IL GRUPPO $SO(3)$

1. Semplicità di $SO(3)$

Usando l'omomorfismo suriettivo $\rho : SU(2) \to SO(3)$ che abbiamo già descritto, possiamo dimostrare che $SO(3)$ è un gruppo *semplice*. In effetti, per far questo ci basta mostrare che se $N < SU(2)$ è un sottogruppo normale, allora abbiamo $N = \{I,\ -I\}$ oppure $N = SU(2)$.

Sia dunque $N < SU(2)$ un sottogruppo normale. Esso è unione di un certo numero di classi coniugate in SU(2). Supponiamo $N \neq \{I,\ -I\}$. Poiché ogni elemento di $SU(2)$ è coniugato ad una matrice diagonale $R_{2\phi} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$, $0 \le \phi < \pi$, N conterrà un elemento $R_{2\phi}$ con $\phi \in (0, \pi)$. Poiché N è normale abbiamo, per ogni $g \in SU(2)$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$,

$$R_{2\phi}\, g\, R_{2\phi}^{-1}\, g^{-1} = \begin{pmatrix} |\,a\,|^2 + |\,b\,|^2\, e^{i2\phi} & * \\ * & |\,a\,|^2 + |\,b\,|^2\, e^{-i2\phi} \end{pmatrix} \in N.$$

Valendo $|\,a\,|^2 + |\,b\,|^2 = 1$, abbiamo dunque

$$\mathrm{tr}(R_{2\phi}\, g\, R_{2\phi}^{-1}\, g^{-1}) = 2(1 - |\,b\,|^2 + |\,b\,|^2 \cos 2\phi).$$

Se diagonalizziamo $R_{2\phi}\, g\, R_{2\phi}^{-1}\, g^{-1} \in N$, otteniamo quindi una matrice $R_{2\theta} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ che appartiene ancora ad N, con θ soddisfacente la relazione

$$\cos\theta = 1 - |\,b\,|^2 + |\,b\,|^2 \cos 2\phi.$$

La quantità a destra di tale equazione è funzione decrescente di $|\,b\,|$. Poiché al variare di $g \in SU(2)$, $|\,b\,|$ può prendere tutti i valori compresi nell'intervallo $[0, 1]$, ne deduciamo che θ può assumere tutti i valori compresi nell'intervallo $[0, 2\phi]$. Ora, dato un qualsiasi valore reale $\psi > 0$, possiamo senz'altro trovare un intero n tale che $\psi/n \in (0, 2\phi)$. Abbiamo dunque $R_{2\psi/n} \in N$ e conseguentemente

$$R_{2\psi} = (R_{2\psi/n})^n \in N,$$

per ogni $\psi > 0$. Da ciò concludiamo $N = SU(2)$. □

2. Sottogruppi finiti di SO(3)

Dato un gruppo G una *rappresentazione speciale ortogonale fedele e di grado 3 di* G è, per definizione, un omomorfismo iniettivo

$$G \hookrightarrow SO(3)\,.$$

In questa sezione descriviamo i sottogruppi finiti di $SO(3)$. Fra questi troveremo S_4, A_4 ed A_5, individuando così delle particolari rappresentazioni (speciali-ortogonali, fedeli, di grado 3) di tali gruppi.

Data una rotazione $g \in SO(3)$, si dicono *poli* di g i due punti di intersezione del suo asse di rotazione con la sfera unitaria S^2.

Università di Roma 1: a.a. 2007-08, corso di Geometria Analitica, E.A., M.M. e A.F.

Sia allora $G \subset SO(3)$ un sottogruppo finito e siano

$$P = \{\text{poli delle rotazioni } g \in G,\ g \neq I\},$$
$$Q = \{(g,p) \in G \times P \ \mid \ g \neq I,\ gp = p\}.$$

Notiamo che, se p è un polo per $g \in G$ ed h è un altro elemento di G, allora hp è un polo per $hgh^{-1} \in G$. Dunque G agisce su P come gruppo di permutazioni. Dato $p \in P$, indichiamo con G_p il suo stabilizzatore. Poniamo $n_p = |G_p|$, $d = |G|$ e $m_p = d/n_p$. Poiché ciascun elemento $g \in G$ diverso dall'identità ha due poli, abbiamo

$$|Q| = 2(d-1).$$

Consideriamo ora le orbite $O_1, \ldots, O_h$ rispetto all'azione di G su P e scegliamo un rappresentante $p_i \in O_i$ per ciascuna di esse. Scriviamo $n_i = n_{p_i}$, $m_i = m_{p_i}$. Per come è stato definito l'insieme Q, abbiamo

$$\begin{aligned} 2(d-1) \equiv |Q| &= \sum_{p \in P}(n_p - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{h} m_i(n_i - 1) \\ &\quad (\text{essendo } P = \cup_i O_i,\ n_p = n_i\ \forall p \in O_i \ \text{ e } \ m_i = |O_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{h}(d - m_i). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$2d - 2 = \sum_{i=1}^{h}(d - m_i),$$

ossia

$$2 - \frac{2}{d} = \sum_{i=1}^{h}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right). \tag{1}$$

Essendo $d > 1$, abbiamo $1 \leq 2 - \frac{2}{d} < 2$ e dal fatto che vale $n_i \geq 2$ segue $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n_i} < 1$. Da ciò deduciamo $h = 2, 3$.

Supponiamo $h = 2$. Abbiamo $2 - \frac{2}{d} = 2 - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$, ossia $2 = \frac{d}{n_1} + \frac{d}{n_2} = m_1 + m_2$. Ne deduciamo $m_1 = m_2 = 1$, $n_1 = n_2 = d$ e dunque che gli elementi di G hanno tutti lo stesso asse di rotazione. Il gruppo G si identifica allora con un sottogruppo di $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ di ordine d e, quindi, è isomorfo al gruppo ciclico C_d di d elementi (gruppo delle radici d-sime dell'unità).

Supponiamo ora $h = 3$. Possiamo chiaramente assumere: $n_3 \geq n_2 \geq n_1$. Non può essere $n_1 \geq 3$, perché altrimenti avremmo $\sum_{i=1}^{3}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \geq 2$, in contraddizione con la (1). Abbiamo dunque $n_1 = 2$ e dalla (1) otteniamo

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{d} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}.$$

Non può essere $n_2 \geq 4$, quindi abbiamo $n_2 = 2$ oppure $n_2 = 3$.
Nel caso $n_2 = 2$, abbiamo $n_3 = \frac{d}{2}$ ed $m_1 = m_2 = \frac{d}{2}$, $m_3 = 2$. Vediamo allora che in G vi sono $\frac{d}{2}$ rotazioni $a_1, \ldots, a_{d/2}$ di angolo π attorno ad altrettanti assi e che lo stabilizzatore G_{p_3} è un sottogruppo ciclico di ordine $d/2$, generato dalla rotazione b di angolo $\theta = \frac{4\pi}{d}$ attorno ad un altro asse z. Poiché l'orbita O_3 di $p_3 \in z$ è costituita da due elementi, deve esistere un elemento $a_i \in \{a_1, \ldots, a_{d/2}\}$ tale che $a_i\, p_3 = p_3'$ ($p_3' \in z$ essendo il polo opposto a p_3). Abbiamo dunque $a_i\, b\, a_i = b^{-1}$ e tale relazione, assieme a quelle sugli ordini: $o(a_i) = 2,\ o(b) = d/2$, caratterizzano il gruppo diedrale $D_{d/2}$.

Se abbiamo invece $n_2 = 3$, la (1) ci dà

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{d} = \frac{1}{n_3}$$

e vi sono tre casi possibili:

$$n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 3,\ d = 12,\ m_1 = 6,\ m_2 = 4,\ m_3 = 4; \tag{2}$$

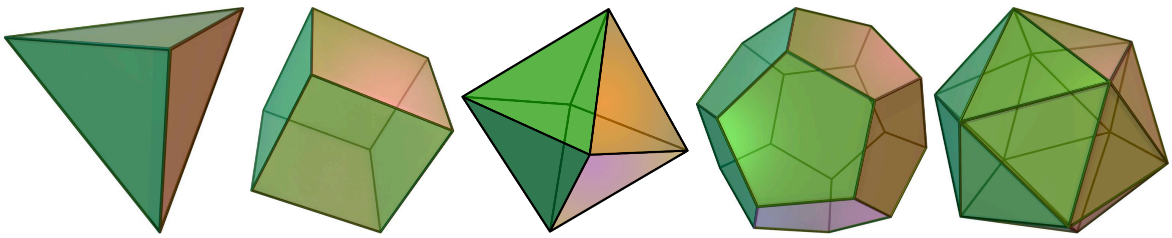
$$n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4,\ d = 24,\ m_1 = 12,\ m_2 = 8,\ m_3 = 6; \tag{3}$$

$$n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 5,\ d = 60,\ m_1 = 30,\ m_2 = 20, m_3 = 12. \tag{4}$$

In conclusione, abbiamo trovato che

Proposizione 2.1. *Un sottogruppo finito di $SO(3)$ è o un gruppo ciclico, o un gruppo diedrale, oppure un gruppo di ordine* 12, 24 o 60. □

Ricordiamo ora che in $\mathbb{R}^3$ vi sono esattamente 5 poliedri convessi regolari (i *solidi platonici*): il tetraedro $\mathbb{D}_4$, il cubo $\mathbb{D}_6$, l'ottaedro $\mathbb{D}_8$, il dodecaedro $\mathbb{D}_{12}$ e l'icosaedro $\mathbb{D}_{20}$.



tetraedro cubo ottaedro dodecaedro icosaedro

Se poniamo il centro di uno di questi poliedri $\mathbb{D}_i$ nell'origine di $\mathbb{R}^3$, le rotazioni di $\mathbb{R}^3$ che portano $\mathbb{D}_i$ in se stesso formano un sottogruppo finito $G(\mathbb{D}_i)$ di $SO(3)$ (il gruppo delle simmetrie di $\mathbb{D}_i$). Osserviamo subito che, se congiungiamo con un segmento i centri di ciascuna coppia di facce adiacenti del cubo $\mathbb{D}_6$, otteniamo un ottaedro inscritto $\mathbb{D}_8$. Chiaramente, una rotazione che manda il cubo in se stesso preserva anche l'ottaedro inscritto, e viceversa. Abbiamo dunque

$$G(\mathbb{D}_6) = G(\mathbb{D}_8).$$

In modo del tutto analogo, possiamo inscrivere un dodecaedro regolare nell'icosaedro ed ottenere l'identificazione

$$G(\mathbb{D}_{12}) = G(\mathbb{D}_{20}).$$

Infine, poiché un tetraedro regolare può essere inscritto nel cubo (congiungendo fra loro un vertice $v \in \mathbb{D}_6$ ed i vertici posti sulle tre diagonali di faccia uscenti da v) abbiamo

$$G(\mathbb{D}_4) \subset G(\mathbb{D}_6).$$

Dato un poliedro regolare $\mathbb{D}_i$, indichiamo con n il numero dei suoi vertici e con ν il numero di spigoli uscenti da un medesimo vertice. Possiamo contare gli elementi del gruppo di simmetrie $G(\mathbb{D}_i)$ nel modo seguente: fissato un vertice $v \in \mathbb{D}_i$, una simmetria $g \in G(\mathbb{D}_i)$ deve mandare v in un vertice $g(v) \in \mathbb{D}_i$ e vi sono dunque n possibili scelte. Per ciascuna di queste, possiamo inoltre ruotare il poliedro intorno al suo asse di simmetria passante per $g(v)$ di un angolo pari a $\dfrac{2k\pi}{\nu}$, con $k = 0, \ldots, \nu - 1$, portando un fissato spigolo uscente da $g(v)$ in uno qualsiasi avente la medesima proprietà. Il numero totale di simmetrie è quindi

$$|\, G(\mathbb{D}_i)\,| = n \cdot \nu.$$

In particolare, abbiamo

$$|\, G(\mathbb{D}_4)\,| = 12, \quad |\, G(\mathbb{D}_6)\,| = 24, \quad |\, G(\mathbb{D}_{12})\,| = 60.$$

Osserviamo ora che $G(\mathbb{D}_6)$ agisce sull'insieme delle quattro grandi diagonali di $\mathbb{D}_6$ in modo fedele (se $g \in G(\mathbb{D}_6)$ lascia invarianti tutte le grandi diagonali allora g è l'identità). Abbiamo dunque un omomorfismo iniettivo $G(\mathbb{D}_6) \to S_4$ ed essendo d'altra parte $|G(\mathbb{D}_6)| = 24$, ne deduciamo

$$G(\mathbb{D}_6) \cong S_4\ .$$

Poiché $G(\mathbb{D}_4) < G(\mathbb{D}_6)$ ha indice 2, esso è un sottogruppo normale. Ma l'unico sottogruppo normale di S_4 avente indice 2 è il gruppo alterno, dunque abbiamo:

$$G(\mathbb{D}_4) \cong A_4\ .$$

Vogliamo ora mostrare la

Proposizione 2.2. *Vi è un isomorfismo*

$$G(\mathbb{D}_{20}) \cong A_5\ .$$

Dimostrazione: innanzitutto facciamo vedere che $G(\mathbb{D}_{20})$ è semplice. Ricordiamo che $\mathbb{D}_{20}$ ha 12 vertici, 30 spigoli e 20 facce. Dunque $G(\mathbb{D}_{20})$ contiene: 15 sottogruppi ciclici di ordine 2, fra loro coniugati, corrispondenti alle rotazioni di angolo π intorno ad assi che congiungono i punti medi di ogni coppia di spigoli opposti; 10 sottogruppi ciclici coniugati di ordine 3 (ciascuno corrispondente alle rotazioni intorno ad uno degli assi che congiungono due facce opposte) e 6 sottogruppi ciclici coniugati di ordine 5 (ciascuno corrispondente alle rotazioni intorno ad uno degli assi che congiungono due vertici opposti). Si noti che in ciascuno di tali sottogruppi un qualsiasi elemento diverso dall'identità è anche un generatore. Se $N < G(\mathbb{D}_{20})$ è un sottogruppo normale, esso è unione di classi coniugate ed avremo

$$|\, N\,| = 1 + k_1 \cdot 15 + k_2 \cdot 20 + k_3 \cdot 24\ ,$$

con $k_i \geq 0$. D'altra parte $|\,N\,|$ divide $|\,G(\mathbb{D}_{20})\,| = 60$, dunque le uniche possibilità sono: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, ossia $N = \{1\}$, e $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, ossia $N = G(\mathbb{D}_{20})$. Ciò dimostra la semplicità di $G(\mathbb{D}_{20})$.

Ora, per dimostrare l'isomorfismo $G(\mathbb{D}_{20}) \cong A_5$, osserviamo che i 15 sottogruppi di ordine 2 si suddividono in 5 insiemi di 3 elementi, ciascuno dei quali, insieme all'identità, forma un sottogruppo di ordine 4. Ogni sottogruppo è costituito dalle rotazioni intorno a 3 assi fra loro ortogonali. Dal teorema di Sylow, sappiamo che questi 5 sottogruppi sono fra loro coniugati. L'azione per coniugio di $G(\mathbb{D}_{20})$ sull'insieme di tali 2-Sylow definisce un omomorfismo

$$G(\mathbb{D}_{20}) \longrightarrow S_5$$

che dev'essere iniettivo, dal momento che $G(\mathbb{D}_{20})$ è semplice. Il fatto che $G(\mathbb{D}_{20})$ ha ordine 60 e che l'unico sottogruppo di indice 2 di S_5 è A_5, ci permette di concludere $G(\mathbb{D}_{20}) \cong A_5$. $\square$

Abbiamo dunque trovato in $SO(3)$ sottogruppi di ordine 12, 24 e 60 non isomorfi a gruppi ciclici o diedrali. Dimostreremo ora la

Proposizione 2.3. *A parte i gruppi ciclici C_n e diedrali D_n, $G(\mathbb{D}_4)$, $G(\mathbb{D}_6)$ e $G(\mathbb{D}_{20})$ sono gli unici (a meno di coniugio) sottogruppi di $SO(3)$ di ordine $12, 24, 60$. In particolare, gli isomorfismi $A_4 \cong G(\mathbb{D}_4) \subset SO(3)$, $S_4 \cong G(\mathbb{D}_6) \subset SO(3)$ e $A_5 \cong G(\mathbb{D}_{20}) \subset SO(3)$ definiscono le uniche (a meno di isomorfismi) rappresentazioni fedeli, speciali-ortogonali, di grado 3 di A_4, S_4, A_5.*

Dimostrazione: abbiamo visto in precedenza che i casi in cui si abbia un sottogruppo finito $G \subset SO(3)$ di ordine $d = 12$, $d = 24$, $d = 60$, corrispondono rispettivamente alle seguenti condizioni (cfr. (2), (3), (4)):

$\boldsymbol{d = 12}$: $n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 3,\ m_1 = 6,\ m_2 = m_3 = 4$.

In questo caso vi sono due orbite per l'azione di G su P, ciascuna costituita da quattro poli: $O = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $O' = \{p_1', p_2', p_3', p_4'\}$. Poiché lo stabilizzatore di ciascun polo in O ed O' ha ordine 3 e la terza orbita contiene 6 poli, corrispondenti a 3 soli assi di rotazione, ciascuno dei p_j' è antipodale ad uno dei p_i. I punti p_1, p_2, p_3, p_4 sono allora vertici di un tetraedro $\mathbb{D}_4'$, il cui gruppo delle simmetrie $G(\mathbb{D}_4')$ contiene G. Dal fatto che G ha ordine 12 deduciamo che $\mathbb{D}_4'$ è un tetraedro *regolare* e dunque che $G(\mathbb{D}_4') = G$.

$\boldsymbol{d = 24}$: $n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4,\ m_1 = 12,\ m_2 = 8,\ m_3 = 6$.

Consideriamo l'orbita di sei elementi $O = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$. Essa è costituita da coppie di poli antipodali (essendo i p_i gli unici poli il cui stabilizzatore ha ordine 4), che possiamo dunque prendere come vertici di un ottaedro $\mathbb{D}_8'$. Abbiamo chiaramente $G(\mathbb{D}_8') \supset G$ e dal fatto che G ha ordine 24 deduciamo come nel caso precedente che $\mathbb{D}_8'$ è regolare e G coincide con $G(\mathbb{D}_8')$.

$\boldsymbol{d = 60}$: $n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 5,\ m_1 = 30,\ m_2 = 20,\ m_3 = 12$.

Si procede in maniera del tutto analoga al caso precedente, considerando l'icosaedro i cui vertici sono i poli della G-orbita di 12 elementi. $\square$