Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, tutoraggio del 16 ottobre 2007: E.A., M.M. e A.F.

Esercizio 1. Trovare x in funzione di $a, b \in \mathbb{K}$ e tale che $[a, x, b, \infty] = -1$

Esercizio 2. Per quali valori di $t \in \mathbb{K}$ esiste una proiettività $\varphi\colon \mathbb{K} \cup \{\infty\} \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ tale che

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1, \quad \varphi(t) = 2, \quad \varphi(2) = 6 - t.$$

Esercizio 3. Siano l e l' due rette del piano proiettivo e sia P il loro punto di intersezione. Siano A, B e C (risp. A', B' e C') punti distinti di l (risp. l') diversi a P. Dimostrare che

$$AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad [ABCP] = [A'B'C'P']$$

Esercizio 4. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ quattro numeri complessi distinti e di modulo 1. Dimostrare che il loro birapporto $[a, b, c, d]$ è un numero reale. Suggerimento: valutare la parte reale di $(z + 1)/(z - 1)$.

Esercizio 5. Siano date sei rette distinte $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3$ del piano proiettivo tali che

$$L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset, \qquad M_1 \cap M_2 \cap M_3 \neq \emptyset, \qquad L_1 \cap L_2 \cap M_1 = \emptyset.$$

Indichiamo con p_{ij} il punto di intersezione di L_i e M_j. Dimostrare che il punto

$$q = \overline{p_{13}p_{32}} \cap \overline{p_{23}p_{31}}$$

è allineato con p_{11} e p_{22}.

Suggerimento: per una dimostrazione che non utilizza Pappo, indicare con H la retta $\overline{p_{11}p_{22}}$ e con $a = L_1 \cap L_2 \cap L_3$, $b = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ $c = H \cap M_3$ e $d = H \cap L_3$. Si considerino le tre proiettività:

$$f\colon H \to M_3, \text{ proiezione di centro } a.$$
$$g\colon H \to L_3, \text{ proiezione di centro } b.$$
$$h\colon L_3 \to M_3, \text{ proiezione di centro } q.$$

Studiare l'effetto di f e hg sui quattro punti p_{11}, p_{22}, c, d.

Esercizio 6. Sia

$$S : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

definita da

$$S([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]) = [X_1Y_1, X_1Y_2, X_2Y_1, X_2Y_2]$$

Sia $A \in \mathbb{P}^1$. Dimostrare che $l_a = S(\{A\} \times \mathbb{P}^1)$ è una retta e che, se $A \neq B$, allora $l_A \cap l_B = \emptyset$.

Esercizio 7. Trovare una retta in $\mathbb{P}^3$ che incontra le tre rette

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_4 = 0 \\ X_2 - X_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_2 - X_1 = 0 \\ X_4 - X_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8. Siano R, S, T tre sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n$ con $R \subset S$. Denotiamo $H = S \cap T$. Dimostrare la **legge di Dedekind**

$$S \cap (RT) = RH.$$

Esercizio 9 (*). Sia $Q \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ il luogo di equazione $\{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$. Data una retta H di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, dimostrare che l'intersezione $H \cap Q$ è formata da un solo punto se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo.

Esercizio 10 (*). Mostrare che il sottoinsieme E di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definito dalle due equazioni cubiche

$$\begin{cases} X_0X_1X_2 = 0 \\ X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 = 0 \end{cases}$$

contiene esattamente 9 punti. Mostrare inoltre che dati conunque $a, b \in E$ distinti, la retta ab contiene un terzo punto $c \in E$ diverso da a e b.