Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, tutoraggio del 30 ottobre 2007: E.A., M.M. e A.F.

Esercizio 1. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

Esercizio 2. Trovare una base ortonormale del piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_1+x_2-x_3 = 0$.

Esercizio 3. Trovare una base ortonormale dello spazio delle matrici reali 2×2 a traccia nulla rispetto al prodotto scalare

$$\langle A, B\rangle = traccia({}^tA\, B).$$

Esercizio 4. Sia A una matrice simmetrica. Si dimostri che

$$M = \max_{v\neq 0} \frac{< Av, v >}{< v, v >}, \qquad m = \min_{v\neq 0} \frac{< Av, v >}{< v, v >}$$

sono autovalori di A. (Osservazione: l'esistenza del massimo e del minimo segue dalla compattezza della sfera, ma questa è un'altra storia.)

Esercizio 5. Sia A una matrice simmetrica definita positiva. Si dimostri che per ogni ϵ di valore assoluto sufficientemente piccolo $A + \epsilon I$ è definita positiva.

Esercizio 6. Siano $u_1, \dots, u_n$ e $v_1, \dots, v_n$ due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che la matrice E di coefficienti $e_{ij} = \langle u_i, v_j\rangle$ è ortogonale.

Esercizio 7. Dimostrare che per una matrice simmetrica e ortogonale la segnatura è uguale alla traccia.

Esercizio 8. Siano A una matrice simmetrica e definita positiva. Mostrare che se A^2 è un multiplo dell'identità, allora anche A è un multiplo dell'identità.

Esercizio 9. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi reali in una variabile x di grado minore o uguale a 2. Dimostrare che ponendo, per $p, q \in V$

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

si definisce un prodotto scalare in V. Trovare la matrice dell'operatore $T : V \to V$ definito da

$$< Tp, q >=< p, \frac{dq}{dx} >$$

nella base $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Esercizio 10. Sia $t > 1$ numero reale. Dimostrare che la matrice simmetrica A di coefficienti $a_{ij} = t^{(i-1)(j-1)}$, $i, j = 1, \dots, n$, è definita positiva. Mostrare inoltre che se $0 < t < 1$ allora la segnatura di A dipende solo dalla classe di resto modulo 4 di n.

Esercizio 11 $(*)$**.** Siano A una matrice simmetrica e definita positiva. Mostrare che se A^2 è diagonale, allora anche A è diagonale.

(Suggerimento: per ogni autovalore λ di A^2 sia $V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A^2v = \lambda v\}$. Mostrare che $A(V) = V$.)