Esercizi natalizi 2007

Esercizio 1. Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Provare che A è denso in $\overline{A}$.

Esercizio 2. Provare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni applicazione continua $X \to \mathbb{Z}$ è costante.

Esercizio 3. Trovare un omeomorfismo tra $S^1 \times S^1 - \Delta$ e $S^1 \times \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio topologico. Provare che

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B},$$

e dare un esempio dove $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Esercizio 5. Let A, B, and C be subsets of a topological space for which $A \subseteq B \subseteq C$ holds. If A is dense in B and B is dense in C, then A is dense in C.

Esercizio 6. Dire quante sono le componenti connesse di

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

Esercizio 7. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme con la proprietà che

$$x, y \in A \Rightarrow (\|x\| - 1, \|y\|^2) \in A.$$

Dimostrare che anche la sua chiusura $\overline{A}$ ha la medesima proprietà. Vale lo stesso per la parte interna?

Esercizio 8. Sia $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione che vale 0 sui numeri razionali e 1 altrimenti. Dimostrare che l'applicazione

$$f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \qquad f(n) = g(\pi^n + n\pi)\frac{g(\cos(n^2 + n)) + g(\cos(n^2 - n))}{(-1)^n \log(n^2 + 1) + g(n)}$$

è continua.

Esercizio 9. Dire, motivando la risposta, se l'unione di due rette parallele di $\mathbb{R}^2$ è omeomorfa all'unione di due rette incidenti.

Esercizio 10. Siano $S \subset M(2, 2)$ il sottospazio delle matrici simmetriche e $Y \subset S$ il sottospazio di quelle definite positive. Dimostrare che Y è aperto in S nella topologia di sottospazio e che è connesso per archi (sugg.: usare il fatto che se $A, B \in Y$ e $t > 0$, allora $tA, A + B \in Y$).

Esercizio 11. Sia $X \subset M(2, 2)$ il sottospazio delle matrici A tali che $A^2 = I$ (I=identità). Dire, motivando la risposta, se X è compatto e se è connesso.

Esercizio 12. Sia C un chiuso di uno spazio topologico X. Provare che C non ha parte interna se e solo se è la frontiera di un aperto di X.

Esercizio 13. Trovare un esempio di uno spazio metrico (X, d) e di un suo punto x tali che

$$\overline{\{y \mid d(x, y) < 2\}} \neq \{y \mid d(x, y) \leq 2\}.$$

Esercizio 14. Sia X uno spazio topologico: per ogni $A \subset X$ denotiamo con $f(A) = \overline{A^o}$. Dimostrare che $f(f(A)) = f(A)$.

Esercizio 15. Siano A, B due aperti densi di uno spazio topologico. Dimostrare che $A \cap B$ è un aperto denso.

Esercizio 16. Prove that the image of a dense set under a surjective continuous map is dense.

Esercizio 17. Determinare il numero di componenti connesse dello spazio

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 \neq y^2\}.$$

(Sugg.: considerare l'intersezione del complementare di Y con le rette affini di $\mathbb{C}^2$.)

Esercizio 18. Prove that for continuous functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f < g$, the space between their graphs $\{(x, y) \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$ is homeomorphic to a closed strip $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$.

Esercizio 19. Sia $\mathcal{S}$ la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base di aperti la famiglia di tutti gli intervalli del tipo $[a, b[$. Provare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni applicazione continua $X \to (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ è costante.

Università di Roma 1: a.a. 2007-08, corso di Geometria Analitica, E.A., M.M. e A.F.

Esercizio 20. Sia $A \subset \mathbb{R}$ aperto. Dimostrare che ogni componente connessa di A è un intervallo aperto. Dedurne che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione disgiunta di intervalli aperti.

Esercizio 21. Siano X, Y due spazi topologici. Mostrare che se né X né Y hanno la topologia indiscreta, allora esiste un aperto del prodotto $X \times Y$ che non è della forma $A \times B$, con $A \subset X$ e $B \subset Y$.

Esercizio 22. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua ed aperta. Dimostrare che l'applicazione

$$X \times X \to Y \times Y, \qquad (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2))$$

è aperta.

Esercizio 23. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme convesso. Dimostrare che anche la sua chiusura $\overline{A}$ è convessa. (Sugg.: l'applicazione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y,t) = tx + (1-t)y$$

è continua e quindi $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ per ogni $X \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.)

Esercizio 24. Dire se i seguenti spazi sono connessi:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx - y > x^3 - x^2\}, \qquad Y = \{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 \neq y^2\}.$$

Esercizio 25. Siano X uno spazio topologico e $A, B \subset X$ due sottoinsiemi non vuoti tali che $A \cup B = X$ e $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Dimostrare che X non è connesso.

Esercizio 26. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D^n \mid |x_1| < 1\}$. Dimostrare che esistono finiti $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $D_n - (A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ è sconnesso.

Esercizio 27. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice **localmente costante** se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$. Provare che se X è connesso e $f\colon X \to \mathbb{R}$ è localmente costante, allora f è costante. (Sugg.: sia $x \in X$ e provare che $f^{-1}(f(x))$ è aperto e chiuso.)

Esercizio 28. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$ tali che:
(1) A è aperto nella topologia euclidea.
(2) Se $0 \in A$, allora $\mathbb{R} - A$ è limitato.
Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia e che lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto, connesso, di Hausdorff ed omeomorfo all'unione di due circonferenze tangenti.

Esercizio 29. Dimostrare che i quattro sottospazi di $\mathbb{R}^2$:
(1) Una circonferenza.
(2) Unione di due circonferenze disgiunte.
(3) Unione di due circonferenze tangenti.
(4) Unione di due circonferenze secanti.
hanno classi di omeomorfismo distinte.

Esercizio 30 $(*)$**.** Sia $X = \mathbb{Q}^n \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^n \subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che X è connesso.

Esercizio 31 $(*)$**.** Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 1. Dimostrare che per ogni $c \in [0,1]$ esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) = f(t+c)$.

Esercizio 32 $(*)$**.** Sia X uno spazio compatto di Hausdorff.
(1) Dimostrare che per ogni coppia di chiusi disgiunti $C, D \subset X$ esistono due aperti disgiunti A, B tali che $C \subset A$, $B \subset D$ (Sugg.: teorema di Wallace).
(2) Sia $C_0 \supset C_1 \supset \cdots C_n \supset \cdots$ una catena discendente di chiusi in X e sia A un aperto tale che $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n \subset A$. Dimostrare che $C_n \subset A$ per ogni n sufficientemente grande.
(3) Sia $C_0 \supset C_1 \supset \cdots C_n \supset \cdots$ una catena discendente di chiusi connessi in X. Dimostrare che $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n$ è un sottospazio connesso.

Esercizio 33. Sei $X = A \cup B$ mit Teilräumen A und B welche entweder beide offen oder beide abgeschlossen sind. Beweise, dass $f : X \to Y$ stetig ist genau dann, wenn $f_{|A}$ und $f_{|B}$ stetig ist.