1. Il birapporto

Dati quattro punti distinti $p_1, \dots, p_4 \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, esistono unici una proiettività $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ ed un elemento $\lambda \in \mathbb{K} - \{0,1\}$ tali che

$$\phi(p_1) = \lambda, \quad \phi(p_2) = 1, \quad \phi(p_3) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(p_4) = \infty.$$

Il numero λ dipende solo dalla quaterna ordinata $p_1, \dots, p_4$ ed è invariante per proiettività.

Definizione 1.1. La quantità $\lambda = [p_1, p_2; p_3, p_4]$ si dice *birapporto*[1] della quaterna ordinata $p_1, \dots, p_4$.

In particolare per ogni $\lambda \in \mathbb{K} - \{0,1\}$ vale $\lambda = [\lambda, 1, 0, \infty]$.

Per costruzione, il birapporto può assumere qualsiasi valore in $\mathbb{K} - \{0,1\}$. È inoltre conseguenza immediata della definizione che due quaterne ordinate di punti distinti di $\mathbb{P}^1$ hanno lo stesso birapporto se e solo se esiste una proiettività che trasforma una quaterna nell'altra.
Il nome birapporto è motivato dalla seguente proposizione.

Proposizione 1.2. *Siano $p_1 = [x_1, y_1], \dots, p_4 = [x_4, y_4]$ punti distinti di $\mathbb{P}^1$. Allora vale la formula*

$$[p_1, p_2; p_3, p_4] = \frac{x_1y_3 - x_3y_1}{x_2y_3 - x_3y_2} : \frac{x_1y_4 - x_4y_1}{x_2y_4 - x_4y_2}$$

che in coordinate affini, ovvero considerando $p_i \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, diventa

$$[p_1, p_2; p_3, p_4] = \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_3} : \frac{p_1 - p_4}{p_2 - p_4}.$$

Dimostrazione. Esercizio. □

Il gruppo simmetrico su 4 elementi Σ_4 agisce sulla quaterna $p_1, \dots, p_4$ permutando gli indici; è naturale chiedersi come agisce Σ_4 sul birapporto.

Definizione 1.3. Il *gruppo trirettangolo*[2] Γ_4 è il sottogruppo di Σ_4 formato dall'identità e dalle tre permutazioni[3] di ordine 2

$$\sigma_1 = (2,1,4,3), \quad \sigma_2 = (3,4,1,2), \quad \sigma_3 = (4,3,2,1).$$

Lemma 1.4. *Il birapporto di una quaterna di punti distinti di $\mathbb{P}^1$ è invariante per l'azione del gruppo trirettangolo. Se $[p_1, p_2; p_3, p_4] = \lambda$, allora sotto l'azione del gruppo simmetrico il birapporto assume i valori*

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad 1 - \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Dimostrazione. Esercizio. □

Per ogni $\lambda \in \mathbb{K} - \{0,1\}$ vale dunque

$$\lambda = [\lambda, 1; 0, \infty] = [\infty, 0; 1, \lambda] = [1, \lambda; \infty, 0] = [0, \infty; \lambda, 1].$$

In generale le sei espressioni in 1.4 forniscono sei birapporti distinti; si hanno tuttavia le seguenti eccezioni:

(1) Caratteristica $\neq 2$ e $\lambda = -1, 2, \frac{1}{2}$. In questo caso la quaterna è detta *armonica*.
(2) Caratteristica $\neq 3$, $\xi^2 - \xi + 1 = 0$ e $\lambda = \xi, \xi^{-1}$. In questo caso la quaterna è detta *equianarmonica*

Notiamo che:

Università di Roma 1: a.a. 2007-08, corso di Geometria Analitica, E.A., M.M. e A.F.

[1] In inglese *cross ratio*; in francese *rapport anharmonique*.

[2] In inglese *Klein fourgroup*.

[3] Con la notazione $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ si intende la permutazione tale che $\sigma(i) = a_i$.

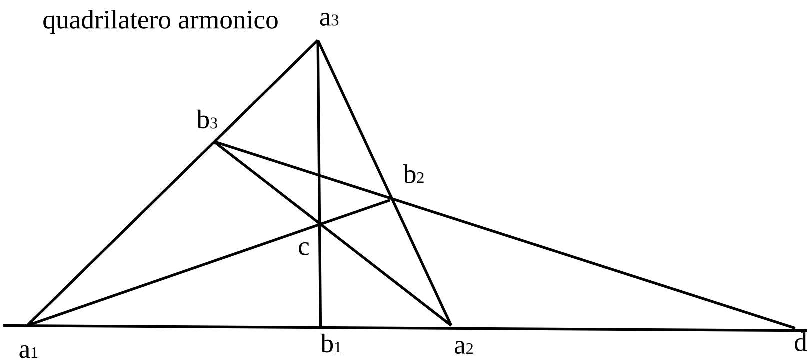

FIGURA 1

(1) Dati $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K} - \{0\}$ vale $[0, \lambda_1; \lambda_2, \lambda_3] = [\infty, \lambda_1^{-1}; \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}] = \dfrac{1}{2}$ se e solo se λ_3 è la media armonica di λ_1, λ_2.
(2) In caratteristica 3 si hanno le uguaglianze $\xi^2 - \xi + 1 = (1+\xi)^2 = (1-2\xi)^2 = (2-\xi)^2$.
(3) Su $\mathbb{C}$, rappresentato dal piano di Gauss, la quaterna formata dai vertici di un triangolo equilatero e dal suo baricentro è equianarmonica, mentre i vertici di un quadrato formano una quaterna armonica.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Provare che per ogni $n \geq 5$ esiste un insieme $S \subset \mathbb{P}^1$ di n punti tale che, se $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ e $\phi(S) \subset S$, allora $\phi = Id$.

Esercizio 2. Sia $p \in \mathbb{P}^n$ e $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ il sottogruppo delle proiettività ϕ tali che $\phi(H) \subset H$ per ogni iperpiano H contenente p. Provare che G agisce transitivamente sull'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ che non contengono p.

Esercizio 3. (quadrilatero armonico)
Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo su di un campo di caratteristica $\neq 2$, siano $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{P}^2$ punti non allineati e $b_2 \in \overline{a_2a_3}$, $b_3 \in \overline{a_3a_1}$ tali che $b_i \neq a_j$ per ogni i, j. Indichiamo con c il punto di intersezione di $\overline{a_1b_2}$ e $\overline{a_2b_3}$, con b_1 il punto di intersezione di $\overline{a_1a_2}$ e $\overline{a_3c}$ e con d il punto di intersezione di $\overline{a_1a_2}$ e $\overline{b_2b_3}$ (vedi figura). Provare che $(a_1a_2b_1d) = -1$. (Sugg.: fissare un sistema di coordinate omogenee tali che $a_1 = [0, 0, 1]$, $a_2 = [2, 0, 1]$, $d = [1, 0, 0]$, $a_3 = [0, 1, 0]$ e provare che $b_1 = [1, 0, 1]$.)

Esercizio 4. Sia $\lambda \in \mathbb{K} - \{0, 1\}$ fissato, $L \subset \mathbb{P}^2$ una retta e $\pi \colon \mathbb{P}^2 - \{o\} \to L$ la proiezione di centro $o \notin L$.
Definiamo un'applicazione $\phi \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ nel modo seguente:
$\phi(o) = o$ e $\phi(p) = p$ per ogni $p \in L$; se $p \neq o$ e $p \notin L$, allora si pone $r = \pi(p)$ e $\phi(p) = q$, dove $q \in o + p$ è l'unico punto tale che $[o, r; p, q] = \lambda$.
Provare che ϕ è una proiettività. Provare inoltre ϕ è un involuzione (cioè $\phi^2 = Id$) se e solo se $\lambda = -1$.

Esercizio 5. Nelle notazioni dell'Esercizio 3, sia $e = \overline{a_3b_1} \cap \overline{b_2b_3}$; provare che $[a_1, a_2; b_1, d] = [b_2, b_3; e, d] = [a_2, a_1, b_1, d]$ e dedurne che $[a_1, a_2; b_1, d]^2 = 1$.

Esercizio 6. (Rapporti plurisezionali)
Sia $n \geq 2$ un intero e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{P}^1$ tali che $b_i \neq a_{i+1}$; si definisce il rapporto n-sezionale come

$$[a_1, a_2, \ldots a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n] = \prod_{i=1}^{n} (a_i a_{i+1} b_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i^0 b_i^1 - a_i^1 b_i^0}{a_{i+1}^0 b_i^1 - a_{i+1}^1 b_i^0}$$

dove si è posto $a_{n+1} = a_1$ e $b_{n+1} = b_1$, mentre $a_i = [a_i^0, a_i^1]$ e $b_i = [a_i^0, a_i^1]$ sono le rappresentazioni in coordinate omogenee.
Provare che il rapporto n-sezionale è invariante per proiettività e che se $b_n = b_{n-1}$, allora $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}; b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}]$.
Se invece $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{P}^2$ e $b_i \in \overline{a_i a_{i+1}}$, con $b_i \neq a_{i+1}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora, fissato un punto $p \in \mathbb{P}^2$ non appartenente all'unione delle rette $\overline{a_i a_{i+1}}$ si definisce $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n]$ come il rapporto plurisezionale delle rispettive immagini in $\mathbb{P}^1$ tramite la proiezione di centro p. Provare che si tratta di una buona definizione e che quindi il rapporto plurisezionale è invariante per proiettività. (Sugg.: siano p, q due centri di proiezione e si prendano coordinate affini tali che $\overline{pq}$ sia la retta all'infinito. Non è restrittivo assumere che $\overline{pq}$ non contenga alcun punto a_i; si scriva quindi $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n]$ come un prodotto di rapporti semplici.)

Esercizio 7. (Teorema di Menelao, I sec. d.C.)
Siano $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{P}^2$ i vertici di un triangolo e $b_i \in \overline{a_i a_{i+1}}$ punti distinti dai vertici. Provare che b_1, b_2, b_3 sono allineati se e solo se $[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3] = 1$ (Sugg.: considerare $\overline{b_1 b_2}$ come retta all'infinito).

Esercizio 8. (Teorema di Ceva, 1678)
Siano $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{P}^2$ non allineati e $b_i \in \overline{a_i a_{i+1}}$ punti distinti dai vertici. Provare che le rette $L_i = \overline{a_i b_{i+1}}$ sono concorrenti se e solo se $[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3] = -1$ (Sugg.: sia p un punto generico contenuto nella retta $\overline{b_2 b_3}$ e si consideri la proiezione di centro p sulla retta $\overline{a_1 a_2}$).

Esercizio 9. Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ una proiettività di ordine finito e non divisibile per la caratteristica di $\mathbb{K}$. Provare che ϕ ha esattamente due punti fissi.

Esercizio 10. (caratteristica $\neq 2$) Una quaterna ordinata $p_1, \ldots, p_4$ di punti distinti di $\mathbb{P}^1$ definisce un omomorfismo iniettivo di gruppi $h\colon \Gamma_4 \to \mathrm{PGL}(2, \mathbb{K}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ caratterizzato dalla proprietà che per ogni permutazione $\sigma \in \Gamma_4$ vale $h(\sigma)(p_i) = p_{\sigma(i)}$. Provare che non esiste alcun sollevamento di h ad un omomorfismo $\Gamma_4 \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$. (Sugg.: non è restrittivo assumere $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso; si prenda una coordinata affine tale che la quaterna sia $1, -1, a, -a$ con $a \neq \pm 1$.)

Esercizio 11. Trovare una elemento di ordine 2 di $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Q})$ che non si rappresenta con elementi di ordine finito di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$.

Esercizio 12. Sia $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ il gruppo moltiplicativo, $n \geq 2$ un intero e si assuma che esista un sottogruppo finito $H \subset \mathbb{K}^*$ di ordine d tale che $\mathbb{K}^*$ è generato da H e dalle potenze n-esime di elementi di $\mathbb{K}^*$. Sia inoltre h il massimo divisore di n non divisibile dalla caratteristica di $\mathbb{K}$.
Dimostrare che per ogni sottogruppo finito $\Gamma \subset \mathrm{PGL}(n, \mathbb{K})$ di ordine m esiste un sottogruppo finito $\Gamma' \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ di ordine $\leq hdm$ che si mappa surgettivamente su Γ tramite la proiezione naturale $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{PGL}(n, \mathbb{K})$.

Esercizio 13. (caratteristica $\neq 2, 3$) Sia $p_1, \ldots, p_4$ una quaterna di punti distinti di $\mathbb{P}^1$. Provare che:

- La quaterna è armonica se e solo se il birapporto $[p_1, \ldots, p_4]$ è invariante per l'azione di un sottogruppo di ordine 8 di Σ_4. Dedurre che il gruppo simmetrico Σ_4 contiene esattamente tre sottogruppi di ordine 8 (2-Sylow) tra loro coniugati ed isomorfi al gruppo diedrale D_4.
- La quaterna è equianarmonica se e solo se il birapporto $[p_1, \ldots, p_4]$ è invariante per l'azione del gruppo alterno A_4.

Esercizio 14. Si consideri l'applicazione $v_n\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$, definita in coordinate omogenee da

$$v_n([x_0, x_1]) = [x_0^n, x_0^{n-1} x_1, \ldots, x_0 x_1^{n-1}, x_1^n].$$

Provare che, se $p_0, \ldots, p_{n+1}$ sono $n+2$ punti distinti di $\mathbb{P}^1$, allora $v_n(p_0), \ldots, v_n(p_{n+1})$ è un sistema di riferimento su $\mathbb{P}^n$. L'applicazione v_n è detta *applicazione di Veronese.*

Esercizio 15. Si consideri il piano $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclidea usuale, per ogni $p \in \mathbb{R}^2$ sia $F_p \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ il fascio di rette passanti per il punto p. Verificare che l'applicazione $F_p \to F_p$ che manda ogni retta nella sua perpendicolare è una proiettività. Tale proiettività è chiamata *involuzione degli angoli retti.*

Esercizio 16. Sia $o \in \mathbb{P}^1$ e G un insieme di n punti distinti $p_1, \ldots, p_n$ di $\mathbb{P}^1$, con $n \geq 2$. Si definisce il luogo polare di o rispetto a G come l'insieme dei punti $q \in \mathbb{P}^1$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} [o, q; p_i, \hat{o}] = 0$$

per ogni $\hat{o} \neq o$. Provare che se $o = \{\infty\}$ e $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$ sono le radici di un polinomio monico f di grado n, allora il luogo polare di $\{\infty\}$ rispetto a $p_1, \ldots, p_n$ è l'insieme delle radici della derivata f' di f.

Esercizio 17 $(*)$**.** Con l'utilizzo della sola riga dividere un rettangolo del piano euclideo in n parti uguali, per ogni $n \geq 2$. (Sugg.: quadrilatero armonico.)

Esercizio 18. Sia $p \in \mathbb{P}^2$, siano L, H, T tre rette distinte di $\mathbb{P}^2$ passanti per il punto p e $q, r \in T$ punti distinti da p. Si consideri le proiettività $\phi\colon L \to H$ e $\psi\colon H \to L$ ottenute per proiezione di centro q ed r rispettivamente. Detta $\eta\colon L \to L$ la composizione di ϕ e ψ calcolare il valore del birapporto $[p, s; \eta(s), \eta^2(s)]$ al variare di s in $L - \{p\}$.