Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, tutoraggio del 6 Novembre 2007: E.A., M.M. e A.F.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di podotto scalare. Siano T un endomorfismo di V e T^* il suo aggiunto. Dimostrare che
a) T è una proiezione $\iff T^2 = T = T^* \iff T^*$ è una proiezione
b) T è una riflessione $\iff T^2 = I = TT^* \iff T^*$ è una riflessione.

Esercizio 2. Determinare la matrice della proiezione ortogonale $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sul piano $x - 2y + z$ rispetto alla base standard. Scrivere $P((1, 1, 1))$.

Esercizio 3. Sia $f = R_V \circ R_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la composizione delle riflessioni ortogonali rispetto ai piani $V = \{x+y = 0\}$ e $W = \{y+z = 0\}$. Trovare la matrice che rappresenta f nella base canonica.

Esercizio 4. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice simmetrica $n \times n$.
a) Si assuma che
$$a_{ij} \geq 0\,, \quad \forall \quad i,j\,, \qquad a_{ii} > \sum_{j\neq i} a_{ij}\,, \quad i = 1, \ldots, n$$
dimostrare che A è definita positiva. (Suggerimento: $\sum_{i<j} a_{ij}(x_i + x_j)^2 \geq 0$)
b) Determinare rango e segnatura della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$
Trovare $\sqrt{A}$, ossia l'unica matrice simmetrica B definita positiva tale che $B^2 = A$.

Esercizio 6. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice simmetrica $n \times n$. Si assuma che
$$a_{ij} \leq 0\,, \quad \forall \quad i \neq j\,, \qquad \sum_j a_{ij} \geq 0\,, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Dimostrare che A è semidefinita positiva.

Esercizio 7. Sia $T \in O(n, \mathbb{R})$, n dispari. Dimostrare che esiste $v \neq 0 \in V$ tale che $T^2 v = v$.

Esercizio 8. Siano $L_1, L_2 \in GL(n, \mathbb{R})$ e $L_i = S_i P_i$, $i = 1, 2$, le rispettive decomposizioni polari. Dimostrare che P_1 e P_2 sono coniugate se e solo se esistono E_1, E_2 ortogonali tali che $L_1 = E_1 L_2 E_2$.

Esercizio 9. Per ogni vettore non nullo $u \in \mathbb{R}^n$ indichiamo con S_u la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano perpendicolare a u. Ricordiamo la formula
$$S_u(x) = x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2} u.$$
Dimostrare che:
(1) Se u, v, w sono linearmente dipendenti, allora la composizione $S_u S_v S_w$ è ancora una riflessione rispetto ad un iperpiano.
(2) Se u, v, w sono linearmente indipendenti, allora $S_v S_w$ non è l'identità e la composizione $S_u S_v S_w$ non è una riflessione rispetto ad un iperpiano (Sugg.: il piano generato da v, w non contiene punti fissi).
(3) Sia $E \colon \mathbb{R}^n \to R^n$ ortogonale, allora vale $E S_u E^{-1} = S_{Eu}$.
(4) Siano $u, v, w, z \in \mathbb{R}^3$. Allora esistono $a, b \in \mathbb{R}^3$ tali che
$$S_u S_v S_w S_z = S_a S_b.$$