Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, tutoraggio del 4 Dicembre 2007 : E.A., M.M. e A.F.

Nota: L'ordine degli esercizi è casuale. Scegliete quelli che preferite (ed i rimanenti come compito per casa).

Esercizio 1. Trovare la forma canonica di Jordan delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Siano X un insieme e $\infty \in X$ un elemento fissato. Verificare che

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid \infty \notin A \text{ oppure } X - A \text{ è finito } \}$$

è una topologia su X.

Esercizio 3. Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$ il tipo della conica affine reale di equazione

$$x^2 + 2txy + y^2 + 4tx - 2y - 1 = 0.$$

Esercizio 4. Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di aperti di due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ rispettivamente. Provare che $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ se e solo se ogni elemento di $\mathcal{B}_1$ è unione di elementi di $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 5. Sia $\mathfrak{S}_n$ il gruppo delle permutazioni su n elementi. Descrivere un'azione fedele di $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ sullo spazio delle matrici reali $n \times n$. (Un'azione $G \times X \to X$ si dice *fedele* se per ogni $g \in G$ diverso dall'elemento neutro esiste $x \in X$ tale che $g \cdot x \neq x$.)

Esercizio 6. Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $A \in \mathcal{B}$ la famiglia $\mathcal{B} - \{A\}$ è ancora una base della stessa topologia.

Esercizio 7. Si dice che un gruppo G agisce in *modo doppiamente transitivo* su un insieme S se, dati s_1,s_2, t_1, t_2 in S, con $s_1 \neq s_2$, $t_1 \neq t_2$, esiste $g \in G$ con $gs_i = t_i$, $i = 1, 2$. Dimostrare che G agisce in modo doppiamente transitivo su S se e solo se agisce transitivamente su S e, dato un qualsiasi elemento $s \in S$, lo stabilizzatore di s agisce transitivamente su $S \setminus \{s\}$

Esercizio 8. Un sottoinsieme $H \subset \mathbb{N}$ si dice un *semigruppo* se è chiuso per la somma, cioè se $a + b \in H$ ogniqualvolta $a, b \in H$.

(1) Sia $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\}$ l'insieme dei numeri naturali maggiori di 1. Provare che i semigruppi contenuti in X sono una base di una topologia $\mathcal{T}$ su X.
(2) Determinare i punti di X che sono chiusi nella topologia $\mathcal{T}$.

Esercizio 9. a) Sia G un gruppo finito che agisce transitivamente su un insieme S. Sia $\nu(g)$ il numero degli elementi di S lasciati fissi da g. Dimostrare che $|G| = \sum_{g \in G} \nu(g)$.

b) Sia G un gruppo finito che opera su un insieme finito S. Sia $\nu(g)$ il numero degli elementi di S lasciati fissi da g. Sia s il numero delle orbite dell'azione di G su S. Dimostrare che $s = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \nu(g)$.

Esercizio 10. Sia $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m(z) > 0\}$. Sia G il gruppo generato dalla omotetia $z \mapsto 3z$.

a) Descrivere H/G

b) Fare lo stesso per il gruppo G generato dalla traslazione $z \mapsto z + 2$.

Esercizio 11. Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Sia G il gruppo generato dalla rotazione $z \mapsto e^{\frac{2\pi}{3}} z$ Descrivere le orbite di G su Δ.