Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, Esonero del 21 Gennaio 2008.

**Esercizio 1.** Trovare la forma canonica di Jordan della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 2.** Siano $\mathcal{T}$ una topologia su $X$ e $Y \subset X$ un sottoinsieme. Verificare che

$$\mathcal{R} = \{A - B \mid A \in \mathcal{T}, B \subset Y\}$$

è una topologia su $X$. Dimostrare inoltre che in tale topologia $Y$ è un sottospazio chiuso e discreto.

**Esercizio 3.** Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$ il tipo della conica affine reale di equazione

$$x^2 + (t+1)xy + ty^2 + tx + t^2y + 1 - t = 0.$$

**Esercizio 4.** Trovare una base unitaria $u_1, u_2$ del sottospazio $H \subset \mathbb{C}^3$ di equazione

$$x - iy + 2z = 0, \qquad (\text{dove } i = \sqrt{-1}),$$

e tale che $\langle u_1 \mid (1,0,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Esercizio 5.** Si consideri il gruppo $\mu_n = \{\omega^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ dove $\omega \in \mathbb{C}$ è una radice primitiva, $n$-sima dell'unità. Si consideri l'applicazione

$$\mu_n \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$
$$(\omega^i, [X, Y]) \mapsto [X, \omega^i Y]$$

a) È questa una azione di $\mu_n$ su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$?
b) Descrivere orbite, punti fissi e stabilizzatori.

**Esercizio 6.** Sia $X \subset M_{3,3}(\mathbb{R})$ il sottospazio topologico

$$X = \{A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \mid A^2 = Id\}.$$

Dimostrare che:

(1) $X$ è compatto.
(2) $X$ è sconnesso.
(3) Esiste un aperto $A \subset \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ tale che $A \cap X = \{Id\}$.
(4) Esiste una componente connessa di $X$ omeomorfa a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.