

**Esercizio 1.** Sia  $U$  un sottospazio di uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita. Dimostrare che  $(V/U)^*$  può essere identificato al sottospazio  $\text{Ann}(U) \subset V^*$ .

**Esercizio 2.** Data una successione esatta corta  $0 \rightarrow U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W \rightarrow 0$  dimostrare che

$$0 \rightarrow W^* \xrightarrow{G^*} V^* \xrightarrow{F^*} U^* \rightarrow 0$$

è esatta corta. Estendere l'asserto al caso delle successioni esatte non necessariamente corte.

**Esercizio 3.** Data una applicazione lineare  $F : V \rightarrow W$  dimostrare che vi sono isomorfismo canonici

$$\ker(F^*) \cong (\text{Coker } F)^*, \quad \text{Coker}(F^*) \cong (\ker F)^*.$$

**Esercizio 4.** Siano  $U$  e  $W$  sottospazi di  $V$  dimostrare che vi è un isomorfismo canonico

$$(U + W)/U \cong W/U \cap W$$

dedurne la formula di Grassmann.

**Esercizio 5.** Siano  $U, V, U', V', W, E$ , sottospazi di uno spazio vettoriale. Si assuma che

$$U' + V' = W, \quad U' \cap V' = E, \quad U \cap W \subset U', \quad V \cap W \subset V'$$

Si dimostri che

$$((U + U') \cap (V + V'))/E \cong ((U + W) \cap (V + W))/W$$

**Esercizio 6.** Sia

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramma commutativo di applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita. Si assuma che le righe siano esatte. Dimostrare che:

- (1) Se  $\alpha$  e  $\gamma$  sono isomorfismi, allora anche  $\beta$  è un isomorfismo.
- (2) Se  $\beta$  è un isomorfismo, allora  $\alpha$  è surgettiva se e solo se  $\gamma$  è iniettiva.
- (3) La traccia di  $\beta$  è uguale alla somma delle tracce di  $\alpha$  e  $\gamma$ .

**Esercizio 7.** Si consideri un diagramma commutativo di applicazioni lineari con le colonne esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Provare che se due righe sono esatte allora è esatta anche la terza.