Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, Prova scritta del 1 Febbraio 2008.

Esercizio 1. Trovare l'equazione del piano $\pi \subset \mathbb{P}^3$ passante per la retta di equazione $X_0 = X_1 = 0$ e per il punto $[1, 2, 1, 0]$ e determinarne l'intersezione con la retta $X_2 = X_3 = 0$.

Esercizio 2. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = x_1^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4.$$

Esercizio 3. Scrivere la matrice rispetto alla base canonica della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul piano di equazione $2x + y - 3z = 0$.

Esercizio 4. Trovare la forma canonica di Jordan della matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia $X = \{x, y, z, t\}$ e $\tau = \{X, \emptyset, x, y, \{x, y\}, \{y, z, t\}\}$.

(1) Determinare se τ è una topologia per X.
(2) A seconda della risposta al punto precedente, rispondere ad una delle seguenti domande.
   (a) Se τ non è una topologia, dire se la più piccola topologia più fine di τ è discreta.
   (b) Se τ è una topologia, sia $f : X \to X$ definita da $f(x) = y, f(y) = t, f(z) = y, f(t) = z$. Dire se f è continua.

Esercizio 6. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione continua definita da $f_n(x) = x^n$. Determinare per quali valori di n l'applicazione f_n è aperta.