GEOMETRIA PROIETTIVA

1. Sottospazi affini e punti all'infinito

Sia V uno spazio vettoriale. Una combinazione lineare $a_0v_0 + \cdots + a_nv_n$ di vettori $v_i \in V$ si dice una *combinazione baricentrica* se $\sum a_i = 1$.
Un sottoinsieme di V si dice un *sottospazio affine* se è chiuso per combinazioni baricentriche. Ogni sottospazio vettoriale è anche un sottospazio affine.
Si noti che combinazione baricentrica di combinazioni baricentriche è ancora baricentrica; in particolare l'insieme di tutte le combinazioni baricentriche di un numero finito di vettori è un sottospazio affine.
Intersezione di sottospazi affini è ancora un sottospazio affine.

Lemma 1.1. *Sia K un sottospazio affine non vuoto di uno spazio vettoriale V. Allora:*
(1) *Per ogni $v \in V$ il sottoinsieme $v + K = \{v + x \mid x \in K\}$ è ancora un sottospazio affine detto il* traslato di K tramite v.
(2) *Il sottoinsieme $W = \{u - v \mid u, v \in K\} \subset V$ è un sottospazio vettoriale e vale $K = v + W$ per ogni $v \in K$. In particolare K è un sottospazio vettoriale se e solo se $0 \in K$.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Segue dal Lemma 1.1 che per ogni sottospazio affine non vuoto $K \subset V$ esiste un unico sottospazio vettoriale W tale che $K = v + W$ per ogni $v \in K$. Si definisce la dimensione di K come la dimensione di W. Se $K = \emptyset$ allora si pone per convenzione $\dim K = -1$.

Per *spazio affine* su di un campo $\mathbb{K}$ intenderemo provvisoriamente uno spazio vettoriale i cui vettori sono chiamati *punti*.
Dunque i punti sono tutti e soli i sottospazi affini di dimensione 0: sottospazi affini di dimensione 1 e 2 sono detti rispettivamente rette e piani affini.

Definizione 1.2. Due sottospazi affini della stessa dimensione si dicono **paralleli** se uno è il traslato dell'altro.

Un'applicazione $f : V \to W$ tra spazi vettoriali si dice *affine* se commuta con le combinazioni baricentriche, cioè se per ogni $v_0, \dots, v_n \in V$ e per ogni $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\sum a_i = 1$ vale $f(\sum a_i v_i) = \sum a_i f(v_i)$.
Le traslazioni in uno spazio vettoriale sono applicazioni affini e composizione di applicazioni affini è ancora affine. Poiché le applicazioni lineari sono esattamente le applicazioni affini f tali che $f(0) = 0$ si ha che ogni applicazione affine è la composizione di una applicazione lineare e di una traslazione.

Esercizio 1. Sia E un sottoinsieme di uno spazio vettoriale su di un campo diverso da $\mathbb{Z}/2$. Provare che E è un sottospazio affine se e solo se per ogni $u, v \in E$ e per ogni $a \in \mathbb{K}$ vale $au + (1 - a)v \in E$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su di un campo F. Provare che se F possiede almeno $n + 1$ elementi, allora V non può essere unione di n sottospazi affini propri. In particolare uno spazio vettoriale su di un campo infinito non può essere unione finita di sottospazi affini propri. (Sugg.: induzione su n; sia per assurdo $V = \cup_{i=1}^n V_i$, allora a

Università di Roma 1: a.a. 2007-08, corso di Geometria Analitica, E.A., M.M. e A.F.

meno di traslazioni possiamo supporre $0 \in V_n$. Se $V_n \subset V_i$ per qualche $i < n$ abbiamo finito, altrimenti scegliamo $v \in V_n - \cup_{i=1}^{n-1}(V_n \cap V_i)$, $h \in V - V_n$ e consideriamo la retta affine $L = \{tv + (1-t)h \mid t \in F\}$. Esiste allora un indice i tale che L interseca V_i in almeno due punti.)

Esercizio 3. Sia $f\colon V \to W$ una applicazione affine. Dimostrare che:

(1) Se $E \subset V$ è un sottospazio affine, allora $f(E)$ è un sottospazio affine.
(2) Se $H, K \subset V$ sono sottospazi affini della stessa dimensione e paralleli, allora $f(H), f(K)$ sono paralleli.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione affine e siano $f(0) = (b_1, \dots, b_m)$, $f(\delta^i) - f(0) = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$, dove $\delta^1, \dots, \delta^n$ indica la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Provare che f manda il punto $(x_1, \dots, x_n)$ nel punto $(y_1, \dots, y_m)$ che soddisfa la relazione

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Caratterizzare inoltre le matrici $(n+1) \times (n+1)$ corrispondenti alle traslazioni in $\mathbb{K}^n$.

Esercizio 5. Sia $H \subset \mathbb{K}^n$ un sottospazio affine non contenente 0 e $f\colon H \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione affine. Dimostrare che f è la restrizione ad H di un'applicazione lineare $g\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Esercizio 6. Siano $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (3,1)$, $P_3 = (3,3)$, $Q_1 = (1,8)$, $Q_2 = (0,7)$ e $Q_3 = (7,3)$. Si determini l'affinità di $\mathbb{R}^2$ in sé che trasforma P_i in Q_i per $i = 1,2,3$.

Sia V uno spazio affine, denotiamo con $\mathcal{L}$ l'insieme di tutte le rette affini in V e con $\sim$ la relazione di parallelismo in $\mathcal{L}$, ossia $L_1 \sim L_2$ se e solo se esiste $v \in V$ tale che $L_2 = v + L_1$. Notiamo che, fissato un punto $p \in V$, le rette affini passanti per p formano un insieme di rappresentanti per la relazione di equivalenza $\sim$, e cioè per ogni retta affine in $L \subset V$ esiste un'unica retta L' passante per p e parallela a L.
Chiameremo il quoziente $\mathcal{L}/\sim$ *iperpiano all'infinito* e l'unione

$$\hat{V} = V \cup (\mathcal{L}/\sim)$$

completamento proiettivo di V.

Sia $t_1, \dots, t_n$ un sistema di coordinate su V. Possiamo allora considerare l'applicazione affine iniettiva

$$h\colon V \to \mathbb{K}^{n+1}, \qquad f(t_1, \dots, t_n) = (1, t_1, \dots, t_n).$$

L'applicazione h preserva la relazione di parallelismo e la sua immagine è il sottospazio affine $\{x_0 = 1\}$. Possiamo quindi identificare il completamento proiettivo di V con il completamento proiettivo di $\{x_0 = 1\}$.
Ogni retta affine in $\{x_0 = 1\}$ è parallela ad un unico sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $\{x_0 = 0\}$. Ogni punto di $\{x_0 = 1\}$ è contenuto in un unico sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $\mathbb{K}^{n+1}$. Esiste dunque una bigezione tra il completamento proiettivo di $\{x_0 = 1\}$ e l'insieme di tutte le rette per l'origine in $\mathbb{K}^{n+1}$.

2. Spazi proiettivi

Sia $\mathbb{K}$ un campo e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; definiamo il *proiettivizzato* di V

$$\mathbb{P}(V) = (V - \{0\})/\sim$$

come il quoziente di $V - \{0\}$ per la relazione di equivalenza

$$v \sim w \quad \text{se e solo se} \quad v = \lambda w \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}.$$

L'insieme $\mathbb{P}(V)$ è in bigezione naturale con l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 (rette per l'origine) di V.

Dato un vettore $v \in V-\{0\}$ si è soliti denotare con $[v] \in \mathbb{P}(V)$ la classe di equivalenza corrispondente.

Chiameremo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ *spazio proiettivo* di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. In assenza di ambiguità sul campo $\mathbb{K}$ scriveremo più semplicemente $\mathbb{P}^n$ in luogo di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Diremo che un sottoinsieme $M \subset V$ è un *cono* se $0 \in M$ e se $v \in M$ implica che $\lambda v \in M$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $M \subset V$ è un cono e $S \subset \mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme, si definisce

$$\mathbb{P}(M) = \{[v] \mid v \in M-\{0\}\} \subset \mathbb{P}(V) \quad \text{e} \quad C(S) = \{v \in V-\{0\} \mid [v] \in S\} \cup \{0\}.$$

Il sottoinsieme $C(S) \subset V$ viene detto *cono affine* di S; è immediato osservare che le applicazioni

$$\{\text{coni in } V\} \xrightarrow{\mathbb{P}} \{\text{sottoinsiemi di } \mathbb{P}(V)\} \xrightarrow{C} \{\text{coni in } V\}$$

sono bigettive ed una l'inversa dell'altra.

Se $W \subset V$ è un sottospazio lineare, chiameremo $\mathbb{P}(W)$ *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$. Si noti che ogni punto di uno spazio proiettivo è un sottospazio. Se $W \subset V$ è un iperpiano diremo che $\mathbb{P}(W)$ è un **iperpiano** di $\mathbb{P}(V)$. Poiché $\mathbb{P}(\cap_i M_i) = \cap_i \mathbb{P}(M_i)$ per ogni famiglia di coni $\{M_i\}$, si ha in particolare che intersezione di sottospazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo.

Definizione 2.1 (Join di sottospazi proiettivi)**.** Se $W_1, W_2, \ldots, W_s \subset V$ sono sottospazi vettoriali scriveremo

$$\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2), \ldots, \mathbb{P}(W_n) \rangle = \mathbb{P}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n).$$

In altri termini, se $H_1, \ldots, H_s \subset \mathbb{P}(V)$ sono sottospazi proiettivi, allora $\langle H_1, \ldots, H_s \rangle$, è il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ che li contiene. *Dati due sottospazi proiettivi $L, M \subset \mathbb{P}(V)$ scriveremo anche LM per indicare $\langle L, M \rangle$.*

Se vale $p_1 = [v_1]$, $p_2 = [v_2]$,..., $p_n = [v_n]$, con $v_1, \ldots, v_n \in V - \{0\}$, allora

$$\langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle = \mathbb{P}(L(v_1, \ldots, v_n)),$$

dove $L(v_1, \ldots, v_n)$ è il sottospazio vettoriale generato dai vettori v_i.

Esercizio 7. Se H, K sono sottospazi non vuoti di uno spazio proiettivo allora

$$HK = \bigcup_{p \in H, q \in K} pq.$$

Se lo spazio vettoriale V ha dimensione finita, definiamo la dimensione di $\mathbb{P}(V)$ mediante la formula $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$ (in particolare $\dim \emptyset = -1$).

Spazi proiettivi di dimensione 1 e 2 si dicono rispettivamente *rette* e *piani* proiettivi. Punti contenuti in una medesima retta vengono detti *allineati*, punti (o rette) contenuti in un medesimo piano si dicono *complanari*, rette passanti per un medesimo punto si dicono *concorrenti.*

Due sottospazi proiettivi $H, K \subset \mathbb{P}(V)$ si dicono *incidenti* se $H \cap K \neq \emptyset$, altrimenti si dicono *sghembi*; poiché $C(HK) = C(H) + C(K)$ e $\dim H = \dim C(H) - 1$ vale la *formula di Grassmann*

$$\dim(H \cap K) + \dim(HK) = \dim H + \dim K$$

e quindi H e K sono sghembi se e solo se $\dim(HK) = \dim H + \dim K + 1$.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$. Provare che ogni sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione k è intersezione di $n-k$ iperpiani proiettivi.

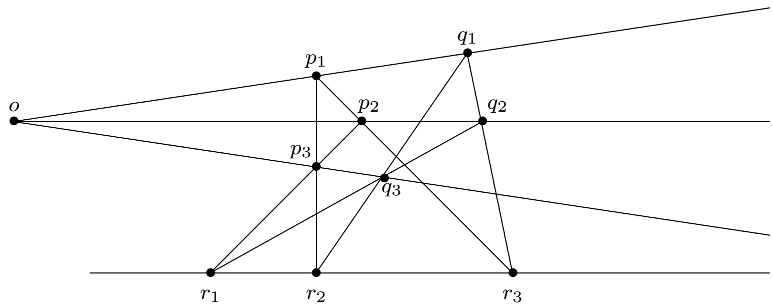

FIGURA 1. La configurazione di Desargues: 10 rette e 10 punti.

3. Dualitá e teorema di Desargues

Teorema 3.1 (Desargues). *Siano dati 7 punti $o, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}^2$ tali che ciascuna delle tre terne (o, p_1, q_1), (o, p_2, q_2) e (o, p_3, q_3) sia formata da tre punti allineati. Allora i tre punti*

$$r_1 = p_2p_3 \cap q_2q_3, \quad r_2 = p_1p_3 \cap q_1q_3, \quad r_3 = p_1p_2 \cap q_1q_2,$$

sono allineati.

Dimostrazione. Se $p_1 = q_1$, allora $r_2 = r_3$ ed il teorema è banale. Possiamo quindi supporre $p_i \neq q_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione 3 e scegliamo $u, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in V$ tali che

$$o = [u], \quad p_i = [v_i], \quad q_i = [w_i].$$

Per ipotesi o appartiene alla retta p_1q_1. Questo equivale a dire che u è una combinazione lineare di v_1 e w_1: diciamo $u = a_1v_1 + b_1w_1$. Similmente si ha

$$u = a_1v_1 + b_1w_1 = a_2v_2 + b_2w_2 = a_3v_3 + b_3w_3.$$

Da tali uguaglianze deduciamo che

$$a_1v_1 - a_2v_2 = b_2w_2 - b_1w_1, \quad a_2v_2 - a_3v_3 = b_3w_3 - b_2w_2, \quad a_1v_1 - a_3v_3 = b_3w_3 - b_1w_1.$$

da cui segue

$$r_3 = [a_1v_1 - a_2v_2], \quad r_1 = [a_2v_2 - a_3v_3], \quad r_2 = [a_1v_1 - a_3v_3].$$

I tre punti r_1, r_2 ed r_3 sono allineanti poiché

$$(a_1v_1 - a_2v_2) + (a_2v_2 - a_3v_3) + (a_1v_1 - a_3v_3) = 0.$$

□

Definiamo lo spazio proiettivo duale $\mathbb{P}(V)^*$ come l'insieme di tutti gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$. Per definizione gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ sono in corrispondenza biunivoca con gli iperpiani di V, che a loro volta sono in bigezione con le classi di omotetia di funzionali lineari non nulli $V \to \mathbb{K}$. Esiste quindi una bigezione naturale $\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*)$.

I sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)^*$ sono anche detti *sistemi lineari di iperpiani.* Un sistema lineare di dimensione 1 è detto anche *fascio* (più raramente *pennello* o *schiera*) di iperpiani; un sistema lineare di dimensione 2 è detto *rete*.

Se $H \subset \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo, denotiamo con $H^\perp \subset \mathbb{P}(V)^*$ l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ che contengono H. L'insieme $H^\perp$ è il proiettivizzato dell'annullatore di $C(H)$ ed è quindi un sistema lineare di iperpiani.
Se V ha dimensione finita, allora si hanno degli isomorfismo naturali

$$\mathbb{P}(V)^{**} = \mathbb{P}(V^*)^* = \mathbb{P}(V^{**}) = \mathbb{P}(V)$$

tramite i quali si ha $H^{\perp\perp} = H$ per ogni sottospazio proiettivo H.

Esercizio 9. Siano H, K sottospazi di uno spazio proiettivo di dimensione n. Definiamo il *difetto incidente* di H e K tramite la formula

$$\mathrm{DI}(H,K) = \begin{cases} \dim(H\cap K)+1 & \text{se } \dim H + \dim K \leq n-1, \\ n - \dim(HK) & \text{se } \dim H + \dim K \geq n-1. \end{cases}$$

Provare che il difetto incidente è ben definito e che $\mathrm{DI}(H,K) = \mathrm{DI}(H^\perp, K^\perp)$.

Esercizio 10. Siano H, K sottospazi di uno spazio proiettivo di dimensione n. Definiamo il *difetto secante* di H e K come

$$\mathrm{DS}(H,K) = \dim H + \dim K + 1 - \dim(HK)$$

Provare che, se $\dim H + \dim K \leq n-1$, allora il difetto secante è uguale al difetto incidente.

4. Sistemi di riferimento e coordinate omogenee

Definizione 4.1. Diremo che $s+1$ punti $p_0, \ldots, p_s \in \mathbb{P}(V)$ sono *proiettivamente indipendenti* se il sottospazio $\langle p_0, \ldots, p_s \rangle$ da essi generato ha dimensione esattamente s.

Ad esempio, due punti in $\mathbb{P}^1$ sono proiettivamente indipendenti se e solo se sono distinti; tre punti in $\mathbb{P}^2$ sono proiettivamente indipendenti se e solo se non sono allineati. È fondamentale osservare che, se $v_0, \ldots, v_s \in V - \{0\}$, allora i punti $[v_0], \ldots, [v_s]$ sono proiettivamente indipendenti se e solo se i vettori $v_0, \ldots, v_s$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 4.2. Diremo che $n+2$ punti $p_0, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ sono un *sistema di riferimento* se $\dim V = n+1$ e se per ogni indice i fissato, i punti p_j, per $j \neq i$, sono proiettivamente indipendenti.

Sono esempi di sistemi di riferimento:

- Tre punti distinti di $\mathbb{P}^1$.
- Quattro punti di $\mathbb{P}^2$, tre dei quali non siano allineati.
- Cinque punti di $\mathbb{P}^3$, quattro dei quali non siano complanari.

Lemma 4.3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$. Allora $n+2$ punti $p_0, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ sono un sistema di riferimento se e solo se esiste una base $e_0, \ldots, e_n \in V$ tale che $p_i = [e_i]$ per $i = 0, \ldots, n$ e $p_{n+1} = [e_0 + e_1 + \cdots + e_n]$.*

Dimostrazione. Se $e_0, \ldots, e_n \in V$ è una base, allora è facile osservare che i punti $p_i = [e_i]$ per $i = 0, \ldots, n$ e $p_{n+1} = [e_0 + e_1 + \cdots + e_n]$ sono un sistema di riferimento.
Siano viceversa $p_0, \ldots, p_{n+1}$ un sistema di riferimento e scegliamo vettori $v_0, \ldots, v_n \in V$ tali che $p_i = [v_i]$ per ogni $i = 0, \ldots, n$. Siccome $p_0, \ldots, p_n$ sono indipendenti, ne segue che $v_0, \ldots, v_n$ è una base di V e quindi esistono $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $p_{n+1} = [e_{n+1}]$, dove $e_{n+1} = a_0 v_0 + \cdots + a_n v_n$. Se fosse $a_i = 0$ per qualche indice i, allora i vettori e_{n+1} e v_j, per $j \neq i$, sarebbero linearmente dipendenti e quindi $p_0, \ldots, p_{n+1}$ non potrebbe essere un sistema di riferimento. Quindi $a_i \neq 0$ per ogni i ed è sufficiente considerare la base $e_i = a_i v_i$. $\square$

Esercizio 11. Dato un sottoinsieme $W \subset \mathbb{P}(V)$, denotiamo con $\langle W \rangle$ il sottospazio generato da W, con $Sec(W) = \cup\{pq \mid p, q \in W\}$ e definiamo induttivamente $Sec^n(W) = Sec(Sec^{n-1}(W))$.
Provare che $\langle W \rangle = \cup_{n>0} Sec^n(W)$ e che, se $\langle W \rangle$ ha dimensione minore od uguale a n, allora $\langle W \rangle = Sec^n(W)$.

Chiameremo *sistema di coordinate omogenee* su $\mathbb{P}(V)$ un qualsiasi sistema di coordinate lineari su V. Se $\mathbb{P}(V)$ ha dimensione finita n, la scelta di un sistema di coordinate omogenee definisce un isomorfismo proiettivo $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ e quindi permette di rappresentare ogni punto $p \in \mathbb{P}(V)$ nella forma $p = [a_0, \dots, a_n]$, con i numeri $a_i \in \mathbb{K}$ non tutti nulli. Tale rappresentazione non è unica: infatti vale $[a_0, \dots, a_n] = [b_0, \dots, b_n]$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $b_i = \lambda a_i$ per ogni i.

Definizione 4.4. Un'applicazione $\phi\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ si dice una *proiettività* se è indotta per passaggio al quoziente da una applicazione *lineare iniettiva* $f\colon V \to W$ mediante la regola

$$\phi([v]) = [f(v)], \qquad v \in V - \{0\},$$

e scriveremo in tal caso $\phi = [f]$. Un *isomorfismo proiettivo* è una proiettività bigettiva.

Nella definizione di proiettività, l'iniettività di f è necessaria affinché $f(v)$ sia $\neq 0$ per ogni $v \neq 0$. È un facile esercizio di algebra lineare osservare che, date due applicazioni $f, g\colon V \to W$ lineari iniettive, vale $[f] = [g]$ se e solo se esiste $a \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $f = ag$.

Se V ha dimensione finita, allora ogni applicazione lineare iniettiva $f\colon V \to V$ è un isomorfismo e quindi ogni proiettività $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è invertibile. Si denota $\mathrm{PGL}(V)$ il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ in sé. Per definizione esiste un omomorfismo surgettivo di gruppi $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$ che ha come nucleo i multipli dell'identità. Si indica anche $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{PGL}(\mathbb{K}^n)$.

Proposizione 4.5. *Dati due sistemi di riferimento $p_0, \dots, p_{n+1}$ e $q_0, \dots, q_{n+1}$ di $\mathbb{P}^n$, esiste un'unica proiettività $\varphi \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$ tale che $\varphi(p_i) = q_i$ per ogni i.*

Dimostrazione. L'esistenza segue immediatamente dal Lemma 4.3, mentre per dimostrare l'unicità non è restrittivo supporre $p_i = q_i$ per ogni i. Sia $e_0, \dots, e_n$ una base di $\mathbb{K}^{n+1}$ tale che $p_i = [e_i]$ con $e_{n+1} = \sum e_i$ e $f \in \mathrm{GL}(n+1)$ tale che $[f]p_i = p_i$ per ogni i. Allora esistono costanti $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ tali che $f(e_i) = a_i e_i$ per ogni i.
Poiché $e_0, \dots, e_n$ sono una base segue necessariamente che $a_i = a_{n+1}$ per ogni $i = 0, \dots, n$ e quindi f è un multiplo dell'identità. □

Si consideri adesso una decomposizione in somma diretta di sottospazi $V = K \oplus W$ e sia $\pi\colon V \to W$ la proiezione sul secondo fattore. Per passaggio al quoziente otteniamo una mappa $[\pi]\colon \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(K) \to \mathbb{P}(W)$ detta *proiezione* su $\mathbb{P}(W)$ di *centro* $\mathbb{P}(K)$.
Da un punto di vista più geometrico, se $p \in \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(K)$, allora $[\pi](p)$ è il punto di intersezione di $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ e di $\langle \mathbb{P}(K), p\rangle$.
Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V/K)$ può essere pensato come l'insieme dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione uguale alla dimensione di K che contengono $\mathbb{P}(K)$; in tale interpretazione l'isomorfismo naturale $\mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V/K)$ associa al punto $p \in \mathbb{P}(W)$ il sottospazio $\langle \mathbb{P}(K), p\rangle$.

Per $n = 1$ possiamo scrivere $\mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, dove $\mathbb{K} = \{[t, 1] \mid t \in \mathbb{K}\}$ e $\infty = [1, 0]$ (intuitivamente $[1, 0]$ è il limite per $t \to \infty$ di $[1, 1/t] = [t, 1]$). Ogni proiettività ϕ di $\mathbb{P}^1$ in sé è rappresentata da una matrice invertibile

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } ad - bc \neq 0,$$

e quindi $\phi([x_0, x_1]) = [ax_0 + bx_1, cx_0 + dx_1]$ che, nella coordinata affine t diventa

$$\phi(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \qquad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

Esercizio 12. Determinare le proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in sé che preservano i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:
$\mathbb{R} = \{x + iy \mid y = 0\}$, $H = \{x + iy \mid y > 0\}$, $\overline{H} = \{x + iy \mid y \geq 0\}$, $\Delta = \{x + iy \mid x^2 + y^2 < 1\}$ e $\overline{\Delta} = \{x + iy \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Provare inoltre che la proiettività $\phi(t) = \dfrac{t - i}{t + i}$ trasforma il semipiano H nel disco Δ.

Esercizio 13. Se $\phi\colon \mathbb{P}^2 - \{o\} \to H$ è una proiezione e $L \subset \mathbb{P}^2$ è una retta che non contiene il centro o, allora la restrizione $\phi\colon L \to H$ è una proiettività tale che $\phi(p) = p$ per ogni $p \in L \cap H$. Viceversa, si dimostri che ogni proiettività $\psi\colon L \to H$ tale che $\psi(p) = p$ per ogni $p \in L \cap H$ è ottenuta come restrizione di una opportuna proiezione (di centro non necessariamente o).

Esercizio 14. Siano $L, H \subset \mathbb{P}^2$ rette distinte, $p = L \cap H$ e $\phi\colon L \to H$ una proiettività tale che $\phi(p) \neq p$. Provare che ϕ è composizione di due proiezioni. (Sugg.: considerare la retta $\phi(p) + \phi^{-1}(p)$.)

Esercizio 15. (Prospettive)
Sia V spazio vettoriale di dimensione finita n e $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare invertibile. La proiettività indotta $[f]\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ si dice una *prospettiva* se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\operatorname{rank}(f - \lambda I) \leq 1$. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $[f]$ è una prospettiva.
(2) $[f^t]\colon \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V^*)$ è una prospettiva.
(3) Esiste un iperpiano $H \subset \mathbb{P}(V)$ tale che $[f]q = q$ per ogni $q \in H$.
(4) Esiste $p \in \mathbb{P}(V)$ tale che $[f]q \in \overline{pq}$ per ogni $q \in \mathbb{P}(V) - \{p\}$.
(5) Esiste un sistema di riferimento $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{P}(V)$ tale che $[f]p_0 = p_0$ e $[f]p_i \in \overline{p_0 p_i}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Esercizio 16. (Centro di prospettiva)
Sia $[f]\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ una prospettiva diversa dall'identità. Provare che esiste un unico punto $p \in \mathbb{P}(V)$ tale che $[f]q \in \overline{pq}$ per ogni $q \in \mathbb{P}(V) - \{p\}$.
Un tale punto p viene chiamato *centro di prospettiva.* Anticamente una prospettiva veniva chiamata *omologia* se $p \notin H$; *elazione* od *omologia speciale* se $p \in H$.

Esercizio 17. Provare che, per una proiettività $\phi\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) Esiste un sottospazio $H \subset \mathbb{P}^n$ di codimensione r tale che $\phi(p) = p$ per ogni $p \in H$.
(2) Esiste un sottospazio L di dimensione $r-1$ tale che $\phi(q) \in \langle q, L\rangle$ per ogni $q \in \mathbb{P}^n$.
(3) ϕ è composizione di r prospettive.

Esercizio 18. Utilizzare l'Esercizio 15 (nel caso $n = 3$) per una dimostrazione alternativa del teorema di Desargues (1648), vedi Figura 1.

Esercizio 19. Siano date n rette proiettive $L_1, \ldots, L_n \subset \mathbb{P}^n$, nessuna delle quali contenuta nell'iperpiano $H_0 = \{x_0 = 0\}$. Scriviamo $\mathbb{P}^n = \mathbb{K}^n \cup H_0$, per ogni $i = 1, \ldots, n$ esiste una rappresentazione parametrica della retta affine $L_i \cap \mathbb{K}^n$ che possiamo scrivere nella forma

$$L_i = \{\, [1, a_{i1}t + b_{i1}, \ldots, a_{in}t + b_{in}] \mid t \in \mathbb{K}\,\}.$$

Provare che gli n punti di intersezione delle rette $L_1, \ldots, L_n$ con l'iperpiano H_0 sono proiettivamente indipendenti se e solo se $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Esercizio 20 (∗)**.** Siano date quattro rette $L_1, \ldots, L_4 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Provare che esiste almeno una retta in $\mathbb{P}^3$ che le interseca tutte e quattro. (Sugg.: se esiste un punto o appartenente all'intersezione di due rette distinte L_i, L_j considerare la proiezione di centro o. Altrimenti si prendano coordinate omogenee tali che $L_4 = \{x_0 = x_1 = 0\}$, $L_1 = \{x_2 = x_3 = 0\}$ e si consideri l'intersezione delle rette con i piani del fascio $F_t = \{x_1 = tx_0\}$, per $t \in \mathbb{K}$. Ad un certo punto servirà il risultato dell'Esercizio 20.)