

Esercizio 1. Sia U un sottospazio di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Dimostrare che $(V/U)^*$ può essere identificato al sottospazio $\text{Ann}(U) \subset V^*$.

Esercizio 2. Data una successione esatta corta $0 \rightarrow U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W \rightarrow 0$ dimostrare che

$$0 \rightarrow W^* \xrightarrow{G^*} V^* \xrightarrow{F^*} U^* \rightarrow 0$$

è esatta corta. Estendere l'asserto al caso delle successioni esatte non necessariamente corte.

Esercizio 3. Data una applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ dimostrare che vi sono isomorfismo canonici

$$\ker(F^*) \cong (\text{Coker } F)^*, \quad \text{Coker}(F^*) \cong (\ker F)^*.$$

Esercizio 4. Siano U e W sottospazi di V dimostrare che vi è un isomorfismo canonico

$$(U + W)/U \cong W/U \cap W$$

dedurne la formula di Grassmann.

Esercizio 5. Siano U, V, U', V', W, E , sottospazi di uno spazio vettoriale. Si assuma che

$$U' + V' = W, \quad U' \cap V' = E, \quad U \cap W \subset U', \quad V \cap W \subset V'$$

Si dimostri che

$$((U + U') \cap (V + V'))/E \cong ((U + W) \cap (V + W))/W$$

Esercizio 6. Sia

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramma commutativo di applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita. Si assuma che le righe siano esatte. Dimostrare che:

- (1) Se α e γ sono isomorfismi, allora anche β è un isomorfismo.
- (2) Se β è un isomorfismo, allora α è surgettiva se e solo se γ è iniettiva.
- (3) La traccia di β è uguale alla somma delle tracce di α e γ .

Esercizio 7. Si consideri un diagramma commutativo di applicazioni lineari con le colonne esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Provare che se due righe sono esatte allora è esatta anche la terza.