SPAZI PROIETTIVI

1. Le prime definizioni

Sia V uno spazio vettoriale su K si indica con $\mathbb{P}V$ lo *spazio proiettivo di* V definito come l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}V = V \smallsetminus \{0\} \ / \ \sim$$

dove

$$v \sim v' \qquad \iff \qquad v' = \lambda v\,, \quad \lambda \in K \smallsetminus \{0\}\,.$$

Dunque $\mathbb{P}V$ può essere visto come l'insieme delle rette per l'origine di V o, se si vuole, come l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di V. La classe di equivalenza di v si denota con il simbolo $[v]$ e si dice che $[v]$ è un *punto* dello spazio proiettivo $\mathbb{P}V$.

Se $\dim V = n+1$, si dice che $\mathbb{P}V$ è uno spazio proiettivo di dimensione n. Una volta scelta una base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ per V si ha una identificazione $V \cong K^{n+1}$. Si denota con $(X_1, \dots, X_{n+1})$ la base duale per V^*. Come al solito, questa base duale può pensarsi come un sistema di coordinate per V. Per semplicità si scrive

$$\mathbb{P}K^{n+1} = \mathbb{P}^n_K$$

I punti di $\mathbb{P}^n_K$ si scrivono nella forma

$$[v] = [X_1, \dots, X_{n+1}]$$

dove si sottointende che non tutti gli X_i sono nulli, e si dice che $X_1, \dots, X_{n+1}$ sono le *coordinate omogenee del punto* $[v]$. Osserviamo che c'è una applicazione iniettiva

$$\alpha : K^n \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$
$$(x_1, \dots x_n) \mapsto [x_1, \dots x_n, 1]$$

Si ha

$$\alpha(K^n) = \{[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}] \in \mathbb{P}^n_K \mid X_{n+1} \neq 0\}$$

Infatti, se $X_{n+1} \neq 0$, si ha

$$[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}] = \left[\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}}, 1\right].$$

Si ha quindi:

$$\mathbb{P}^n_K \smallsetminus \alpha(K^n) = \{[X_1, \dots, X_n, 0] \in \mathbb{P}^n_K\} \cong \mathbb{P}^{n-1}_K$$

Da questo punto di vista, $\mathbb{P}^n_K$ può pensarsi come ottenuto da K^n aggiungendo un $\mathbb{P}^{n-1}_K$. Si dice che questo è il $\mathbb{P}^{n-1}_K$ all'infinito di K^n. D'ora in poi identificheremo $\alpha(K^{n+1})$ con K^n e scriveremo:

$$K^n = \alpha(K^{n+1}) = U_{X_{n+1}} \subset \mathbb{P}^n_K$$

Università di Roma 1: a.a. 2007-08, corso di Geometria Analitica, E.A., M.M. e A.F.

Dato un sottospazio non nullo U di V il sottoinsieme

$$L = \mathbb{P}U \subset \mathbb{P}V$$

prende il nome di *sottospazio lineare.* Se U ha dimensione $h+1$ si dice che L ha dimensione h. I sottospazi lineari di dimensione 0 sono i punti di $\mathbb{P}V$, quelli di dimensione 1 prendono il nome di rette, quelli di dimensione 2 prendono il nome di piani e quelli di dimensione $n-1$ prendono il nome di iperpiani. Dati sottospazi lineari $L = \mathbb{P}U$ e $L' = \mathbb{P}U'$ di $\mathbb{P}V$ si ha

$$L \cap L' = \mathbb{P}U \cap \mathbb{P}U' = \mathbb{P}(U \cap U') \tag{1}$$

In particolare

$$\dim L + \dim L' \geq n \implies L \cap L' \neq \emptyset$$

Infatti, usando la formula di Grassmann, si ha:

$$\dim L + \dim L' \geq n \implies \dim U + \dim U' \geq n-1 \implies$$
$$\dim(U \cap U') = \dim U + \dim U' - \dim(U + U') \geq 1 \implies L \cap L' \neq \emptyset\,.$$

Dato un sottospazio lineare $L = \mathbb{P}U \subset \mathbb{P}V$, gli elementi di $\mathrm{Ann}(U) \subset V^*$ forniscono le equazioni di L. Per vedere ciò in modo esplicito introduciamo coordinate $X_1, \ldots, X_{n+1}$ in V e cioè identifichiamo V con K^{n+1}. Se $\dim U = k+1$ allora $\dim \mathrm{Ann}(U) = n-k$. Scegliamo una base $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-h}$ di $\mathrm{Ann}(U)$. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,n+1}X_{n+1}\\
\varphi_2 &= a_{2,1}X_1 + \cdots + a_{2,n+1}X_{n+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_{n-h} &= a_{n-h,1}X_1 + \cdots + a_{n-h,n+1}X_{n+1}
\end{aligned}$$

Dunque, un punto $[v] = [X_1, \ldots, X_{n+1}]$ appartiene a $L = \mathbb{P}U$ se e solo se soddisfa le equazioni

$$L: \begin{cases} a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,n+1}X_{n+1} = 0\\ a_{2,1}X_1 + \cdots + a_{2,n+1}X_{n+1} = 0\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n-h,1}X_1 + \cdots + a_{n-h,n+1}X_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Per esempio l'equazione dell'iperpiano all'infinito è $X_{n+1} = 0$. Naturalmente la nozione di "iperpiano all'infinito" dipende, per così dire, dal punto di vista. Infatti, cambiando le coordinate, passando cioè a delle nuove coordinate omogenee $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$, dove $Y_i = \sum a_{ij}X_j$ la nuova retta all'infinito, e cioè l'iperpiano $Y_{n+1} = 0$ è l'iperpiano

$$a_{n+1,1}X_1 + \cdots + a_{n+1,n+1}X_{n+1} = 0$$

che è un iperpiano, a priori, arbitrario.

Dati due sottospazi lineari

$$L, L' \subset \mathbb{P}V\,, \qquad L = \mathbb{P}U\,, L' = \mathbb{P}W\,,$$

il *sottospazio congiungente* L *e* L', detto anche il *sottospazio generato da* L *e* L', è, per definizione, il più piccolo sottospazio lineare di $\mathbb{P}V$ contenente sia

L che L'. Si denota questo sottospazio con il simbolo $\overline{LL'}$. Dalla definizione segue subito che

$$\overline{LL'} = \mathbb{P}(U + W)\,.$$

Dalla formula di Grassmann segue immediatamente che

$$\dim \overline{LL'} = \dim L + \dim L' - \dim(L \cap L') \tag{2}$$

dove si usa la convenzione:

$$\dim \emptyset = -1.$$

2. Il gruppo proiettivo

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$. D'ora in poi denoteremo con il simbolo $\mathrm{GL}(V)$ il gruppo degli automorfismi lineari di V e denoteremo con N il sottogruppo normale di $\mathrm{GL}(V)$ composto dagli automorfismi del tipo $\{\lambda I\}$, con $\lambda \in K \smallsetminus \{0\}$. In effetti N è il centro di $\mathrm{GL}(V)$. Il gruppo proiettivo di V è per definizione il gruppo quoziente

$$\mathbb{P}\,\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(V)/N$$

Se $F \in \mathrm{GL}(V)$ si indica con $[F]$ la sua classe in $\mathbb{P}\,\mathrm{GL}(V)$. Il gruppo $\mathbb{P}\,\mathrm{GL}(V)$ agisce su $\mathbb{P}V$:

$$\mathbb{P}\,\mathrm{GL}(V) \times \mathbb{P}V \longrightarrow \mathbb{P}V$$
$$([F],[v]) \mapsto [F(v)]$$

Introduciamo le seguenti definizioni. Si dice che k punti $[v_1], \dots, [v_k]$ di $\mathbb{P}V$ sono *proiettivamente indipendenti* se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, si dice una una $(n+2)$-pla $[v_0], [v_1], \dots, [v_{n+1}]$ di punti in $\mathbb{P}V$ forma un *sistema di riferimento* per $\mathbb{P}(V)$ se ogni $(n+1)$-pla del tipo

$$[v_0], [v_1], \dots, \widehat{[v_i]}, \dots, [v_{n+1}]\,, \qquad i = 0, 1, \dots, n+1$$

è costituita da punti proiettivamente indipendenti. Per esempio, in $\mathbb{P}^n_K$, un sistema di riferimento è dato dai punti

$$P_0 = [1,1,1,\dots,1]\,,\ P_1 = [1,0,0,\dots,0]\,,\ P_2 = [0,1,0,\dots,0]\,,\dots$$
$$\dots P_n = [0,0,0,\dots,1,0]\,,\ P_{n+1} = [0,0,0,\dots,1]$$

Si osservi che il gruppo proiettivo $\mathbb{P}\,\mathrm{GL}(V)$ agisce in modo propriamente transitivo sui sistemi di riferimento. Vale ciè il seguente:

Lemma 1. *Dati due sistemi di riferimento*

$$[v_0], \dots, [v_{n+1}]\,, \quad [w_0], \dots, [w_{n+1}]$$

esiste un'unica trasformazione proiettiva $[F]$ *tale che*

$$[F]([v_i]) = [w_i]\,, \qquad i = 0, \dots, n+1 \tag{3}$$

Dim. Ciò che è ovvio è che esiste un automorfismo F di V tale che

$$F(v_i) = \lambda_i w_i\,, \qquad i = 1, \dots, n+1 \tag{4}$$

dove i λ_i sono arbitrari elementi di $K \smallsetminus \{0\}$. Con il che si ha, intanto, $[F][v_i] = [w_i]$, per $i = 1, \dots, n+1$. Si scriva

$$v_0 = a_1 v_1 + \cdots + a_{n+1} v_{n+1}\,, \qquad w_0 = b_1 w_1 + \cdots + b_{n+1} w_{n+1}$$

Si noti che $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, per $i = 1, \ldots, n+1$, altrimenti $[v_0], \ldots, [v_{n+1}]$ e $[w_0], \ldots, [w_{n+1}]$ non sarebbero sistemi di riferimento. Si ha

$$F(v_0) = a_1\lambda_1 w_1 + \cdots + a_{n+1}\lambda_{n+1}w_{n+1}\,.$$

Basta quindi porre

$$\lambda_i = \lambda\frac{b_i}{a_i}\,, \quad i = 1, \ldots, n+1\,, \quad \lambda \neq= 0$$

per ottenere $[F][(v_0)] = [w_0]$. Questo dimostra l'esistenza di $[F]$.

Per quello che riguarda l'unicità, basta dimostrare che se $[F]([v_i]) = [v_i]$, per $i = 0, \ldots, n+1$ allora $[F] = [I]$. Come abbiamo già osservato, la condizione $[F]([v_i]) = [v_i]$, per $i = 1, \ldots, n+1$ implica che $F(v_i) = \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \neq 0$, per $i = 0, \ldots, n+1$. Si ha inoltre che $F(v_0) = \lambda_0 v_0$, con $\lambda_0 \neq 0$. Scriviamo di nuovo

$$v_0 = a_1 v_1 + \cdots + a_{n+1}v_{n+1} \tag{5}$$

e applichiamo F ad ambo i membri. Si ottiene

$$\lambda_0 v_0 = \lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n+1}a_{n+1}v_{n+1}\,. \tag{6}$$

Sottraendo la (6), divisa per λ_0, dalla (5) e usando la lineare indipenenza di $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{n+1}$, si ottiene

$$a_i - a_i\frac{\lambda_i}{\lambda_0} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n+1\,.$$

Essendo gli a_i diversi da zero si ottiene

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1}$$

Dunque $F = \lambda_0 I$ e cioè $[F] = [I]$. Q.E.D.

3. Dualità

Fissiamo uno spazio vettoriale V di dimensione $n+1$. Vogliamo studiare le relazioni tra la geometria di $\mathbb{P}V$ e quella di $\mathbb{P}V^*$. Innanzitutto osserviamo che vi è una corrisponenza biunivoca

$$\left\{\begin{matrix}\text{sottospazi lineari}\\ (k+1)\text{-dimensionali di } V\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{sottospazi lineari}\\ (n-k)\text{-dimensionali di } V^*\end{matrix}\right\} \tag{7}$$

La corrispondenza è data come segue. A ogni sottospazio $(k+1)$-dimensionale $U \subset V$ si associa il sottospazio $(n-k)$-dimensionale $(V/U)^* \subset V^*$, o ciò che è lo stesso, il sottospazio

$$\mathrm{Ann}(U) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0,\ \forall v \in U\} = (V/U)^* \subset V^*\,.$$

Si ricordi che

$$\dim \mathrm{Ann}(U) = \dim(V/U)^* = \dim V - \dim U = n + 1 - (k+1) = n - k\,.$$

Viceversa, dato un sottospazio $(n-k)$-dimensionale $A \subset V^*$ si associa ad esso il sottospazio $(k+1)$-dimensionale

$$\mathrm{Ann}(A) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0,\ \forall \varphi \in A\} \subset V$$

Se $L = \mathbb{P}U$ è un sottospazio di $\mathbb{P}V$ poniamo

$$L^{\perp} = \mathrm{Ann}(U) = \mathbb{P}(V/U)^* \subset \mathbb{P}V^* \,.$$

Similmente, se $\pi = \mathbb{P}A$ è un sottospazio di $\mathbb{P}V^*$ poniamo

$$\pi^{\perp} = \mathrm{Ann}(A) = \mathbb{P}(V^*/A)^* \subset \mathbb{P}V \,.$$

Si ha: $L^{\perp\perp} = L$ e $\pi^{\perp\perp} = \pi$. Abbiamo quindi stabilito una corrisponenza biunivoca

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{sottospazi lineari} \\ k\text{-dimensionali di } \mathbb{P}V \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{sottospazi lineari} \\ (n-k-1)\text{-dimensionali di } \mathbb{P}V^* \end{array} \right\} \tag{8}$$

La corrispondenza è data da: $L \mapsto L^{\perp}$.

Osserviamo subito che in questa corrispondenza si scambiano i concetti di "contenere" e "essere contenuto" e quello di intersezione e di sottospazio generato. Infatti se $L =$ e L' sono sottospazi lineari di $\mathbb{P}V$ si ha:

$$L \subset L' \quad \Longleftrightarrow \quad (L')^{\perp} \supset L^{\perp} \,, \qquad L^{\perp} \cap (L')^{\perp} = (\overline{LL'})^{\perp} \,.$$

Infatti se $L = \mathbb{P}U$ e $L' = \mathbb{P}W$ si ha, da una parte

$$U \subset W \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ann}(U) \supset \mathrm{Ann}(W) \,,$$

e dall'altra

$$\begin{gathered} L^{\perp} \cap (L')^{\perp} = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}(U)) \cap \mathbb{P}(\mathrm{Ann}(W)) = \\ \mathbb{P}\,\mathrm{Ann}(U+W) = (\overline{\mathbb{P}(U+W)})^{\perp} = (\overline{LL'})^{\perp} \,. \end{gathered}$$

4. Il caso di $\mathbb{P}^2_K$

Per semplicità, in questa sezione, scriveremo $\mathbb{P}^2$ invece di $\mathbb{P}^2_K$. I sottospazi lineari del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ sono di due tipi: quelli di dimensione zero, e cioè i punti di $\mathbb{P}^2$ e quelli di dimensione 1, e cioè le rette che, in questo caso sono anche gli iperpiani di $\mathbb{P}^2$. Dalla (1) deduciamo che due rette, o sono coincidenti, o si incontrano in un punto. In cordinate omogenee X_1, X_2, X_3, l' equazione di una retta r è data da

$$r: \quad aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \,. \tag{9}$$

Naturalmente date due rette

$$\begin{aligned} l: &\quad aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \,. \\ l': &\quad a'X_1 + b'X_2 + c'X_3 = 0 \end{aligned}$$

si ha che l ed l' sono coincidenti o si intersecano in un punto a seconda che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

sia di rango 1 o 2. Consideriamo ancora la retta (9). Assumiamo che essa non coincida con la retta all'infinito

$$r_\infty = \{[X_1, X_2, X_3] \mid X_3 = 0\} \cong \mathbb{P}^1$$

Ponendo

$$x = \frac{X_1}{X_3} \qquad y = \frac{X_2}{X_3}$$

si ha che

$$r \cap U_{X_3} = \{(x, y) \in K^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

Dunque $r \cap U_{X_3}$ è una retta in K^2. Ricordiamo che $\mathbb{P}^2$ si ottiene da K^2 aggiungendo la "retta all'infinito" $r_\infty \cong \mathbb{P}^1$. L' intersezione tra la retta r e la retta r_∞ è data da

$$r \cap r_\infty = \begin{cases} aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0\,. \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

Dunque

$$r \cap r_\infty = [b, -a, 0]\,.$$

Ne segue che al variare di c le rette (parallele) di equazione $ax + by + c = 0$ hanno lo stesso punto all'infinito. Dal punto di vista proiettivo, questo vuol dire che al variare di c le rette di equazione $aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$, passano tutte per il punto $[b, -a, 0]$. Nella figura che segue sono rappresentate due rette l e l' di equazioni

$$\begin{aligned} l: \quad & aX_1 + bX_2 + cX_3 &= 0\,, \\ l': \quad & aX_1 + bX_2 + dX_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

il loro punto di intersezione essendo il punto $[b, -a, 0]$:

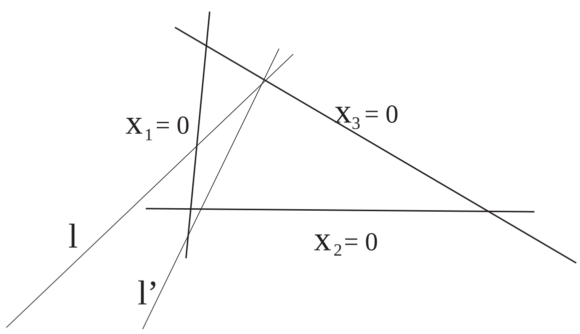

Fig.1

Dimostriamo infine il Teorema di Desargues:

Teorema 1. *Siano A, B, C e A', B', C' i vertici di due triangoli T e T'. Siano*

$$a = \overline{BC}\,, \quad b = \overline{AC}\,, \quad c = \overline{AB}\,, \quad a' = \overline{B'C'}\,, \quad b' = \overline{A'C'}\,, \quad c' = \overline{A'B'}\,,$$

Allora $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ si incontrano in un punto P se e solo se $a \cap a'$, $b \cap b'$ e $c \cap c'$, appartengono a una retta l.

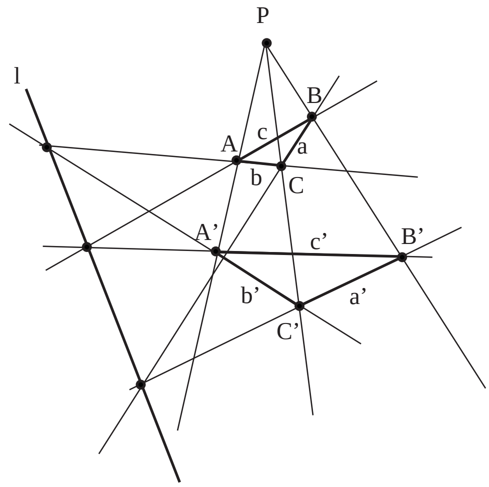

Fig.2

Dim. Per dualità basta dimostrare solo una delle due implicazioni. Infatti Supponiamo vera l'implicazione:

$$\overline{AA'} \cap \overline{BB'} \cap \overline{CC'} = P \quad \Longrightarrow \quad \overline{(a \cap a')(b \cap b')(c \cap c')} = l \tag{10}$$

Allora l'asserzione duale, anche essa vera, è la seguente

$$\overline{(A^\perp \cap (A')^\perp)(B^\perp \cap (B')^\perp)(C^\perp \cap (C')^\perp)} = P^\perp \implies \overline{(a^\perp (a')^\perp)} \cap \overline{(b^\perp (b')^\perp)} \cap \overline{(c^\perp (c')^\perp)} = l^\perp$$

Ma questa non è altro che l'inversa della implicazione (10). Per dimostrare la (10) si può procedere analiticamente. Si pensa ai punti A, B, C, A', B', C', P, $a \cap a', b \cap b', c \cap c'$ come a vettori di $K^3 \setminus \{0\}$. Si ha per ipotesi,

$$P = \alpha A + \alpha' A' = \beta B + \beta' B' = \gamma C + \gamma' C'$$

Ma allora

$$\alpha A - \beta B = -\alpha A' + \beta B' = c \cap c'$$
$$\beta B - \gamma C = -\beta B' + \gamma' C' = a \cap a'$$
$$\gamma C - \alpha A = -\gamma' C' + \alpha' A' = b \cap b'$$

Sommando si ottiene

$$c \cap c' + a \cap a' + b \cap b' = 0$$

e dunque $c \cap c', a \cap a'$ e $b \cap b'$ sono allineati. Q.E.D.