e T due spazi vettoriali topologici e sia $f : S \to T$, f si dice **aperta** se per ogni $U \subset S$ aperto $f(U)$ è aperto in T.

Altro importante risultato per gli spazi di Fréchet è dato dal prossimo teorema:

Teorema 1.2.2 (mappa aperta). *Sia $f : X \to Y$ lineare continua e suriettiva, X e Y di Fréchet allora f è aperta.*

Dimostrazione. Teorema 2.11 pag.48[2] □

1.3 Operatori compatti

Definizione 1.9. Un operatore lineare $f : A \to B$ si dice **compatto** se esiste un aperto non vuoto $U \subset A$ tale che $f(U)$ ha chiusura compatta.

Il prossimo teorema costituisce un elemento fondamentale per le conclusioni a cui vogliamo arrivare.

Teorema 1.3.1. *Sia $f : A \to B$ un'applicazione lineare, continua, suriettiva e compatta tra spazi di Fréchet. Allora B ha dimensione finita.*

Dimostrazione. L'applicazione f è lineare, continua e suriettiva tra spazi di Fréchet, quindi per il teorema di mappa aperta è un'applicazione aperta e A e B sono spazi vettoriali topologici dato che sono spazi di Fréchet.

Vogliamo, quindi, dimostrare che B è localmente compatto poiché poi segue dal Teorema 1.1.4 che B ha dimensione finita.

Per far vedere che B è localmente compatto dobbiamo mostrare che ogni punto possiede un intorno compatto ma dato che B è uno spazio vettoriale topologico lo dimostriamo solo per zero.

Sia $U \subset A$ un intorno di zero tale che $f(U)$ è contenuto in un compatto. Siccome f è un'applicazione aperta allora $f(U) \subset B$ è un intorno di zero, quindi B è localmente compatto. □

Vogliamo subito osservare che l'ipotesi che f sia un operatore tra spazi di Fréchet non è assolutamente un ipotesi necessaria. Il teorema 1.3.1 è un caso particolare di un teorema molto più generale per il quale il fatto che A e B siano spazi di Fréchet è necessario. Enunciamo questo teorema omettendone la dimostrazione:

Teorema 1.3.2 (**Schwartz**). *Siano A e B due spazi di Fréchet e supponiamo di avere:*

- *$\varphi\colon A \to B$ un'applicazione lineare continua e suriettiva;*
- *$\psi\colon A \to B$ un'applicazione lineare continua e compatta.*

Allora l'immagine $Im(\varphi + \psi)$ è chiusa in B e il conucleo $\frac{B}{Im(\varphi+\psi)}$ ha dimensione finita.

Dimostrazione. [5] □

Otteniamo il nostro teorema considerando $\varphi = f$, $\psi = -f$ e quindi $Im(\varphi + \psi) = \{0\}$ allora $\frac{B}{\{0\}} = B$ ha dimensione finita.

Capitolo 2

Funzioni di più variabili complesse

2.1 Lo spazio delle funzioni olomorfe

Definizione 2.1. Sia V un aperto di $\mathbb{C}^n$, una funzione $f\colon V \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ si dice **olomorfa** in V se per ogni $w \in V$ esiste un intorno U di w dove f è sviluppabile in serie di potenze. Ossia:

$$f(z) = \textstyle\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(z_1 - w_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - w_n)^{\nu_n}$$

e la serie al termine di destra converge per ogni $z \in U$. Definiamo, inoltre, $\mathcal{O}(V) = \{f\colon V \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} :\ \text{f olomorfa in } V\}$.

Definizione 2.2. Un sottoinsieme $\Delta(w;r) \subset \mathbb{C}^n$ si dice **polidisco aperto** se è della forma:

$$\Delta(w;r) = \Delta(w_1,\ldots,w_n;r_1,\ldots,r_n) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - w_j| < r_j,\ 1 < j < n\}.$$

w si dice **centro del polidisco** e r si dice **poliraggio**.

Diremo che una funzione f è **olomorfa in ogni variabile separatamente** se comunque fissate $z_1,\ldots,z_{j-1},z_{j+1},\ldots,z_n$ la funzione $\varphi(z) = f(z_j)$ è una funzione olomorfa nella variabile z_j per ogni $j = 1,\ldots,n$. Diamo ora un risultato molto importante che lega l'olomorfia in ogni variabile all'olomorfia in $\mathbb{C}^n$.

Teorema 2.1.1. *Sia $f\colon V \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, V aperto, continua in V e olomorfa in ogni variabile separatamente allora f è olomorfa in V.*

Dimostrazione. Sia $w \in V$ e $\overline{\Delta}(w;r) \subset V$ un polidisco chiuso. Siccome f è olomorfa in ogni variabile separatamente in un aperto contenente $\overline{\Delta}(w;r)$ possiamo applicare ripetutamente la formula integrale di Cauchy per funzioni di una variabile nota dall'analisi e otterremo:

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_1-\zeta_1|=r_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \int_{|w_2-\zeta_2|=r_2} \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \cdots \int_{|w_n-\zeta_n|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n$$

per ogni $z \in \overline{\Delta}(w;r)$. Siccome gli integrandi di destra sono continui su ogni insieme compatto di integrazione il prodotto di questi integrali diventa un unico integrale multiplo che ci fornisce la formula di rappresentazione di Cauchy anche per funzioni di più variabili:

$$f(z) = (\frac{1}{2\pi i})^n \int_{|w_j-\zeta_j|=r_j} \frac{f(\zeta)d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} \tag{2.1}$$

Ora però possiamo sviluppare in serie di potenze uniformemente convergente in $\Delta(w;r)$ il denominatore dell'integrando per ogni $z \in \Delta(w;r)$ ottenendo:

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} = \sum_{\nu_1\ldots\nu_n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - w_1)^{\nu_1}\cdots(z_n - w_n)^{\nu_n}}{(\zeta_1 - w_1)^{\nu_1+1}\cdots(\zeta_n - w_n)^{\nu_n+1}}.$$

Quindi sostituendo nella formula integrale di Cauchy per funzioni di più variabili otteniamo che la funzione f è sviluppabile in serie di potenze dove i coefficienti sono

$$a_{\nu_1\ldots\nu_n} = (\frac{1}{2\pi i})^n \int_{|w_j - \zeta_j| = r_j} \frac{f(\zeta)d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - w_1)^{\nu_1+1}\cdots(\zeta_n - w_n)^{\nu_n+1}}.$$

□

Osservazione 3. Derivando la formula 2.1 segue la formula generale di Cauchy per le derivate:

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}} = \frac{k_1!\cdots k_n!}{(2\pi i)^n} \int_{|w_j - \zeta_j| = r_j} \frac{f(\zeta)d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{k_1+1}\cdots(\zeta_n - z_n)^{k_n+1}}.$$

Il seguente risultato costituisce un importante proprietà delle funzioni olomorfe ed è un caso particolare del teorema di Hartogs [3]:

Teorema 2.1.2. *Sia $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con $n \geq 2$ ed f una funzione olomorfa su $U - \{0\}$ allora f si può estendere ad una funzione olomorfa su tutto U.*

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $\overline{\Delta}(0;r) \subset U$ e consideriamo la funzione olomorfa

$$g\colon \Delta(0;r) \to \mathbb{C}, \quad g(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta, z_2,\ldots,z_n)d\zeta}{(\zeta - z_1)}.$$

Per ogni $(z_2,\ldots,z_n) \neq 0$, segue dalla formula di Cauchy che le due funzioni olomorfe in una variabile

$$z_1 \mapsto f(z_1,z_2,\ldots,z_n), \qquad z_1 \mapsto g(z_1,z_2,\ldots,z_n),$$

coincidono. Dunque le due funzioni olomorfe

$$f\colon \Delta(0;r) - \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad g\colon \Delta(0;r) \to \mathbb{C},$$

coincidono sull'aperto non vuoto $(z_2,\ldots,z_n) \neq 0$. Siccome $\Delta(0;r) - \{0\}$ è connesso, per il principio di identità le funzioni f, g coincidono su $\Delta(0;r) - \{0\}$. □

Il significato di questo teorema è tanto evidente quanto importante. Infatti ci dice che appena $n \geq 2$ le funzioni su un aperto U olomorfe ovunque tranne che in zero non possono che avere in zero una singolarità eliminabile.

Terminiamo questa sezione con la dimostrazione che $\mathcal{O}(V)$ è uno spazio di Fréchet.

Osservazione 4. $\mathcal{O}(V) \subset \mathcal{C}(V)$. Ciò deriva dalle proprietà delle serie di potenze, infatti: se $f \in \mathcal{O}(V)$ allora

$$f(z) = \sum_{v_1,\ldots,v_n=0}^{\infty} a_{v_1,\ldots,v_n}(z_1 - w_1)^{v_1} \ldots (z_n - w_n)^{v_n}$$

e la serie converge per ogni $z \in V$ allora converge uniformemente in ogni aperto contenuto in V ciò implica che f è continua. Inoltre $\mathcal{O}(V)$ è un sottospazio vettoriale.

Per quanto dimostrato nel capitolo precendente $\mathcal{C}(V)$ è di Fréchet quindi basta dimostrare che $\mathcal{O}(V)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{C}(V)$.

Lemma 2.1.3. *$\mathcal{O}(V)$ $(V \subset \mathbb{C}^N)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{C}(V)$.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(V)$ una successione convergente ad una certa funzione limite $f \in \mathcal{C}(V)$. Sia $w \in V$ e $r > 0$ tale che $\overline{\Delta(w,r)} \subset V$ allora per la formula integrale di Cauchy, per ogni $z \in \Delta(w,r)$,

$$f_n(z) = (\frac{1}{2\pi i})^N \int_{|w_j - \zeta_j| = r_j} \frac{f_n(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - w_1) \cdots (\zeta_n - w_n)}$$

perché le f_n sono tutte olomorfe. Poiché la convergenza in $\mathcal{O}(V)$ implica l'uniforme convergenza su ogni compatto contenuto in V, posso passare al limite sotto il segno di integrale:

$$f(z) = (\tfrac{1}{2\pi i})^N \int_{|w_j - \zeta_j| = r_j} \tfrac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - w_1) \cdots (\zeta_n - w_n)}$$

quindi $f \in \mathcal{O}(V)$. □

2.2 Il lemma di Schwarz

Consideriamo lo sviluppo di Taylor di una funzione olomorfa f in un intorno del punto w:

$$f(z) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(z_1 - w_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - w_n)^{\nu_n}$$

Siccome in questo intorno la serie risulta essere assolutamente convergente, possiamo raccogliere i termini della serie in una serie di polinomi omogenei nel modo seguente:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1+\cdots+\nu_n=k} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(z_1 - w_1)^{\nu_1} \ldots (z_n - w_n)^{\nu_n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z).$$

Se p_k è il polinomio di grado minimo che non è identicamente nullo in w allora f si dice di **ordine totale** k in w. Quindi se $f(z)$ è identicamente nulla in W allora diremo che f ha ordine totale ∞.

Il prossimo teorema è noto come **teorema del massimo** ed è una delle caratteristiche più importanti delle funzioni olomorfe su un insieme aperto.

Teorema 2.2.1. *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un aperto connesso $U \subset \mathbb{C}^n$ se esiste un punto $w \in U$ tale che $|f(z)| \leq |f(w)|$ per ogni z in un intorno aperto di w allora $f(z) = f(w)$ per ogni $z \in U$.*

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che una conseguenza della formula integrale di Cauchy è il fatto che per ogni polidisco $\Delta(w, r) \subset U$

$$V(\Delta)f(w) = \int_{\Delta(w,r)} f(\zeta)dV(\zeta)$$

dove $dV(\zeta)$ è l'elemento infinitesimo di volume e $V(\Delta) = \int_{\Delta(w,r)} dV(\zeta)$ è il volume di $\Delta(w, r)$. Per ipotesi e per le proprietà dell'integrale otteniamo:

$$V(\Delta)|f(w)| \leq \int_{\Delta(w,r)} |f(\zeta)|dV(\zeta).$$

Per ipotesi esiste un intorno W di w all'interno del quale $|f(w)|$ è un punto di massimo per il modulo di f e quindi scegliamo $\Delta(w, r) \subset W$ ottenendo che $|f(w)| - |f(z)| \geq 0$ per ogni $z \in \Delta(w, r)$. Abbiamo allora che

$$0 \leq \int_{\Delta(w,r)} (|f(w)| - |f(\zeta)|)dV(\zeta) = V(\Delta)|f(w)| - \int_{\Delta(w,r)} |f(\zeta)|dV(\zeta) \leq 0$$

e questo implica che $|f(w)| = |f(z)|$ per ogni $z \in \Delta(w, r)$ quindi per ipotesi di olomorfia f deve essere costante in $\Delta(w; r)$. Possiamo estendere il risultato a tutto U dato che è un aperto connesso. □

A questo punto possiamo dimostrare il Lemma di Schwarz:

Lemma 2.2.2. *Sia f olomorfa in un intorno del polidisco chiuso $\overline{\Delta(0, r)}$ ($r = (r, r, \ldots, r)$). Supponiamo, inoltre, che f sia di ordine k in zero e che $|f(z)| \leq M$ in $\overline{\Delta(0; r)}$. Allora $|f(z)| \leq M\left\|\frac{z}{r}\right\|^k$ per ogni $z \in \overline{\Delta(0, r)}$.*

Dimostrazione. La funzione f è olomorfa in un aperto contenente $\overline{\Delta(0, r)}$ quindi possiede uno sviluppo in serie di polinomi omogenei:

$$f(z) = p_k(z) + p_{k+1}(z) + \cdots .$$

Sia $z \in \Delta(0, r)$ $z \neq 0$ e definiamo la funzione $g(z) = t^{-k} f(t\frac{z}{|z|})$ con $t \in \mathbb{C}$ tale che $|t| < r$. Allora g si può sviluppare in serie di Taylor:

$$g(t) = p_k(\frac{z}{|z|}) + p_{k+1}(\frac{z}{|z|})t + \ldots .$$

Inoltre per come è definita e siccome $|f(z)| \leq M$ su $\overline{\Delta(0, r)}$ allora $|g(t)| \leq Mr^{-k}$ se $|t| = r$. Ma siccome $g(t)$ è olomorfa, allora per il Teorema 2.2.1 sappiamo che $|g(t)| \leq Mr^{-k}$ per ogni $t \leq r$; quindi

$$\left\||z|^{-k} f(z)\right\| = |g(z)| \leq Mr^{-k}$$

da cui la tesi $|f(z)| \leq M\left\|\frac{z}{r}\right\|^k$. □

2.3 Teorema di Vitali

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare il teorema di Vitali e per fare ciò abbiamo bisogno di alcuni risultati sulle funzioni equicontinue.

Definizione 2.3. Sia (V, d) uno spazio metrico compatto, una famiglia di funzioni continue $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(V)$ si dice **equicontinua** se vale

$$\forall\ \epsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0\colon d(x,y) < \delta \text{ allora } |f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ per ogni } f \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(V)$ si dice **equilimitato** se vale

$$\text{esiste } C > 0\colon |f(x)| \leq C \text{ per ogni } f \in \mathcal{F} \text{ e per ogni } x \in V.$$

Teorema 2.3.1 (**Ascoli-Arzelà**). *Una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(V)$ ha chiusura compatta se e solo se è equilimitata ed equicontinua.*

Dimostrazione. Teorema 6.54 pag.122[6] □

Vogliamo ora dimostrare il teorema di Vitali e per questo diamo una definizione preliminare:

Definizione 2.4. Siano $U \subset V$ aperti. Si dice **mappa di restrizione** l'applicazione $r_{UV}\colon \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ che ad ogni $f \in \mathcal{O}(V)$ associa la sua restrizione ad U quindi $r_{UV}(f) = f_{|U}$.

Osservazione 5. La mappa di restrizione $r_{UV}\colon \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ è un'applicazione continua. Basta dimostrare che la controimmagine attraverso la mappa di restrizione di ogni elemento della prebase della topologia su $\mathcal{O}(U)$ è un aperto. Sia, quindi, $\{K_n\}$ un esaustione in compatti per U e $W(K_n, Z_n)$ un aperto della prebase su $\mathcal{O}(U)$ della topologia compatta aperta. Quindi $r_{UV}^{-1}(W(K_n, Z_n)) = \{f \in \mathcal{O}(V) : f_{|U} \in W(K_n, Z_n)\}$. Sia ora $\{C_n\}$ un esaustione in compatti di V tale che $K_n \subset C_n$. Allora se considero la prebase della topologia compatta aperta su $\mathcal{O}(V)$ sicuramente $W(C_n, Z_n) \subset r_{UV}^{-1}(W(K_n, Z_n))$ quindi $r_{UV}^{-1}(W(K_n, Z_n))$ è aperto.

Teorema 2.3.2 (**Teorema di Vitali**). *Siano U e V aperti di $\mathbb{C}^n$ tali che U ha chiusura compatta e $\overline{U} \subset V$. Allora la mappa di restrizione r_{UV} è un operatore compatto.*

Dimostrazione. Consideriamo preliminarmente il caso in cui $U = \Delta(0, r)$ è un polidisco di centro 0; scegliamo un numero reale $R > r$ tale che $\overline{\Delta(0; R)} \subset V$ e consideriamo l'insieme

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid \sup_{z \in \overline{\Delta(0;R)}} |f(z)| < 1\}.$$

L'insieme $\mathcal{A}$ è aperto in $\mathcal{O}(V)$ e vogliamo dimostrare che è relativamente compatto in $\mathcal{O}(U)$. Siccome $\mathcal{O}(U)$ è chiuso in $C(U)$ basta dimostrare che $\mathcal{A}$ è relativamente compatto in $C(U)$. Siccome la restrizione $C(\overline{U}) \to C(U)$ è continua basta verificare, utlizzando Ascoli-Arzelà, che $\mathcal{A}$ è equicontinuo ed equilimitato in $\overline{U}$. Siccome $\overline{U} \subset \overline{\Delta(0; R)}$ l'equilimitatezza è ovvia. Siano $z, w \in \overline{U}$; per ogni $f \in \mathcal{A}$ vale la formula di Cauchy

$$f(z) - f(w) = (\frac{1}{2\pi i})^n \int_{|\zeta_j| = R} \left(\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} - \frac{1}{(\zeta_1 - w_1) \cdots (\zeta_n - w_n)} \right) f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$$

e quindi

$$|f(z) - f(w)| \leq \sup_{|\zeta_j|=R} \left| \frac{1}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} - \frac{1}{(\zeta_1 - w_1)\cdots(\zeta_n - w_n)} \right|.$$

Si dimostra facilmente che il termine a sinistra è maggiorato da

$$\frac{\sum_{i=1}^n |z_i - w_i|}{(R-r)^{n+1}}$$

e questo prva che $\mathcal{A}$ è equicontinua su $\overline{U}$.

In generale, siccome $\overline{U}$ è compatto, possiamo ricoprirlo con un insieme finito di polidischi

$$\overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^m \Delta(z_i, r_i)$$

tali che $\overline{\Delta(z_i, 2r_i)} \subset V$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Vogliamo dimostrare che la restrizione ad U dell'aperto

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^m \{f \in \mathcal{O}(V) \mid \sup_{z \in \overline{\Delta(z_i;2r_i)}} |f(z)| < 1\}$$

è relativamente compatto in $\mathcal{O}(U)$. Definendo $W = \bigcup_{i=1}^m \Delta(z_i, r_i)$, siccome la restrizione $\mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(U)$ è continua basta mostrare che $\mathcal{A}$ è relativamente compatto in $\mathcal{O}(W)$. D'altra parte $\mathcal{O}(W)$ è isomorfo ad un sottopazio chiuso di $\prod_{i=1}^m \mathcal{O}(\Delta(z_i, r_i))$ cioè al nucleo dell'applicazione

$$\sigma\colon \prod_{i=1}^m \mathcal{O}(\Delta(z_i, r_i)) \to \prod_{i<j} \mathcal{O}(\Delta(z_i, r_i))$$

che a $(f_1, \ldots, f_m)$ associa $(f_1 - f_2, f_1 - f_2, \ldots)$ e che è un'applicazione continua. Terminiamo la dimostrazione osservando che precedentemente abbiamo dimostrato che la restrizione di $\mathcal{A}$ a $\prod_{i=1}^m \mathcal{O}(\Delta(z_i, r_i))$ è contenuta in un prodotto finito di compatti. □

2.4 Varietà complesse

Per definire una varietà complessa abbiamo bisogno del concetto preliminare di varietà topologica.

Definizione 2.5. Uno spazio topologico X si dice **varietà topologica di dimensione** k se:

1. X è di Hausdorff.

2. Ogni punto di X possiede un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^k$ cioè per ogni $p \in X$ esiste $p \in U \subset X$ aperto, $V \subset \mathbb{R}^k$ e $\varphi\colon U \to V$ omeomorfismo. La terna (U, V, φ) si dice **carta**.

3. X è a base numerabile.

Osservazione 6. Se la varietà topologica è di dimensione pari $k = 2n$ allora, per ogni carta (U, V, φ) possiamo considerare V aperto di $\mathbb{C}^n$

Definizione 2.6. Sia X varietà topologica di dimensione $2n$. Chiameremo **atlante complesso** su X una famiglia di carte $(U_i, V_i \subset \mathbb{C}^n, \varphi_i)$ tali che $\bigcup_i U_i = X$.

Definizione 2.7. Un atlante complesso (U_i, V_i, φ_i) su una varietà X si dice **olomorfo** se per ogni i, j:

$$\begin{tikzcd} & U_i \cap U_j \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ V_i \supset \varphi_i(U_i \cap U_j) \arrow[rr, "\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}"'] & & \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j \end{tikzcd}$$

le **funzioni di transizione** $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sono olomorfe.

Sia X una varietà topologica allora consideriamo l'insieme di tutti gli atlanti olomorfi su X:

$$\mathcal{A}_O(X) = \{\mathcal{B} = (U_i, V_i, \varphi_i) \textit{ tale che } \mathcal{B} \text{ è un atlante olomorfo per } X\}.$$

Su questo insieme definiamo una relazione di equivalenza ρ tale che dati due atlanti $\mathcal{B} = (U_i, V_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_O(X)$ *e* $\mathcal{C} = (W_j, Z_j, \psi_j) \in \mathcal{A}_O(X)$

$$\mathcal{B} \ \rho \ \mathcal{C} \textit{ se e solo se } \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \in \mathcal{A}_O(X).$$

Definizione 2.8. Si definisce **varietà complessa di dimensione n** la coppia composta da una varietà topologica X di dimensione $2n$ e una classe di equivalenza di atlanti olomorfi.

Definizione 2.9. Sia X una varietà complessa di dimensione n e sia $Y \subset X$, allora Y si dice **sottovarietà complessa** di dimensione $n - k$ se per ogni $x \in Y$ esiste un intorno $U \subset X$ di x tale che

$$Y \cap U = f^{-1}(0)$$

per qualche $f : U \to \mathbb{C}^k$ olomorfa il cui differenziale sia ovunque suriettivo.

Date due varietà complesse X e Y una funzione $F : X \to Y$ è **olomorfa** se per ogni coppia di carte $(U \subset X, V, \varphi)$ e $(Z \subset Y, W, \psi)$

$$\begin{tikzcd} F^{-1}(Z) \cap U \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ V \supset \varphi(F^{-1}(Z) \cap U) \arrow[r, "\psi \circ F \circ \varphi^{-1}"'] & W \end{tikzcd}$$

l'applicazione $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ è una funzione olomorfa tra aperti di $\mathbb{C}^n$. Ovviamente la definizione di funzione olomorfa non dipende dalla scelta delle carte dato che il cambiamento di carta è una funzione olomorfa e la composizione di funzioni olomorfe è olomorfa.

Definizione 2.10. Una funzione f tra due varietà complesse si dice un **biolomorfismo** se è olomorfa e invertibile con inversa olomorfa.

Diamo alcuni esempi di varietà complesse.

Esempio 2.1. Un esempio banale di varietà complessa di dimensione n è dato da un qualunque sottinsieme aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ che ha come atlante olomorfo la carta (U, U, Id).

Esempio 2.2. Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Innanzi tutto ricordiamo la definizione di spazio proiettivo, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\rho}$ dove ρ è una relazione di equivalenza tale che:

$$(z_0, \ldots, z_n)\ \rho\ (w_0, \ldots, w_n) \textit{ se esiste } \lambda \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \textit{ tale che } w_i = \lambda z_i \textit{ per ogni } i = 0, \ldots, n.$$

osserviamo che gli insiemi $U_i = \{[z_0, \ldots, z_n] : z_i \neq 0\}$ sono tali che $\cup_{i=1}^n U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mentre le funzioni:

$$\begin{aligned} \varphi_i \colon U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ [z_0, \ldots, z_n] &\mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{\hat{z_i}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right) \end{aligned}$$

sono omeomorfismi (con la notazione $\frac{\hat{z_i}}{z_i}$ intendiamo che questa coordinata viene saltata). Consideriamo l'atlante complesso $\{(U_i, \mathbb{C}^n, \varphi_i), i = 1, \ldots, n\}$ e mostriamo che le funzioni di transizione sono olomorfe: per comodità lo facciamo solo per $\varphi_n \circ \varphi_0^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} & U_0 \cap U_n \arrow[dl, "\varphi_n"'] \arrow[dr, "\varphi_0"] & \\ \mathbb{C}^n \setminus \{y_n = 0\} \arrow[rr, "\varphi_n \circ \varphi_0^{-1}"'] & & \mathbb{C}^n \setminus \{w_0 = 0\} \end{tikzcd}$$

dove le coordinate su $\mathbb{C}^n \setminus \{y_n = 0\}$ saranno $\{y_1, \ldots, y_n\}$ mentre quelle su $\mathbb{C}^n \setminus \{w_0 = 0\}$ saranno $\{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$. Allora $\varphi^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = [1, y_1, \ldots, y_n] \in U_0 \cap U_n$ ed è ovviamente olomorfa.

Definizione 2.11. Una varietà complessa si dice **compatta** se lo è come spazio topologico.

Capitolo 3

Fibrati olomorfi e teorema di finitezza

3.1 Fibrati olomorfi

Definizione 3.1. Sia X una varietà complessa di dimensione n, definiamo **fibrato olomorfo di rango m** un'altra varietà E di dimensione $m+n$ dotata di un'applicazione olomorfa $\pi\colon E \to X$ che chiameremo **proiezione** di E su X tale che per un certo ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X esistono dei biolomorfismi di **banalizzazione locale** τ_i

$$\tau_i\colon \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}^m$$

tali che:

1. $pr_1 \circ \tau_i = \pi$ (con pr_1 intendiamo la proiezione sul primo fattore);
2. le funzioni di transizione

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1}\colon \tau_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)) \to \tau_j(\pi^{-1}(U_i \cap U_j))$$

   sono $\mathbb{C}$-lineari su ogni fibra $\pi^{-1}(x)$.

Studiamo meglio le fibre di un fibrato olomorfo. Sia X una varietà complessa ed E un fibrato olomorfo di rango m su X; indichiamo con π la proiezione di E su X e con $\mathcal{U} = \{U_i\}$ il ricoprimento aperto banalizzante. Sia $x \in U_i \subset X$ allora

$$\pi^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{C}^m = \{(p, \zeta_i) | p \in U_i, \zeta_i = (\zeta_i^1, \dots, \zeta_i^m) \in \mathbb{C}^m\}.$$

Appare, quindi, chiaro che $\pi^{-1}(x) = x \times \mathbb{C}^m$ che è uno spazio vettoriale di cui $(\zeta_i^1, \dots, \zeta_i^m)$ è un sistema di coordinate. Il punto x potrebbe, però, appartenere anche ad un altro degli aperti del ricoprimento, ci chiediamo, quindi, se la struttura di spazio vettoriale dipenda dall'aperto considerato. Sia $x \in U_i \cap U_j$ e siano $\zeta_i = (\zeta_i^1, \dots, \zeta_i^m)$ e $\zeta_j = (\zeta_j^1, \dots, \zeta_j^m)$ i sistemi di coordinate sulla fibra $\pi^{-1}(x)$ considerando prima $x \in U_i$ e poi $x \in U_j$. Affinchè la struttura di spazio vettoriale non dipenda dall'aperto del ricoprimento dobbiamo verificare che esiste una trasformazione lineare $f_{ij} = (f^{\alpha}_{ij\beta})$ tale che:

$$\zeta_i^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{m} f^{\alpha}_{ij\beta} \zeta_j^{\beta}.$$

Ma per come è definito un fibrato sappiamo che le funzioni di transizione $\tau_i^{-1} \circ \tau_j$ sono $\mathbb{C}$-lineari sulle fibre quindi basta scegliere $f_{ij} = \tau_i^{-1} \circ \tau_j$.

Diremo che $\zeta_i = (\zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^m)$ sono le **coordinate di fibra** del punto $(x, \zeta_i) \in \pi^{-1}(x)$ relativamente all'aperto U_i.

Le funzioni di transizione soddisfano le seguenti proprietà. Innanzi tutto osserviamo che se $j = i$ abbiamo che $f_{ii}(x) = Id$ dove con Id indichiamo la matrice identità. Inoltre, poiché per ogni $\zeta_h \in \mathbb{C}^m$

$$\zeta_i = f_{ih}(x)\zeta_h = f_{ij}(x)\zeta_j = f_{ij}(x) f_{jh}(x)\zeta_h$$

possiamo dire che

$$f_{ih}(x) = f_{ij}(x) f_{jh}(x) \qquad x \in U_i \cap U_j \cap U_h.$$

Da queste due condizioni otteniamo, infine, che se $h = i$ allora:

$$f_{ij}(x) f_{ji}(x) = Id.$$

Fin qui abbiamo descritto le proprietà delle funzioni di transizione a partire da un fibrato olomorfo, possiamo però costruire un fibrato a partire da un ricoprimento di una varietà complessa e da una serie di funzioni olomorfe che soddisfano le proprietà elencate sopra.

Infatti sia X una varietà complessa, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X e f_{ij} delle funzioni olomorfe su $U_i \cap U_j$ tali che $f_{ij}(x) = (f^{\alpha}_{ij\beta}(x))_{\alpha,\beta=1,\ldots,m}$ per ogni $x \in U_i \cap U_j$. Possiamo definire un fibrato E su questa varietà considerando $E = \bigcup_i U_i \times \mathbb{C}^m$ e identificando $(x, \zeta_i) \in U_i \times \mathbb{C}^m$ con $(x, f_{ij}(x)\zeta_i) \in U_j \times \mathbb{C}^m$ per ogni $x \in U_i \cap U_j$.

Definizione 3.2. Sia X una varietà complessa e siano E e G due fibrati olomorfi su X entrambi di rango m diremo che E e G sono **equivalenti** se esiste un biolomorfismo $\varphi\colon E \to G$ che sia un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare tra le fire di E e quelle di G.

Nel caso esista questo biolomorfismo φ allora considerando un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di X e le coordinate di fibra $\zeta_i = (\zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^m)$ e $\nu_i = (\nu_i^1, \ldots, \nu_i^m)$ rispettivamente di E e G possiamo scrivere φ su $\pi^{-1}(U_i)$ come

$$\varphi\colon (x, \zeta_i) \to (x, \nu_i) = (x, \varphi_i(x)\zeta_i)$$

dove $\varphi_i(x)$ è una matrice a coefficienti funzioni olomorfe tale che $\det(h_i) \neq 0$. Se consideriamo le funzioni di transizione dei due fibrati f_{ij} per E e g_{ij} per G allora è facile verificare che

$$g_{ij}(x) = h_i(x) f_{ij}(x) h_j^{-1}(x), \qquad x \in U_i \cap U_j.$$

Dato che le fibre di un fibrato olomorfo sono spazi vettoriali allora possiamo pensare di tradurre tutte le operazioni tra spazi vettoriali in operazioni tra fibrati. Ne illustriamo qui alcune.

Sia X una varietà complessa ed E e F due fibrati olomorfi su X di rango k ed l con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$, rispettivamente. Allora possiamo definire:

1. $E \oplus F$ il **fibrato somma diretta** definito dalle funzioni di transizione

$$j_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^l)$$

2. $E \otimes F$ il **fibrato prodotto tensoriale** definito dalle funzioni di transizione

$$j_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta}(x) \in \mathbf{GL}(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l)$$

Inoltre possiamo definire un **sottofibrato** F del fibrato olomorfo E sulla varietà complessa X una collezione di sottospazi delle fibre $\{F_x \subset E_x\}_{x \in X}$ tale che

$$F = \bigcup F_x \subset E$$

sia una sottovarietà complessa di E. Ovviamente F è un fibrato.

Definizione 3.3. Si dice **sezione olomorfa globale** di un fibrato $E \xrightarrow{\pi} X$ un'applicazione olomorfa $\sigma\colon X \to E$ tale che $\pi \circ \sigma = Id_X$. Allo stesso modo possiamo definire le **sezioni locali olomorfe** cioè delle applicazioni olomorfe $\sigma\colon U \subset X \to E$ tale che $\sigma \circ \pi = Id_U$.

Lo spazio delle sezioni è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, con somma e prodotto per scalare definiti fibra per fibra, e si denota solitamente nel modo seguente:

$$\Gamma(X, E) = \{\sigma\colon X \to E \ : \pi \circ \sigma = Id_X \ \}$$

Definizione 3.4. Sia E un fibrato olomorfo su una varietà X e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X: introduciamol'applicazione $\mathbb{C}$-lineare

$$\begin{aligned} \delta\colon \prod_i \Gamma(U_i, E) &\to \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, E) \\ \{s_i \in \Gamma(U_i, E) \mid i \in I\} &\mapsto \{s_i - s_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, E) \mid i, j \in I\} \end{aligned}$$

e definiamo lo **zeresimo gruppo di coomologia** lo spazio vettoriale:

$$H^0(\mathcal{U}, E) = \ker(\delta).$$

Lemma 3.1.1. *Siano X una varietà complessa ed E un fibrato olomorfo su X, allora per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X esiste un isomorfismo tra lo zeresimo gruppo di coomologia $H^0(\mathcal{U}, E)$ e lo spazio delle sezioni globali $\Gamma(X, E)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di X. Intorduciamo l'applicazione $\theta\colon \Gamma(X, E) \to H^0(\mathcal{U}, E)$ tale che alla sezione $s \in \Gamma(X, E)$ associa $\{s_{|_{U_i}}\}$ per ogni $i \in I$. Vogliamo dimostrare che θ è iniettiva e suriettiva. Cominciamo con l'iniettività. Siano $s_1, s_2 \in \Gamma(X, E)$ tali che $\theta(s_1) = \theta(s_2)$ allora questo vuol dire che $s_{1|_{U_i}} = s_{2|_{U_i}}$ per ogni i. Ma $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X allora $s_1 = s_2$ su tutto X. Per la suriettività consideriamo $t = \{t_i\}_{i \in I} \in H^0(\mathcal{U}, E)$ allora sappiamo che $t \in \ker(\delta)$ allora $(t_i - t_j)_{|_{U_i \cap U_j}} = 0$ per ogni i, j quindi $t_{i|_{U_i \cap U_j}} = t_{j|_{U_i \cap U_j}}$ per ogni i, j ciò vuo dire che i t_i si incollano bene sulle intersezioni. A questo punto basta scegliere $s \in \Gamma(X, E)$ tale che $s_{|_{U_i}} = t_i$. $\square$

Osservazione 7. Abbiamo già osservato che $\Gamma(X, E)$ è uno spazio vettoriale. Possiamo anche dimostrare che se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è un ricoprimento banalizzante di X allora $\Gamma(U_i, E) \cong \mathcal{O}^m(U_i)$ per ogni i. Infatti su ogni $U_i \in \mathcal{U}$ il fibrato si banalizza e quindi abbiamo che $\pi^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{C}^m$ allora le sezioni locali olomorfe su tale fibrato sono tutte le funzioni olomorfe f che fanno commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\tau_i"] \arrow[dr, "f"'] & & U_i \times \mathbb{C}^m \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

Quindi f deve essere tale che $f \circ \tau_i = pr_1$ cioè $f(U_i \times \mathbb{C}^m) = U_i$ e le funzioni con questa proprietà sono tutte e sole le funzioni da U_i in $\mathbb{C}^m$ olomorfe. Cioè:

$$\Gamma(U_i, E) = \{f : U_i \to \mathbb{C}^m \ olomorfe\} = \mathcal{O}^m(U_i).$$

Lo scopo di questa trattazione sarà quello di dimostrare che lo spazio vettoriale delle sezioni globali di un fibrato olomorfo su una varietà compatta ha dimensione finita.

Prima di passare al teorema di finitezza diamo alcuni esempi di fibrato olomorfo.

Esempio 3.1. Sia X una varietà complessa se scelgo $E = X \times \mathbb{C}^n$ e $\pi = pr_1$ questo è un fibrato detto **banale**. Sono detti banali anche tutti i fibrati equivalenti a questo.

Esempio 3.2. Sia X una varietà complessa di dimensione n, allora possiamo considerare come fibrato olomorfo su X il **fibrato tangente** T_X. Dato un sistema di carte $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ su X definiamo

$$T_X = \cup_{i\in I}(U_i \times \mathbb{C}^n).$$

Le funzioni di transizione sono date da:

$$\begin{aligned}
\tau_j \circ \tau_i^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^n &\to U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^n \\
(u, v) &\longmapsto (u, \phi_{ij}(v))
\end{aligned}$$

dove ϕ_{ij} è una matrice $n \times n$ i cui coefficienti sono $\frac{\partial \varphi_{ij}^k}{\partial z_l}$ indicando con φ_{ij} le funzioni di transizione tra carte $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ e con $z_1, \ldots, z_n$ un sistema di coordinate su $U_i \cap U_j$. Ovviamente la dimensione del fibrato olomorfo è $2n$.

Esempio 3.3. Definiamo i fibrati di rango 1 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$, per ogni $a \in \mathbb{Z}$. Si tratta di fibrati sullo spazio proiettivo di dimensione n molto importanti dei quali sappiamo descrivere le sezioni esplicitamente ed dimostrare direttamente la finitezza dello spazio $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a), \mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. Consideriamo la varietà $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e l'insieme:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) = \frac{\{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\} \times \mathbb{C}}{\mathbb{C}^*}$$

con $a \in \mathbb{Z}$ e dove l'azione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ è data da:

$$\lambda(z_0, \ldots, z_n, t) = (\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n, \lambda^a t).$$

Attraverso la proiezione

$$\begin{aligned} \pi \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \to& \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ (z_0, \dots, z_n, t) \mapsto& [z_0, \dots, z_n] \end{aligned}$$

otteniamo che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$ è un fibrato olomorfo di rango 1 su $\mathbb{P}^n$. Vogliamo vedere chi sono le sezioni di questo fibrato. Innanzi tutto osserviamo che il seguente digramma commuta:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "p"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Quindi sia $U \subset \mathbb{P}^n$ allora una sezione olomorfa $f \colon p^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $f(\lambda z) = \lambda^a f(z)$. Se $U = \mathbb{P}^n$ allora

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)) = \{f : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\ olomorfa:\ f(\lambda z) = \lambda^a f(z)\}$$

ma per il teorema di Hartogs ogni $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a))$ può essere estesa ad una funzione $\tilde{f}$ olomorfa su tutto $\mathbb{C}^{n+1}$. Se consideriamo l'espansione in serie i potenze della funzione $\tilde{f}$ appare chiaro esiste un isomorfismo naturale tra $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a))$ e lo spazio dei polinomi omogenei di grado a nelle variabili $z_0, \dots, z_n$ che ha dimensione finita.

3.2 Fasci

In questa sezione diamo un introduzione alla teoria dei fasci e per iniziare diamo la definizione di prefascio.

Definizione 3.5. Sia X uno spazio topologico. Un **prefascio** $\mathcal{F}$ di insiemi su X è tale che:

1. ad ogni $U \subset X$ aperto si associa un insieme $\mathcal{F}(U)$ chiamato **insieme delle sezioni** di $\mathcal{F}$ su U;
2. per ogni coppia di aperti $U, V \subset X$ tali che $V \subseteq U$ esiste una **funzione di restrizione**

$$r_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

   che rispetti le seguenti proprietà:

   i. per ogni $U \subset X$ aperto $r_{UU} = Id_U$;

   ii. per ogni terna di aperti $U, V, W \subset X$ tali che $W \subseteq V \subseteq U$ si ha $r_{UW} = r_{VW} \circ r_{UV}$.

Un prefascio di gruppi abeliani su X è un prefascio $\mathcal{F}$ di insiemi su X tale che:

- $\mathcal{F}(U)$ ha la struttura di gruppo abeliano per ogni aperto $U \subset X$;

- la mappa di restrizione r_{UV} è un omomorfismo di gruppi per ogni coppia di aperti $V \subset U \subset X$.

Esempio 3.4. Sia A un insieme o un gruppo assegnato e sia X uno spazio topologico. Possiamo costruire su X il **prefascio costante** $\mathcal{A}_X$ dato da:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_X(U) = A \qquad \text{per ogni aperto } U \subset X \\ r_{UV} = Id_A \colon \mathcal{A}_X(U) \to \mathcal{A}_X(V) \qquad \text{per ogni coppia di aperti } V \subset U \subset X \end{cases}$$

Definizione 3.6. Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un prefascio su X. Diremo che $\mathcal{F}$ è un **fascio** se dato $U \subset X$ aperto e $\{V_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di U sono soddisfatte:

iii. se $s \in \mathcal{F}(U)$ è tale che $s_{|V_i} = r_{UV_i}(s) = 0$ allora $s = 0$;

iv. se per ogni $i \in I$ consideriamo $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tali che $s_{i|V_i \cap V_j} = s_{j|V_i \cap V_j}$ per ogni $i, j \in I$ allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s_i = s_{|V_i}$.

Osservazione 8. La condizione *iii* nella definizione di fascio ci assicura che la sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ definita in *iv* è unica.

Diamo, ora, degli esempi di fascio.

Esempio 3.5. Siano X, Y spazi topologici consideriamo il fascio delle funzioni continue $\mathcal{C}(X, Y)$ definito da

$$\begin{cases} \mathcal{C}(U, Y) = \{f \colon U \to Y \ continue\} \qquad U \subset X \ aperto \\ r_{UV} \ V \subseteq U \subset X \text{ restrizione usuale tra funzioni.} \end{cases}$$

Esempio 3.6. Sia X una varietà differenziabile e $U \subset X$ un aperto allora possiamo considerare i fasci:

- $\mathcal{C}^\infty$ definito da $\mathcal{C}^\infty(U) = \{$gruppo additivo delle funzioni differenziabili su $U\}$
- $\mathcal{C}^*$ definito da $\mathcal{C}^*(U) = \{$gruppo moltiplicativo delle funzioni differenziabili non nulle su $U\}$
- $\mathbb{Z}_X, \mathbb{Q}_X, \mathbb{R}_X, \mathbb{C}_X$ definiti dagli insiemi di funzioni localmente costanti su U a valori in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

dove le restrizioni sono quelle usuali delle funzioni.

Esempio 3.7. Sia X una varietà complessa e $U \subset X$ un aperto allora sono fasci:

- $\mathcal{O}_X$ definito da $\mathcal{O}(U) = \{f \colon U \to \mathbb{C} \ olomorfe\}$
- $\mathcal{O}^*_X$ definito da $\mathcal{O}^*(U) = \{$gruppo moltiplicativo delle funzioni olomorfe non nulle su $U\}$.

Il fascio $\mathcal{O}_X$ è molto importante e viene chiamato **fascio strutturale**. Le restrizioni sono sempre quelle usuali.

Osservazione 9. Se X è una varietà complessa ed E un fibrato olomorfo su X, allora gli spazi delle sezioni olomorfe locali di E su un aperto $U \subset X$, $\Gamma(U, E)$, definiscono un fascio su X che denoteremo con $\Gamma(E)$.

Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci definiti su X allora si può definire un **morfismo** tra questi due fasci $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ come una collezione di omomorfismi di gruppi

$$\phi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

al variare di $U \subset X$ aperto, tali che per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$ commuti il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "r_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Un isomorfismo di fasci è un morfismo che ammette un inversa.

Definizione 3.7. Sia X uno spazio topologico e $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci allora possiamo considerare i seguenti prefasci:

- $\ker(\phi)$ definito da $\ker(\phi)(U) = \ker\{\phi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\}$;
- $Coker(\phi)$ definito da
$$Coker(\phi)(U) = \frac{\mathcal{G}(U)}{\phi_U(\mathcal{F}(U))}$$
- $\Im(\phi)$ definito da $\Im(\phi)(U) = \phi_U(\mathcal{F}(U))$.

Osservazione 10. Il fatto che nucleo, conucleo e immagine di un morfismo di fasci siano dei prefasci è ovvio poiché $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci. Infatti le funzioni di restrizione definite su ognuno dei tre insiemi sono quelle definite o su $\mathcal{F}$ o su $\mathcal{G}$ e sicuramente rispettano le proprietà **i,ii** delle definizione **??**.

Per il nucleo, però, possiamo dire di più. Infatti è molto facile verificare che il nucleo di un morfismo di fasci soddisfa anche le proprietà **iii,iv** della definizione **??** e quindi è un fascio.

Esempio 3.8. Sia $X = \mathbb{C}$ dotato della topologia euclidea. Consideriamo i due fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ e $\mathcal{O}^*_{\mathbb{C}}$ definiti nell'esempio **??**. Possiamo considerare il morfismo di fasci:

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}} &\to \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}} \\ f &\mapsto e^{2\pi i f}. \end{aligned}$$

Osserviamo che il nucleo di questo morfismo è proprio il fascio $\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}$ mentre il conucleo non è un fascio poiché non soddisfa la condizione **iv** della definizione **??**.

In conclusione di questa sezione vogliamo definire le fibre di un fascio.

Definizione 3.8. Sia X uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ un fascio su X e $x \in X$ un punto qualunque. Definiamo **fibra** di $\mathcal{F}$ in x e la indichiamo con $\mathcal{F}_x$, l'insieme di tutte le coppie del tipo (U, s) dove $x \in U \subset X$ è un aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$ quozientato con la relazione di equivalenza ρ data da:

$$(U_1, s_1)\rho(U_2, s_2) \textit{ se esiste } V \textit{ intorno aperto di } x \textit{ tale che } V \subset U_1 \cap U_2 \textit{ e } s_{1|_V} = s_{2|_V}.$$

Gli elementi di $\mathcal{F}_x$ sono detti **germi** di sezioni di $\mathcal{F}$ in x.

Esempio 3.9. Se consideriamo il fascio strutturale di una varietà complessa X allora la sua fibra in ogni punto di X coincide con l'anello delle funzioni olomorfe definite in qualche intorno aperto di x:

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{O}_{X,x} : \mathcal{O}_{X,x}(V) = \frac{\{f : V \to \mathbb{C} \; olomorfa\}}{\rho}$$

con ρ definita prima.

3.3 Ricoprimenti e raffinamenti

Con questa sezione apriamo una parentesi topologica in questo capitolo e dimostreremo l'ultimo argomento indispensabile per dimostrare la finitezza dello spazio delle sezioni globali. Cominciamo con la definizione di ricoprimento e ricoprimento fondamentale:

Definizione 3.9. Un **ricoprimento** di un insieme X è una famiglia $\{A_i\}$ di sottoinsiemi tali che X=$\cup_i A_i$.
Un ricoprimento si dice **fondamentale** se un sottoinsieme U di X è aperto se e solo se U$\cap A_i$ è aperto in A$_i$ per ogni i.

Osservazione 11. Ogni ricoprimento aperto è fondamentale.

Dimostrazione. Se U$\subset X$ è aperto allora U$\cap A_i$ è aperto in A$_i$ per ogni i.
Dimostriamo il viceversa.
Sia $\{A_i\}$ un ricoprimento aperto di X e U$\subset X$. Se U$\cap A_i$ è aperto in A$_i$ per ogni i allora U$\cap A_i$ è aperto anche in X e quindi U= $\cup_i(A_i \cap U)$ è aperto in X. □

Consideriamo uno spazio topologico X e una famiglia di aperti $\mathcal{A} = \{A_i | A_i \subset X\}$.

Definizione 3.10. La famiglia $\mathcal{A}$ si dice **localmente finita** se per ogni $x \in X$ esiste un intorno V di x tale che $V \cap A_i \neq \emptyset$ per al massimo un numero finito di indici i.

Osservazione 12. Una famiglia $\mathcal{A} = \{A_i | i \in I\}$ è localmente finita se e solo se la famiglia $\{\overline{A}_i | i \in I\}$ è localmente finita.

Il prossimo lemma è un risultato sulle famiglie localmente finite che ci servirà in seguito.

Lemma 3.3.1. *Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}$ una famiglia localmente finita di sottoisieme di uno spazio topologico X allora*

$$\overline{\cup_i A_i} = \cup_i \overline{A}_i$$

Dimostrazione. L'inclusione $\cup \overline{A}_i \subset \overline{\cup_i A_i}$ è semplice da dimostrare poiché $A_i \subset \overline{\cup_i A_i}$ ma $\overline{\cup_i A_i}$ è un chiuso e quindi contiene anche $\overline{A}_i$ per ogni i. Rimane quindi da dimostrare che $\cup \overline{A}_i$ è un chiuso in X. Possiamo trovare un ricoprimento aperto $\{U_j\}$ tale che ogni U_i interseca al più un numero finito di A_i e quindi

$$(\cup_i \overline{A}_i) \cap U_j = \cup_i (U_j \cap \overline{A}_i)$$

è chiuso in U_j e siccome ogni ricoprimento aperto è fondamentale $\cup_i \overline{A}_i$ è chiuso in X. □

Definizione 3.11. Siano $\{U_i\}_{i\in I}$ e $\{V_j\}_{j\in J}$ due ricoprimenti aperti di uno spazio topologico X allora si dice che $\{U_i\}$ è un **raffinamememto** di $\{V_j\}$ se per ogni $i \in I$ esiste $j \in J$ tale che $U_i \subset V_j$ e definiamo **funzione di raffinamento** una $f : I \to J$ tale che $U_i \subset V_{f(i)}$ per ogni i.

Definizione 3.12. Uno sazio topologico X si dirà **paracompatto** se ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento localmente finito.

Osservazione 13. Uno spazio topologico compatto è anche paracompatto. Inoltre, uno spazio topologico localmente compatto a base numerabile è paracompatto.[6] In particolare una varietà topologica è paracompatta come tutti gli aperti contenuti in essa.

Teorema 3.3.2. *[**restringimenti**]. Sia $X = \cup_{i\in I} U_i$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico paracompatto e di Hausdorff con I un insieme di indici. Allora esiste un altro ricoprimento aperto localmente finito $\{V_i\}_{i\in I}$ tale che $\overline{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ scegliamo un indice $i(x) \in I$ tale che $x \in U_{i(x)}$ ed un intorno aperto di x $W(x)$ tale che $\overline{W(x)} \subset U_i(x)$. Sia $\{A_j\}_{j\in J}$ un raffinamento localmente finito del ricoprimento aperto di X formato dagli aperti $\{W(x) | x \in X\}$ allora esiste una funzione di raffinamento $f : J \to I$ tale che $\overline{A}_j \subset U_{f(j)}$ per ogni $j \in J$. A questo punto consideriamo per ogni $i \in I$ l'aperto $V_i = \cup_{j:f(j)=i} A_j$. Siccome la famiglia degli $\{A_j\}$ è localmente finita allora vale il lemma precedente per cui:

$$\overline{V_i} = \cup_{j:f(j)=i} \overline{A}_j \subset U_i.$$

□

Come applicazione del teorema dei restringimenti diamo la dimostrazione del teorema di Vitali per aperti di una varietà.

Teorema 3.3.3. *Sia X una varietà complessa di dimensione n e U, V due aperti di X tali che U ha chiusura compatta e $\overline{U} \subset V$. Allora la mappa di restrizione $r_{UV} : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ è un operatore compatto.*

Dimostrazione. Osserviamo, innanzi tutto, che se U e V sono contenuti in una carta allora sappiamo che sono omeomorfi ad aperti di $\mathbb{C}^n$ per i quali il teorema di Vitali è già stato dimostrato nel capitolo 2.

Consideriamo, quindi, il caso non banale in cui U e V sono due aperti qualunque di X. Siccome X è una varietà, allora posso trovare un insieme di aperti $\{W_i\}_{i\in I}$ tali che ogni W_i è contenuto in una carta e $V \subset \bigcup_{i\in I} W_i$. Siccome, per quanto detto nell'osservazione **??**, V è un insieme paracompatto allora per il teorema dei restringimenti posso trovare un altro ricoprimento $\{V_i\}_{i\in I}$ localmente finito di V tale che

$$V_i \subset \overline{V_i} \subset W_i.$$

Per ipotesi sappiamo che $\overline{U}$ è un sottoinsieme compatto di V allora posso estrarre un ricoprimento finito di U da $\{V_i\}$ ottenendo a meno di rinumerare i V_i che:

$$\overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_i.$$

Consideriamo, ora, gli insiemi $U_i = V_i \cap U$. Sicuramente $U = \cup_{i=1}^{N} U_i$ e $\overline{U}_i \subset \overline{U}$ è compatto. Inoltre per come li abbiamo definiti:

$$\overline{U}_i \subset \overline{V}_i \subset W_i \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, N.$$

Consideriamo allora la funzione di restrizione:

$$r_{UV} : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U).$$

Per dimostrare che è un operatore compatto consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(V) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "r_{UV}"] \arrow[dr, "f"] & \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}(V_i) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{O}(U) \arrow[r, "\eta"] & \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}(U_i)
\end{tikzcd}$$

Sappiamo che φ è compatto poiché i V_i e gli U_i sono contenuti in delle carte e ψ è continua quindi anche f è un operatore compatto. Infine, per la continuità di η abbiamo che r_{UV} è un operatore compatto. □

Con questo teorema terminiamo la serie di risultati preliminari e abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare il teorema di finitezza.

3.4 Finitezza delle sezioni globali su varietà compatte.

In questa sezione conclusiva dimostriamo solo uno dei teoremi di finitezza sulle varietà compatte e per la precisione dimostriamo quello che rigurda lo zeresimo gruppo di coomologia di un fibrato olomorfo.

Teorema 3.4.1. *Siano X una varietà complessa compatta ed E un fibrato olomorfo su X. Allora lo spazio vettoriale delle sezioni globali $\Gamma(X,E)$ ha dimensione finita su $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Sia X di dimensione n ed E di rango k. Indichiamo con π la funzione olomorfa che definisce il fibrato e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,h}$ un ricoprimento finito di X banalizzante. Osserviamo che possiamo assumere $\mathcal{U}$ finito poiché X è compatta e quindi da ogni ricoprimento se ne può estrarre uno finito. Consideriamo, inoltre, un altro ricoprimento finito $\mathcal{V} = \{V_i\}$ tale che $\overline{V}_i \subset U_i$ per ogni i. Sappiamo che questo ricoprimento esiste per quanto dimostrato nel Teorema 3.2.2. A questo punto consideriamo lo spazio delle sezioni di E sugli aperti del ricoprimento U_i e dall'Osservazione 7 sappiamo che $\Gamma(U_i,E) \cong \mathcal{O}^k(U_i)$. Siccome lo spazio delle funzioni olomorfe è un spazio di Fréchet allora lo è anche $\Gamma(U_i,E)$. Per la stessa osservazione $\Gamma(V_i,E) = \mathcal{O}^m(V_i)$. Consideriamo, allora, la mappa di restrizione

$$\begin{aligned} R_{U_iV_i}\colon \Gamma(U_i,E) \to& \Gamma(V_i,E) \\ f \mapsto& f_{|V_i} \end{aligned}$$

e per come abbiamo scelto i ricoprimenti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ $R_{U_iV_i}$ per il teorema di Vitali per le varietà è un operatore compatto per ogni i. Osserviamo, inoltre, che anche lo spazio:

$$\prod_{i=1}^{h} \Gamma(U_i,E) = \prod_{i=1}^{h} \mathcal{O}^m(U_i)$$

è di Fréchet e che $\Gamma(X,E) \subset \prod_{i=1}^{h} \Gamma(U_i,E)$. Infatti il prodotto finito di spazi di Fréchet è ancora di Fréchet e le sezioni globali su X possono essere considerare come le sezioni locali che coincidono sulle intersezioni di ogni U_i. Dimostriamo che $\Gamma(X,E)$ è uno spazio di Fréchet. Consideriamo la funzione:

$$\begin{aligned} \sigma\colon \prod_{i=1}^{h} \Gamma(U_i,E) \to& \prod_{i<j} \Gamma(U_i \cap U_j, E) \\ (s_1,\dots,s_n) \mapsto& (s_1 - s_2, s_1 - s_3, \dots) \end{aligned}$$

e mostriamo che è continua. Ci basta far vedere che è continua coordinata per coordinata cioè che lo è la funzione:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}\colon \Gamma(U_i,E) \times \Gamma(U_j,E) \to& \Gamma(U_i \cap U_j) \\ (s_i,s_j) \longmapsto& s_i - s_j \end{aligned} \tag{3.1}$$

per ogni i,j dove con $s_i - s_j$ indichiamo la differenza tra le restrizioni di s_i e s_j ad $U_i \cap U_j$. La continuità di ognuna di queste componenti è ovvia dato che la restrizione è una funzione continua per l'Osservazione 5 e lo è anche la sottrazione poiché che ci troviamo in spazi vettoriali topologici. Quindi σ è continua e lo zeresimo gruppo di coomologia $H^0(\mathcal{U},E)$ che è quindi chiuso. Quindi $H^0(\mathcal{U},E)$ è uno spazio Fréchet ma per il Lemma 3.1.1 $H^0(\mathcal{U},E) \cong \Gamma(X,E)$ quindi anche $\Gamma(X,E)$ di Fréchet.

Ora consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{U},E) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \prod_{i=1}^h \Gamma(U_i,E) \arrow[r] \arrow[d, "R_{UV}"] & \prod_{i<j} \Gamma(U_i \cap U_j, E) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{V},E) \arrow[r] & \prod_{i=1}^h \Gamma(V_i,E) \arrow[r] & \prod_{i<j} \Gamma(V_i \cap V_j, E)
\end{tikzcd}$$

Innanzi tutto φ è un isomorfismo poiché $H^0(\mathcal{U},E) \cong \Gamma(X,E) \cong H^0(\mathcal{V},E)$. Inoltre φ è un operatore compatto perché lo è R_{UV}. Infatti se $Z \subset \Gamma(X,E)$ è un aperto allora è anche un sottoinsieme aperto di $\prod_{i=1}^h \Gamma(U_i,E)$ e $R_{U,V}(Z)$ ha chiusura compatta in $\prod_{i=1}^h \Gamma(V_i,E)$ poiché ogni componente di R_{UV} è un operatore compatto quindi:

$$\varphi(K) = R_{UV}(K) \cap \Gamma(X,E)$$

ha chiusura compatta. Abbiamo appena dimostrato che φ è un operatore linerare, continuo, suriettivo e compatto tra spazi di Fréchet quindi per il 1.3.1 $H^0(\mathcal{V},E) \cong \Gamma(X,E)$ ha dimensione finita. $\square$

Bibliografia

[1] H. Scheafer: *Topological vector spaces* Macmillan (1966).

[2] W. Rudin: *Funcional Analysis* McGraw-Hill (1973).

[3] R. Gunning , H. Rossi: *Analytic function of several complex variables* Prentice-Hall (1965).

[4] C. Voisin: *Hodge theory and complex algebraic geometry, I* Cambridge University Press (2002).

[5] L. Schwartz: *Homomoprhismes et applications compltement continues* C. R. Acad. Sci. Paris 236, (1953).

[6] M. Manetti: *Topologia* Springer (2008).