IL TEOREMA SPETTRALE

CORSO DI GEOMETRIA ANALITICA 2007-08, UNIVERSITÀ DI ROMA 1

1. T.S. per matrici simmetriche

Lemma 1.1. *Siano V spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e $f\colon V \to V$ lineare. Esistono allora due vettori $u, v \in V$ non entrambi nulli, e due numeri reali a, b tali che*

$$f(u) = au - bv, \qquad f(v) = bu + av.$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $V = \mathbb{R}^n$ e di conseguenza $f = L_A$ l'applicazione lineare associata ad una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Possiamo pensare A come una matrice a coefficienti complessi e quindi estendere nel modo canonico L_A ad un'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Se scriviamo ogni vettore di $\mathbb{C}^n$ nella forma $u + iv$, con $u, v \in \mathbb{R}^n$ ed i unità immaginaria, allora si ha

$$L_A(u + iv) = L_A(u) + iL_A(v).$$

Sia $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio caratteristico di A e sia $u + iv \in \mathbb{C}^n$ il corrispondente autovettore. Si ha

$$L_A(u) + iL_A(v) = (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$$

che equivale a

$$L_A(u) = au - bv, \qquad L_A(v) = bu + av.$$

□

Indichiamo con $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$ il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$, con A^T la trasposta di una matrice A e con $O(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici ortogonali reali di ordine n, ossia

$$O(n, \mathbb{R}) = \{E \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid E^T = E^{-1}\}$$

Siccome $\det(E^T) = \det(E)$ e $\det(E^{-1}) = \det(E)^{-1}$ segue immediatamente che per ogni matrice ortogonale E vale $\det(E)^2 = 1$.

Per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e per ogni coppia di vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y\rangle$$

ed in particolare:

(1) Se A è simmetrica, allora $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ per ogni x, y.
(2) Se A è antisimmetrica, allora $\langle Ax, y\rangle = -\langle x, Ay\rangle$ per ogni x, y.
(3) Se E è ortogonale, allora $\langle Ex, Ey\rangle = \langle x, E^T Ey\rangle = \langle x, y\rangle$ per ogni x, y.

Lemma 1.2. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio di dimensione positiva tale che $AV \subset V$. Allora V contiene un autovettore non banale per A.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che esistono due vettori $u, v \in V$ non entrambi nulli e tali che

$$Au = au - bv, \qquad Av = bu + av$$

per qualche coppia di numeri reali a, b: vogliamo dimostrare u e v sono autovettori di A.

Siccome A è simmetrica vale $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ e quindi

$$\langle Au, v\rangle = a\langle u, v\rangle - b\langle v, v\rangle = \langle u, Av\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, u\rangle.$$

Semplificando si ottiene $b(\|u\|^2 + \|v\|^2) = 0$ e dunque $b = 0$, $f(u) = au$, $f(v) = av$. □

Date: 31 ottobre 2007.

Teorema 1.3 (Teorema spettrale)**.** *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Esiste allora una base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale e autovettori per A.*

Dimostrazione. Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale tale che $AV \subset V$ e dimostriamo per induzione sulla dimensione di V che esiste una base ortonormale di V fatta da autovettori per A. Se $V = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Sia $u_1 \in V$ un autovettore non banale per A, diciamo $Au_1 = \lambda_1 u_1$; a meno di dividere u_1 per la sua norma non è restrittivo supporre $\|u_1\| = 1$. Si consideri adesso il sottospazio $W = \{v \in V \mid \langle u_1, v\rangle = 0\}$. Se $w \in W$, allora $Aw \in W$, infatti $Aw \in V$ e vale

$$\langle u_1, Aw\rangle = \langle Au_1, w\rangle = \langle \lambda_1 u_1, w\rangle = \lambda_1 \langle u_1, w\rangle = 0.$$

Per l'ipotesi induttiva esiste una base ortonormale $u_2, \ldots, u_s$ di W di autovettori per A e quindi $u_1, u_2, \ldots, u_s$ è una base ortonormale di V di autovettori per A. □

Corollario 1.4. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Esiste allora una matrice ortogonale E tale che $E^{-1}AE = E^T AE$ è diagonale.*

Dimostrazione. Sia $e_1, \ldots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $u_1, \ldots, u_n$ una base ortonormale di autovettori per A, diciamo $Au_i = \lambda_i u_i$. Denotiamo con E la matrice ortogonale del cambio di base, ossia $Ee_i = u_i$. Allora

$$E^{-1}AEe_i = E^{-1}Au_i = E^{-1}\lambda_i u_i = \lambda_i e_i$$

e quindi $E^{-1}AE$ è diagonale. □

Definizione 1.5. Una matrice simmetrica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice:

(1) Semidefinita positiva se $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
(2) Definita positiva se $\langle x, Ax\rangle > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Corollario 1.6. *Una matrice simmetrica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è definita (risp. semidefinita) positiva se e solo se i suoi autovalori sono tutti positivi (risp.: non negativi).*

Dimostrazione. Se A è diagonale il risultato è chiaro. Altrimenti sia E ortogonale tale che $E^{-1}AE = D$ è diagonale. Allora A ha gli stessi autovalori di D e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\langle x, Dx\rangle = \langle x, E^{-1}AEx\rangle = \langle Ex, AEx\rangle.$$

Siccome E è bigettiva, ne segue che $\langle Ex, AEx\rangle > 0$ per ogni $x \neq 0$ se e solo se $\langle y, Ay\rangle > 0$ per ogni $y \neq 0$. □

Corollario 1.7. *Una matrice simmetrica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se è semidefinita positiva e invertibile.*

Dimostrazione. Gli autovalori sono tutti positivi se e solo se sono tutti non negativi ed il determinante è diverso da 0. □

2. Radici quadrate e decompositione polare

Sia A una matrice quadrata, allora $A^T A$ è simmetrica e semidefinita positiva, infatti per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\langle x, A^T Ax\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0.$$

Se inoltre $\det(A) \neq 0$, allora $A^T A$ è invertibile e definita positiva.

In particolare, per ogni matrice simmetrica P, la matrice $P^2 = P^T P$ è simmetrica e semidefinita positiva.

Teorema 2.1. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simmetrica e semidefinita positiva. Allora esiste un'unica matrice P simmetrica e semidefinita positiva tale che $P^2 = A$.*

Dimostrazione. Per il teorema spettrale non è restrittivo supporre A diagonale. Gli elementi sulla diagonale di A sono non negativi e dunque esiste una unica matrice diagonale P semidefinita positiva tale che $P^2 = A$. Resta da dimostrare che se R è una matrice simmetrica semidefinita positiva e R^2 è diagonale, allora anche R è diagonale. Siano $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_s \geq 0$ gli autovalori di R, per ogni λ_i vale

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid Rv = \lambda_i v\} \subset \{v \in \mathbb{R}^n \mid R^2 v = \lambda_i^2 v\}.$$

Siccome R è diagonalizzabile, ne segue che $\mathbb{R}^n$ è la somma diretta degli autospazi di R

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} \{v \in \mathbb{R}^n \mid Rv = \lambda_i v\}.$$

Dunque

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid Rv = \lambda_i v\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid R^2 v = \lambda_i^2 v\}$$

per ogni i e dunque ogni autospazio è generato da vettori della base canonica, ossia R è diagonale. $\square$

Corollario 2.2 (Decomposizione polare)**.** *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile. Allora esistono e sono uniche una matrice ortogonale E ed una matrice simmetrica definita positiva tali che $EP = A$.*

Dimostrazione. Vediamo prima l'unicità. Se $A = EP = FR$, con E, F ortogonali e P, R simmetriche definite positive, allora

$$A^T A = (EP)^T (EP) = P^T E^T E P = P^T P = P^2.$$

Similmente $A^T A = R^2$ e per l'unicità della radice quadrata $P = R$; di conseguenza $F = AR^{-1} = AP^{-1} = E$.

Mostriamo adesso l'esistenza: siccome A è invertibile, la matrice $A^T A$ è simmetrica e definita positiva. Esiste dunque P come nell'enunciato tale che $P^2 = P^T P = A^T A$. Resta da dimostrare che $E = AP^{-1}$ è ortogonale.

$$E^T E = (P^{-1})^T A^T A P^{-1} = (P^{-1})^T P^T P P^{-1} = (PP^{-1})^T P P^{-1} = I.$$

$\square$