Una matrice 2×2 a coefficienti complessi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

appartiene per definizione al gruppo speciale unitario SU(2) se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = I \qquad \text{e} \qquad ad - bc = 1,$$

ossia se e solo se valgono le uguaglianze

$$ad - bc = |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1, \qquad \overline{a}c + d\overline{b} = \overline{c}a + b\overline{d} = 0.$$

Moltiplicando per a l'uguaglianza $\overline{a}c + d\overline{b} = 0$ e sostituendo ad con $1 + bc$ si ottiene $(|a|^2 + |b|^2)c + \overline{b} = 0$ da cui $c = -\overline{b}$. In modo simile si prova che $d = \overline{a}$ e quindi le matrici speciali unitarie sono tutte e sole quelle della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \qquad \text{al variare di } (a, b) \in S^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}.$$

Abbiamo quindi trovato una bigezione tra SU(2) e la sfera S^3.

Consideriamo adesso lo spazio vettoriale reale $H \subset M(2, 2, \mathbb{C})$ delle matrici Hermitiane a traccia nulla. Esiste un isomorfismo naturale di spazi vettoriali reali

$$\phi\colon \mathbb{R}^3 \to H, \qquad \phi(t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 + it_3 \\ t_2 - it_3 & -t_1 \end{pmatrix}.$$

Tramite l'isomorfismo ϕ, la forma bilineare

$$H \times H \to \mathbb{R}, \qquad (A, B) \mapsto \frac{1}{2}\,\text{traccia}(AB),$$

coincide con il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^3$; in particolare le tre matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

sono una base ortonormale di H. Identifichiamo il gruppo ortogonale $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ con il gruppo degli endomorfismi di H che preservano la precedente forma bilineare.

Per ogni $U \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ l'applicazione

$$\rho(U)\colon H \to H, \qquad \rho(U)(A) = UAU^{-1} = UAU^H$$

è ben definita. Inoltre per ogni $A, B \in H$ vale

$$\text{traccia}(\rho(U)(A)\rho(U)(B)) = \text{traccia}(UABU^{-1}) = \text{traccia}(AB)$$

e quindi possiamo interpretare ρ come un'applicazione $\rho\colon\ \mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$. È facile vedere che ρ è un omomorfismo di gruppi.

Ogni matrice $U \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ è diagonalizzabile e quindi possiede una radice quadrata $V \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$: da questo segue che ogni $\rho(U)$ possiede una radice quadrata nell'immagine dell'omomorfismo ρ e di conseguenza $\rho\colon\ \mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Vogliamo adesso dimostrare che il nucleo di ρ è uguale a $\{\pm I\}$ e che la sua immagine è esattamente $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Dalla formula (esercizio: verificare)

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2ab \\ 2\overline{a}\overline{b} & |b|^2 - |a|^2 \end{pmatrix},$$

segue che $\rho(U)(A_1) = A_1$ se e solo se U è diagonale, e che indicando con $T \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ l'immagine tramite ρ della matrice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha $T(A_1) = A_2$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, indichiamo con $S_\alpha \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ l'immagine tramite ρ della matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \qquad e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha).$$

Un facile conto, lasciato per esercizio al lettore, mostra che nella base A_1, A_2, A_3 la matrice che rappresenta S_α è

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Quindi $S_\alpha = I$ se e solo se α è un multiplo intero di π e di conseguenza $\rho(U) = Id$ se e solo se $U = \pm I$.

Notiamo che le applicazioni S_α sono tutte e sole le rotazioni che lasciano fisso il vettore A_1 e che le rotazioni $TS_\beta T^{-1}$ sono tutte e sole le rotazioni che lasciano fisso il vettore A_2. Dunque, per gli angoli di Eulero, ogni elemento di $E = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ si può scrivere come un prodotto

$$E = S_\alpha T S_\beta T^{-1} S_\gamma,$$

per opportuni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e quindi E appartiene all'immagine di ρ.

Osservazione 0.1. Per i teoremi di omomorfismo dei gruppi, ne segue che $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ è omeomorfo al quoziente $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$. Rispetto alla bigezione $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) \simeq S^3$, la moltiplicazione per la matrice $-I$ corrisponde all'involuzione antipodale in S^3. Abbiamo quindi trovato una bigezione esplicita tra $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ e lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Osservazione 0.2. Da un punto di vista topologico, la fattorizzazione al quoziente

$$\rho\colon \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\} \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$$

è continua e bigettiva da uno spazio compatto ad uno di Hausdorff, e dunque è un omeomorfismo.