Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, Esonero del 15 Novembre 2007.

Esercizio 1. Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ esiste una proiettività $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che

$$f([1,0]) = [1,2], \quad f([1,1]) = [0,1], \quad f([1,2]) = [1,1], \quad f([t,1]) = [3t+2,1].$$

Esercizio 2. Sia $H \subset \mathbb{P}^3$ il piano di equazione $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Determinare il punto di intersezione di H con la retta passante per i punti $p = [1,0,1,0]$ e $q = [1,2,3,4]$.

Esercizio 3. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = x_1^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4.$$

Esercizio 4. Scrivere la matrice rispetto alla base canonica della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul piano di equazione $2x - y + 3z = 0$.

Esercizio 5. Calcolare la radice quadrata della matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il piano generato dai vettori $(1,1,0,0)$ e $(1,2,3,4)$. Trovare un piano $V \subset \mathbb{R}^4$ tale che

$$P_U P_V = P_V P_U = 0,$$

dove P_U e P_V sono le proiezioni ortogonali su U e V rispettivamente.