Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Matematica

# "Campi di vettori e teorema di Frobenius"

Relatore
Prof. Marco Manetti

Laureanda
Elena Collina

anno accademico 2005-2006

# Indice


**Introduzione** **2**

**1 Varietà differenziabili** **5**
1.1 Varietà . . . . . 5
1.2 Applicazioni e funzioni lisce . . . . . 7
1.3 Germi . . . . . 9
1.4 Spazio tangente di $\mathbb{R}^n$ . . . . . 9
1.5 Spazio tangente di una varietà . . . . . 11
1.6 Fibrato tangente . . . . . 11
1.7 Applicazioni tangenti . . . . . 12

**2 Sottovarietà** **14**
2.1 Definizioni e richiami di teoremi . . . . . 14
2.2 Submersioni e Immersioni . . . . . 15
2.3 Prodotti . . . . . 16
2.4 Valori regolari . . . . . 17
2.5 Sottovarietà immerse . . . . . 18
2.6 Sottovarietà iniziali . . . . . 18
2.7 Applicazioni trasverse . . . . . 20

**3 Campi di vettori** **21**
3.1 Campi di vettori su una varietà . . . . . 21
3.2 La parentesi di Lie . . . . . 23
3.3 L'Algebra di Lie dei campi di vettori su una varietà . . . . . 26
3.4 Curve integrali . . . . . 27
3.5 Il flusso di un campo di vettori . . . . . 28
3.6 Campi di vettori $f$-correlati . . . . . 30
3.7 Le derivate di Lie di funzioni . . . . . 31
3.8 La derivata di Lie per campi di vettori . . . . . 32

**4 Teoremi di Ehresmann e Frobenius** **38**
4.1 Il teorema di Ehresmann . . . . . 38
4.2 Il teorema di Frobenius . . . . . 41

**Bibliografia** **44**

# Introduzione

*Le mathématicien est engagé*
*dans la poursuite d'un rêve sans fin,*
*comprendre la structure de toute chose.*
**Charles Ehresmann**

Lo scopo di questo lavoro è quello di illustrare due teoremi classici di topologia differenziale: il teorema di Ehresmann e il teorema di Frobenius.

Nel primo capitolo presentiamo alcune nozioni fondamentali: varietà, applicazioni lisce, spazi tangenti, applicazioni tangenti; dimostriamo due lemmi sulle partizioni dell'unità, e facciamo vedere che lo spazio tangente in $x \in M$ coincide con lo spazio delle derivate delle curve di M per il punto.

Apriamo il secondo capitolo introducendo il concetto di sottovarietà; definiamo immersioni e submersioni, e studiamo le prime proprietà delle sottovarietà immerse ed iniziali. Per fare questo, richiamiamo il Teorema della funzione implicita, il Teorema della funzione inversa e il Teorema del rango costante.

Il terzo capitolo riguarda i campi di vettori: apriamo con una serie di esempi, poi introduciamo la parentesi di Lie, e a partire da essa presentiamo la Derivata di Lie; definiamo le curve integrali e di seguito il flusso di un campo di vettori: si tratta degli strumenti che useremo nel quarto capitolo nel quale dimostriamo i due Teoremi in esame, ai quali di seguito accenniamo.

Il Teorema del rango costante afferma che, localmente, un'applicazione il cui differenziale è surgettivo si comporta come una proiezione

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \{0\} \cong \mathbb{R}^m;$$

il seguente teorema dà una generalizzazione di questo risultato, che si ottiene incollando tramite i flussi e le partizioni dell'unità.

**Teorema**(Ehresmann) *Siano $M$ una varietà differenziabile di dimensione $n$, $B$ un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $\omega\colon M \to B$ un'applicazione propria e $C^\infty$ il cui differenziale è surgettivo in ogni punto. Allora per ogni $p \in B$ esistono un aperto $U \ni P$, $\overline{U} \subseteq B$ e un diffeomorfismo $\psi$ che rende commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{tikzcd}
U \times \omega^{-1}(0) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \omega^{-1}(U) \arrow[dl, "\omega"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Chiaramente il risultato è valido anche nell'ipotesi che $M$ sia compatta: allora, infatti $\omega$ deve necessariamente essere propria, perché va da un compatto in un Hausdorff, come segue dalla topologia generale.

Un importante corollario di questo teorema afferma che, se l'aperto $B \subset \mathbb{R}^m$ è connesso, allora le fibre dell'applicazione sono tutte diffeomorfe.

I concetti di campi di vettori e flussi su una varietà possono essere usati anche per dare un trattamento indipendente dalle coordinate di alcune equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine: è il risultato del Teorema di Frobenius; esso è utile per questioni locali su $\mathbb{R}^m$, ed è indisponsabile in molte questioni globali.

Consideriamo, ad esempio, il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = g(x,y,z) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z) \end{cases}$$

definito su un sottoinsieme aperto $W \subset \mathbb{R}^3$; fissato $(a,b,c) \in W$, una soluzione determinata da esso, se esiste, sarà una funzione $z = f(x,y)$ tale che $c = f(a,b)$, $f_x(x,y) \equiv g(x,y,f(x,y))$e $f_y(x,y) \equiv h(x,y,f(x,y))$.

Geometricamente, una soluzione può essere pensata come una superficie passante per $(a,b,c)$ il cui piano tangente ha come base, in ogni punto, i vettori

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z},\ Y = \frac{\partial}{\partial y} + h(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

infatti, essi sono ortogonali al vettore

$$N = f_x\frac{\partial}{\partial x} + f_y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$$

che è il vettore normale in ogni punto alla superficie z=$f(x,y)$ data sopra. E' chiaro che, per campi di vettori arbitrari, anche se della forma data sopra, non è detto che ci sia una soluzione.

Nel caso in cui una soluzione esiste in ogni punto di $W$, allora $X$ e $Y$ si possono scrivere anche come

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + f_x(x,y)\frac{\partial}{\partial z},\ Y = \frac{\partial}{\partial y} + f_y(x,y)\frac{\partial}{\partial z}$$

e di conseguenza

$$[X,Y] := XY(f) - YX(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Pertanto, data una coppia di campi di vettori indipendenti su $W$, questa è una condizione necessaria per determinare la superficie di cui essi individuano il piano tangente. Si tratta della condizione geometrica dell'involutività, che è allora equivalente alla condizione analitica dell'indipendenza dall'ordine di differenziazione delle derivate seconde.

Il Teorema di Frobenius afferma che la condizione di involutività non è solo necessaria, ma è anche sufficiente per l'integrabilità dei campi di vettori.

**Teorema**(Frobenius) *Sia assegnata una* distribuzione*, cioè una collezione di sottospazi $k$-dimensionali $D_p$ di $T_pM$ in ogni punto $p$ di una varietà $M$, che variano da un punto all'altro con trasformazioni $C^\infty$: condizione necessaria e sufficiente affinché esista una sottovarietà $k$-dimensionale $N$, detta* varietà integrale *della distribuzione, il cui spazio tangente $T_pN$ in ogni punto coincide con il sottospazio dato, è l'involutività: cioè dati due campi di vettori $X, Y \in D_p$ anche $[X, Y] \in D_p$.*

# Capitolo 1

# Varietà differenziabili

## 1.1 Varietà

**Definizione 1.1.1.** Una *varietà topologica* $M$ di dimensione n, è uno spazio topologico con le seguenti proprietà:

- è di Hausdorff;
- è localmente euclideo di dimensione $n$;
- ha una base numerabile di aperti.

Poiché $M$ è localmente euclideo, per ogni $x \in M$ esiste un omeomorfismo $u \colon U \to u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, dove $U$ è un intorno aperto di $x \in M$ e $u(U)$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

**Definizione 1.1.2.** La coppia $(U, u)$ è detta una *carta* su $M$. Una famiglia $(U_\alpha, u_\alpha)_{a\in A}$ di carte su $M$, tale che $U_\alpha$ forma un ricoprimento di $M$, è detta *atlante*.

**Definizione 1.1.3.** Le applicazioni

$$u_{\alpha\beta} := u_\alpha \circ u_\beta^{-1} \colon u_\beta(U_{\alpha\beta}) \to u_\alpha(U_{\alpha\beta})$$

sono dette *cambiamenti di carta* per gli atlanti $(U_\alpha)$, dove $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$.

**Definizione 1.1.4.** Un atlante $(U_\alpha, u_\alpha)_{\alpha\in A}$ per una varietà $M$ è detto un $C^k - atlante$, se tutti i cambiamenti di carte $u_{\alpha\beta} \colon u_\beta(U_{\alpha\beta}) \to\ u_\alpha(U_{\alpha\beta})$ sono differenziabili di classe $C^k$.

**Definizione 1.1.5.** Due $C^k$-atlanti si dicono $C^k - equivalenti$ se la loro unione è ancora un $C^k - atlante$ per $M$.

**Definizione 1.1.6.** Una classe di equivalenza di $C^k$-atlanti si dice $C^k$-struttura su $M$.

**Definizione 1.1.7.** Per varietà differenziabile di classe $C^k$ intendiamo una varietà topologica con una struttura $C^k$, e una carta su M sarà una carta in riferimento a qualche atlante della struttura.

Generalmente, supporremo che una varietà sia sempre di tipo $\mathbb{C}^\infty$, e *liscia* sarà usato come sinonimo di $\mathbb{C}^\infty$: precisamente vorrà dire di Hausdorff, separabile e di dimensione finita.

**Esempio 1.1.8. Gli aperti $M \subseteq \mathbb{R}^n$ con la topologia di sottospazio sono *varietà topologiche*.**

Infatti $M$ è di Hausdorff e ha una base numerabile di aperti perché è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e tali proprietà sono ereditarie. Inoltre $M$ è localmente euclideo di dim n: basta considerare come omeomorfismo locale l'applicazione identica in $M$.

Nel piano e nello spazio euclideo si possono immaginare aperti anche abbastanza complicati e certamente non equivalenti, in generale, a uno spazio euclideo. Sono equivalenti ad esso solo in casi particolari, ad esempio quando M= $\mathbb{E}^n$.

**Esempio 1.1.9. Circonferenza e Sfera**

Esse non sono omeomorfe a sottoinsiemi aperti dello spazio Euclideo, quindi non possiamo sfruttare il risultato precedente.

Le definiamo, rispettivamente, come

$$S^1 := x \in \mathbb{E}^2 \ : \ \|x\| = 1$$

$$S^2 := x \in \mathbb{E}^3 \ : \ \|x\| = 1$$

Anche in questo caso, con la topologia di sottospazio, esse sono di Hausdorff e a base numerabile; sono anche localmente euclidee:

consideriamo un punto $P \in S^2$, e il vettore normale a $S^2$ in quel punto, $N_p$; certamente ci sarà un asse coordinato ad esso non ortogonale, sia esso $x_2$: allora un intorno U di $P$ sarà proiettato sul piano $x_1x_3$ tramite l'applicazione

$$\varphi(q) = \varphi(x_1(q), x_2(q), x_3(q)) = (x_1(q),\, 0, x_3(q)),\ per\, q \in U$$

Analogamente si dimostra anche che $S^1$ è localmente euclideo.

Notiamo che $S^2$ e $\mathbb{R}^2$ non sono globalmente omeomorfi perché $S^2$ è compatto e $\mathbb{R}^2$ non lo è.

**Esempio 1.1.10. Ancora sfere**

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^{n+1}$, fornito del prodotto scalare standard

$$< x, y >= \sum x^i y^j.$$

La sfera $S^n$ si può definire come il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : < x, x >= 1\}$. Dal momento che la funzione

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) =< x, x >$$

soddisfa $df(x)y = 2 < x, y >$, essa è di rango 1 fuori dal punto 0 e vedremo che $S^n$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$.

Il cosidetto *atlante stereografico* è un atlante esplicito per $S^n$. Fissiamo un punto $a \in S^n$, che chiameremo polo sud.

Siano

$U_+ := S^n \backslash \{a\}, \qquad u_+ : U_+ \to \ \{a\}^\perp, \quad u_+(x) = \frac{x - <x,a> a}{1 - <x,a>},$

$U_- := S^n \backslash \{-a\}, \quad u_- : U_- \to \ \{a\}^\perp, \quad u_-(x) = \frac{x - <x,a>}{1 + <x,a>}.$

Si vede facilmente che $u_+$ è l'usuale proiezione stereografica.

Otteniamo anche

$$u_+^{-1}(y) = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\, a + \frac{2}{|y|^2 + 1}\, y, per\, y \in \{a\}^\perp \backslash \{0\},$$

e il cambiamento di carte

$$(u_- \circ u_+^{-1})(y) = \frac{y}{|y|^2}$$

.

## 1.2 Applicazioni e funzioni lisce

**Definizione 1.2.1.** Un'applicazione $f : M \to N$ tra varietà si dice $\mathbb{C}^\infty$ se, per ogni $x \in M$, presa una carta $(V, v)$ su N, con $f(x) \in V$, esiste una carta $(U, u)$ su M, con $x \in U$, $f(U) \subseteq V$, e $v \circ f \circ u^{-1}$ è $\mathbb{C}^\infty$.

Indicheremo con $C^\infty(M, N)$ lo spazio di tutte le applicazioni $C^\infty$ da M in N.

Un'applicazione $C^\infty$ $f : M \to N$ è detto un *diffeomorfismo* $C^\infty$ se $f^{-1} : N \to M$ esiste ed è anche $C^\infty$. Due varietà si dicono *diffeomorfe* se esiste un diffeomorfismo tra di esse.

**Definizione 1.2.2.** Un'applicazione $F : M \to N$ tra varietà della stessa dimensione si dice *diffeomorfismo locale* se ogni $x \in M$ ha un intorno aperto $U$ tale che $f|_U : U \to f(U) \subseteq N$ è un diffeomorfismo.

Notiamo che un diffeomorfismo locale non deve necessariamente essere surgettivo.

Indicheremo con $C^\infty(M)$ l'insieme delle funzioni di una varietà M a valori reali: essa sarà un'algebra reale commutativa.

**Definizione 1.2.3.** Il *supporto* di una funzione liscia $f$ è la chiusura dell'insieme su cui assume valori diversi dallo zero:

$$supp(f) := \overline{\{x \in M : \ f(x) \neq 0\}}.$$

L'*insieme degli zeri* di f è l'insieme dove f svanisce:

$$Z(f) := \{x \in M : \ f(x) = 0\}.$$

**Definizione 1.2.4.** Sia $M$ una varietà, e sia $(U_\alpha, u_\alpha)$ un suo ricoprimento aperto. Una *partizione liscia dell'unità* è una famiglia $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ di funzioni liscie su M tali che

- $\varphi_\alpha \geq 0$ per ogni $x \in M$ e ogni $\alpha \in A$;
- $supp(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$;

- $(supp(\varphi_\alpha))_{\alpha \in A}$ è una famiglia localmente finita (tale che ogni $x \in M$ ha un intorno aperto che interseca solo un numero finito di $supp(\varphi_\alpha)$);
- $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ (localmente, questa è una somma finita).

**Teorema 1.2.5.** *Ogni varietà separabile e metrizzabile ammette partizioni lisce dell'unità.*

*Dimostrazione.* Sia $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ il ricoprimento aperto dato dal lemma. Fissiamo ora $\alpha$ e sia $x \in U_\alpha$. Scegliamo una carta $(U, u)$ centrata in $x$ (cioè tale che $u(x) = 0$) e fissiamo un $\varepsilon > 0$ tali che $\varepsilon \mathbb{D}^n \subset u(U \cap U_\alpha)$, dove $\mathbb{D}^n = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y| \leq 1\}$ è la palla unitaria chiusa. Definiamo la seguente funzione liscia a volori in $\mathbb{R}$:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Allora

$$f_{\alpha,x}(z) = \begin{cases} h(\varepsilon^2 - |u(z)|^2 & \text{per } z \in U \\ 0 & \text{per } z \notin U \end{cases}$$

è una funzione liscia non negativa su $M$, con supporto contenuto in $U_\alpha$, che è positiva in $x$.

Scegliamo una funzione $f_{\alpha,x}$ per ogni $\alpha$ e $x \in U_\alpha$.

Le parti interne dei supporti di queste funzioni lisce formano un ricoprimento aperto di M che raffina $(U_\alpha)$, così c'è un ricoprimento numerabile con corrispondenti funzioni $f_1, f_2, \ldots$. Definiamo

$$W_n = \left\{ x \in M \colon f_n(x) > 0 \text{ e } f_i(x) < \frac{1}{n} \text{ per } 1 \leq i \leq n \right\}$$

e denotiamo con $\overline{W_n}$ la chiusura.

$(W_n)_n$ è un ricoprimento aperto di M: proviamo che $(\overline{W_n})_n$ è localmente finito.

Sia $x \in M$, e sia $n$ il minimo indice per cui $x \in W_n$. Sia

$$V := \left\{ y \in M \colon f_n(y) > \frac{f_n(x)}{2} \right\}$$

Se $y \in V \cap \overline{W_n}$, allora abbiamo $f_n(y) > \frac{f_n(x)}{2}$, e $f_i(y) \leq \frac{1}{k}$ per $1 \leq i < k$, cosa possibile solo per un numero finito di $k$.

Consideriamo per ogni $n$ la funzione liscia non negativa

$$g_n(x) = h\left(f_n(x)\right) h\left(\frac{1}{n} - f_1(x)\right) \ldots h\left(\frac{1}{n} - f_{n-1}(x)\right)$$

Ovviamente $supp(g_n) = \overline{W_n}$. Allora $g := \sum_n g_n$ è liscia, dal momento che localmente è una somma finita, e positiva ovunque; perciò $(\frac{g_n}{g})_{n \in \mathbb{N}}$ è una partizione liscia dell'unità su $M$. Al variare di n, ogni $supp(g_n) = \overline{W_n}$ è contenuto in qualche $U_{\alpha(n)}$, dove $\{U_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è il ricoprimento numerabile; quindi possiamo porre

$$\varphi_\alpha = \sum_{n \colon \alpha(n) = \alpha} \frac{g_n}{g}$$

per ottenere la partizione richiesta dell'unità, che è subordinata a $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

$\square$

## 1.3 Germi

**Definizione 1.3.1.** Siano $M$ e $N$ due varietà differenziabili, e sia $x \in M$. Consideriamo tutte le applicazioni lisce $f\colon U_f \to N$, dove $U_f$ è un qualche intorno aperto di $x$ in $M$, e poniamo $f \overset{x}{\sim} g$ se esiste un intorno aperto $V$ di $x$ in cui $f|_V = g|_V$; questa è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle applicazioni considerate: la classe d'equivalenza si dice *germe di f in x*, a volte indicato come $germ_x f$. L'insieme di tutti i germi si indica come $C_x^\infty(M,N)$.

Notiamo che, per un germe in $x$ di una applicazione liscia, è definito solo il valore nel punto. Possiamo anche considerare la composizione di germi:

$$germ_{f(x)} g \circ germ_x f = germ_x(f \circ g).$$

Se $N = \mathbb{R}$, possiamo sommare e moltiplicare germi di funzioni lisce, così otteniamo l'algebra reale commutativa $C_x^\infty(M,N)$ dei germi delle funzioni lisce in $x$.

**Proposizione 1.3.2.** *Ogni germe di una funzione liscia ha un rappresentante che è definito su tutta $M$.*

*Dimostrazione.* Sia $p$ un punto della varietà $M$, sia $U \ni p$ un aperto, e sia $(f,U)$ un rappresentante di $germ_p f$. Vogliamo far vedere che esiste un'altra funzione $g \in germ_p f$ che è definita su tutta $M$.

Consideriamo il ricoprimento di $M$ costituito da $U$ e $M - \{p\}$. Allora esiste una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento, cioé esistono due applicazioni $C^\infty$ $\varphi_1, \varphi_2 \colon M \to [0,1]$ tali che $supp(\varphi_1) \subset U$, e $supp(\varphi_2) \subset M - \{p\}$, con $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$.

Definiamo l'aperto $W := M/\,supp(\varphi_2)$: osserviamo che $p \in W$, e che $\varphi_1|_W = 1$. Allora la funzione $\overline{g} := f \cdot \varphi_1 \colon U \to \mathbb{R}$ è ben definita, e $\overline{g}|_W = f|_W$. Inoltre, $supp(\overline{g}) \subset supp(\varphi_1) \subset U$, perché $\overline{g}$ è non nulla solo nei punti in cui sia $f$ che $\varphi_1$ sono non nulle. Allora possiamo estendere $\overline{g}$ a 0 fuori da U, ponendo

$$g(x) = \begin{cases} \overline{g}(x) & \text{per } x \in U; \\ 0 & \text{per } x \in M - supp(g). \end{cases}$$

Così g è il rappresentante cercato del germe. $\square$

## 1.4 Spazio tangente di $\mathbb{R}^n$

**Definizione 1.4.1.** Sia $a \in \mathbb{R}^n$. Un *vettore tangente* con punto base $a$ è una coppia $(a, X)$ con $X \in \mathbb{R}^n$, indicata anche con $X_a$. Esso induce una *derivazione*

$$X_a \colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \text{ come } X_a(f) = df(a)(X_a) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_a.$$

Il valore dipende solo dal germe di $f$ in $a$, e abbiamo la proprietà di derivazione:

$$X_a(f \cdot g) = X_a(f) \cdot g(a) + f(a) \cdot X_a(g).$$

L'insieme dei vettori tangenti in $a$ a $\mathbb{R}^n$ si dice *spazio tangente.*

Vale anche il viceversa.

**Proposizione 1.4.2.** *Se $D\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è lineare e soddisfa*

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(a) + f(a) \cdot D(g)$$

*cioè se è una derivazione di a, allora $D$ è dato dall'azione di un vettore tangente con punto base $a$.*

*Dimostrazione.* Per $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(a + t(x-a))dt = \\ = f(a) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^i}(a + t(x-a))dt(x^i - a^i) = \\ = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i(x)(x^i - a^i). \end{aligned}$$

Per le proprietà di $D$, vale

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1), \text{ pertanto } D(\text{costante}) = 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} D(f) = D(f(a)) + \sum_{i=1}^n h_i(x)(x^i - a^i)) = \\ = 0 + \sum_{i=1}^n D(h_i(x)(x^i - a^i)) + h_i(a)D(x^i - a^i)) = \\ = \sum_{i=1}^n h_i(a)(D(x^i) - D(a^i)) = \\ = \sum_{i=1}^n h^i(a)D(x^i) = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)D(x^i), \end{aligned}$$

dove $x^i$ è la i-esima funzione coordinata su $\mathbb{R}^n$. Così abbiamo

$$\begin{aligned} D(f) = \sum_{i=1}^n D(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}|_a(f) \\ D = \sum_{i=1}^n D(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}|_a. \end{aligned}$$

Perciò $D$ è indotto dal vettore tangente $(a, \sum_{i=1}^n D(x^i)e_i)$, dove $(e_i)$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$. $\square$

## 1.5 Spazio tangente di una varietà

Sia $M$ una varietà e sia $x \in M$, e $dimM = n$. Sia $T_xM$ lo spazio vettoriale di tutte le derivate in $x$ di $C_x^\infty(M,\mathbb{R})$, l'algebra dai germi delle funzioni lisce su $M$ in $x$.

Allora $T_xM$ consiste in tutte le applicazioni lineari $X_x\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, con la proprietà $X_x(f \cdot g) = X_x(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot X_x(g)$.

**Definizione 1.5.1.** Lo spazio $T_xM$ è detto lo *spazio tangente a $M$ in $x$.*

Se $(U, u)$ è una carta su $M$, con $x \in U$, allora $u^*\colon f \mapsto f \circ u$ induce un isomorfismo di algebre $C_u^\infty(x)(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \cong C_x^\infty(M,\mathbb{R})$ e perciò anche un isomorfismo $T_xu\colon T_xM \to T_{u(x)}\mathbb{R}^n$, dato da $(T_xu \cdot X_x)(f) = X_x(f \circ u)$. Così $T_xM$ è uno spazio vettoriale n-dimensionale.

Useremo la seguente notazione: $u = (u^1, \cdots, u^n)$, così $u^i$ denota la i-esima funzione coordinata su $U$, e

$$\frac{\partial}{\partial u^i}|_u := (T_xu)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{u(x)}\right) = (T_xu)^{-1}(u(x), e_i).$$

Così $\frac{\partial}{\partial u^i}|_x \in T_xM$ è la derivazione data da

$$\frac{\partial}{\partial u^i}|_x(f) = \frac{f \circ u^{-1}}{\partial x^i}(u(x)).$$

Da 1.4.2 ora abbiamo

$$T_xu \cdot X_x = \sum_{i=1}^n (T_xu \cdot X_x)(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{u(x)} =$$

$$= \sum_{i=1}^n X_x(x^i \circ u)\frac{\partial}{\partial x_i}|_{u(x)} = \sum_{i=1}^n X_x(u^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{u(x)}.$$

$$X_x = (T_xu)^{-1} \cdot T_xu \cdot X_x = \sum_{i=1}^n X_x(u^i)\frac{\partial}{\partial u^i}|_x.$$

## 1.6 Fibrato tangente

**Definizione 1.6.1.** Per una varietà $M$ di dimensione $n$ definiamo $TM := \bigsqcup_{x\in M} T_xM$, l'*unione disgiunta* di tutti gli spazi tangenti.

Questa è una famiglia di spazi vettoriali parametrizzati da $M$, con proiezione $\pi_M\colon TM \to M$ data da $\pi_M(T_xM) = x$.

Per ogni carta $(U_\alpha, u_\alpha)$ di $M$ consideriamo la carta $(\pi_M^{-1}(U_\alpha), Tu_\alpha)$ su $TM$, dove

$$Tu_\alpha : \pi_M^{-1}(U_\alpha) \to u_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$$

è dato da

$$Tu_\alpha \cdot X = (u_\alpha(\pi_M(X)), T_{\pi_M(X)}u_\alpha \cdot X).$$

Allora i cambiamenti di carte appaiono come segue:

$$\begin{aligned} Tu_\beta \circ (Tu_\alpha)^{-1} \colon Tu_\alpha(\pi_M^{-1}(U_{\alpha\beta})) = u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n \to \\ \to u_\beta(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n = Tu_\beta(\pi_M^{-1}(U_{\alpha\beta})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((Tu_\beta \circ (Tu_\alpha)^{-1})(y,Y))(f) = ((Tu_\alpha)^{-1}(y,Y))(f \circ u_\beta) = \\ = (y,Y)(f \circ u_\beta \circ u_\alpha^{-1}) = d(f \circ u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(y) \cdot Y = \\ = (u_\beta \circ u_\alpha^{-1}(y), d(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(y) \cdot Y)(f). \end{aligned}$$

Quindi i cambiamenti di carte sono lisci. Scegliamo una topologia su $TM$ in modo che tutti i $Tu_\alpha$ diventino omeomorfismi. Questa è una topologia di Hausdorff, dal momento che $X, Y \in TM$ possono essere separati in $M$ se $\pi(X) \neq \pi(Y)$, e in una carta se $\pi(X) = \pi(Y)$. Così $TM$ è anch'essa una varietà in modo canonico: la tripletta $(TM, \pi_M, M)$ è detta il *fibrato tangente* di $M$.

## 1.7 Applicazioni tangenti

Sia $f \colon M \to N$ un'applicazione liscia tra varietà.

Allora $f$ induce un'applicazione lineare $T_xM \to T_{f(x)}N$, per ogni $x \in M$, tramite

$$\begin{aligned} (T_xf \cdot X_x)(h) = X_x(h \circ f) \\ \text{per } h \in C_x^\infty(M, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Questa applicazione è ben definita e lineare, dal momento che $f^* \colon C^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R}) \to C_x^\infty(M, \mathbb{R})$, data da $h \mapsto h \circ f$, è lineare ed è un omomorfismo di algebre, e $T_xf$ è il suo aggiunto, ristretto al sottospazio delle derivazioni.

Se $(U, u)$ è una carta tale che $x \in U$, e $(V, v)$ è un'altra carta tale che $f(x) \in V$, allora

$$\begin{aligned} \left(T_xf \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}|_x\right)(v^j) = \frac{\partial}{\partial u^i}|_x(v^j \circ f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(v^j \circ f \circ u^{-1})(u(x)), \\ T_xf \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}|_x = \sum_j \left(T_xf \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}|_x\right)(v^j)\frac{\partial}{\partial v^j}|_{f(x)} \text{ per 1.5.1} = \\ = \sum_j \frac{\partial(v^j \circ f \circ u^{-1})}{\partial x^i}(u(x))\frac{\partial}{\partial v^j}|_{f(x)}. \end{aligned}$$

In questo modo, la matrice di $T_xf \colon T_xM \to T_{f(x)}N$, nelle basi $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}|_x\right)$ e $\left(\frac{\partial}{\partial v^j}|_{f(x)}\right)$, è semplicemente la matrice Jacobiana

$$d(v \circ f \circ u^{-1})(u(x))$$

dell'applicazione $v \circ f \circ u^{-1}$ in $u(x)$: così $T_{f(x)}v \circ T_xf \circ (T_xu)^{-1} = d(v \circ f \circ u^{-1})(u(x))$.

Indichiamo con $Tf \colon TM \to TN$ l'applicazione totale, data da $Tf|_{T_xM} := T_xf$. Allora la composizione

$$Tv \circ Tf \circ (Tu)^{-1} \colon u(U) \times \mathbb{R}^m \to v(V) \times \mathbb{R}^n$$

è data da

$$(y, Y) \mapsto ((v \circ f \circ u^{-1})(y),\, d(v \circ f \circ u^{-1})(y)Y),$$

e quindi $Tf\colon TM \to TN$ è di nuovo liscia.
Se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ sono applicazioni lisce, allora $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$. Questa è una conseguenza diretta di $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, ed è la versione globale della *regola di composizione*. Inoltre abbiamo $T(Id_M) = Id_{TM}$.
Se $f \in C^\infty(M)$, allora $Tf\colon TM \to T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**Definizione 1.7.1.** Definiamo il *differenziale* di $f$ come

$$df := pr_2 \circ Tf\colon TM \to \mathbb{R}.$$

Indicata con $t$ la funzione identità su $\mathbb{R}$, allora $(Tf \cdot X_x)(t) = X_x(t \circ f) = X_x(f)$, così $df(X_x) = X_x(f)$.

# Capitolo 2

# Sottovarietà

## 2.1 Definizioni e richiami di teoremi

**Definizione 2.1.1.** Un sottoinsieme $N$ di una varietà $M$ si dice una *sottovarietà* se, per ogni $x \in N$ esiste una carta $(U, u)$ di M tale che

$$u(U \cap N) = u(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0),$$

dove $\mathbb{R}^k \times 0 \hookrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$.

Allora, chiaramente, $N$ è essa stessa una varietà che ha per carte $(U \cap N, u|_{U\cap N})$, al variare di $(U, u)$ tra le carte di un atlante di $M$.

**Teorema 2.1.2** (Teorema della funzione implicita)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile con continuità. Indichiamo le coordinate su $\mathbb{R}^{n+m}$ come $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, e fissiamo un punto $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) := (a, b)$. Se la matrice*

$$\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)(a, b)\right]_{1\leq i,j\leq m}$$

*è invertibile, allora esistono gli aperti $U \ni (a_1, \ldots, a_n)$ e $V \ni (b_1, \ldots, b_m)$ e una funzione differenziabile $g\colon U \to V$ tali che*

$$\{(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n))\} =$$
$$= \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)|f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0\} \subset (U \times V)$$

**Definizione 2.1.3.** Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ un'applicazione liscia. Un punto $x \in \mathbb{R}^q$ si dice un *valore regolare* di $f$ se il rango di $f$, o più precisamente il rango della sua derivazione, è $q$ in ogni punto $y$ di $f^{-1}(x)$.

**Proposizione 2.1.4.** *Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ un'applicazione liscia.Se $x \in \mathbb{R}^q$ è un valore regolare per f, allora $f^{-1}(x)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-q$ o vuota.*

*Dimostrazione.* Questa è una conseguenza immediata del teorema della funzione implicita. Permutiamo le coordinate $(x^1, \ldots, x^n)$ su $\mathbb{R}^n$ in modo che la matrice di Jacobi

$$df(y) = \left(\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(y)\right)^{1\leq i\leq q}_{1\leq j\leq q} \mid \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(y)\right)^{1\leq i\leq q}_{q+1\leq j\leq n}\right)$$

abbia la parte sinistra invertibile. Allora $u := (f, pr_{n-q})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ ha il differenziale invertibile in $y$, così $(U, u)$ è una carta per ogni $y \in f^{-1}(0)$, e abbiamo $f \circ u^{-1}(z^1, \dots z^n) = (z^1, \dots, z^q)$, così $u(f^{-1}(0)) = u(U) \cap (0 \times \mathbb{R}^{n-q})$ come richiesto. $\square$

Ora enunciamo un altro importante teorema.

**Teorema 2.1.5** (Teorema della funzione inversa)**.** *Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile. Se la derivazione di $F$*

$$(DF)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$$

*è un isomorfismo lineare in un punto $p \in M$, allora esiste un intorno $U \ni p$ tale che*

$$f|_U\colon U \to F(U)$$

*è un diffeomorfismo.*

Osserviamo che, nel caso del teorema precedente, $M$ e $N$ devono avere la stessa dimensione.

**Teorema 2.1.6** (Teorema del rango costante)**.** *Sia $f\colon W \to \mathbb{R}^q$ un'applicazione liscia, dove $W$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Se la derivazione $Df(x)$ ha rango costante $k$ per ogni $x \in W$, allora per ogni $a \in W$ esistono le carte $(U, u)$ di $W$ centrata in $a$ e $(V, v)$ di $\mathbb{R}^q$ centrata in $f(a)$ tali che $v \circ f \circ u^{-1}\colon u(U) \to v(V)$ ha la forma seguente:*

$$(x_1, \dots x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

*Così $f^{-1}(b)$ è una sottovarietà di $W$ di dimensione $n-k$ per ogni $b \in f(W)$.*

**Corollario 2.1.7.** *Sia $f\colon M \to N$ una funzione $C^\infty$ , con $T_xf$ di rango costante $k$ per ogni $x \in M$. Allora per ogni $b \in f(M)$ l'insieme $f^{-1}(b) \subset M$ è una sottovarietà di $M$ di dimensione $dimM - k$.*

## 2.2 Submersioni e Immersioni

**Definizione 2.2.1.** Un'applicazione $f\colon M \to N$ tra varietà si dice *submersione in $x \in M$* se il rango di $T_xf\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ è uguale a $dimN$. Dal momento che il rango non può annullarsi localmente (il determinante di una sottomatrice dello Jacobiano è non nullo) $f$ è allora una submersione in un intorno pieno di $x$. L'applicazione $f$ si dice *submersione* se è una submersione in ogni $x \in M$.

**Lemma 2.2.2.** *Se $f\colon M \to N$ è una submersione in $x \in M$, allora per ogni carta (V,v), centrata in $f(x)$ su N, esiste una carta $(U, u)$ centrata in $x$ su $M$ tale che*

$$v \circ f \circ u^{-1}(y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^m) = (y^1, \dots, y^n)$$

*Dimostrazione.* Bisogna usare una volta il torema della funzione inversa: applicare l'argomento all'inizio di 2.1.4 a $v \circ f \circ u_1^{-1}$ per qualche carta $(U_1, u_1)$ centrata in $x$. $\square$

**Corollario 2.2.3.** *Ogni submersione $f\colon M \to N$ è aperta: per ogni aperto $U \subset M$, l'insieme $f(U)$ è aperto in N.*

**Definizione 2.2.4.** La tripletta $(M, p, N)$, dove $p \colon M \to N$ è una submersione surgettiva, si dice una *varietà fibrata*. $M$ si dice lo *spazio totale*, $N$ si dice *base*.

Una varietà fibrata ammette *sezioni locali*: *Per ogni $x \in M$ esistono un intorno aperto $U$ di $p(x)$ in $N$ e un'applicazione liscia $s \colon U \to M$, con $p \circ s = Id_U$ e $s(p(x)) = x$.*

L'esistenza delle sezioni locali implica la seguente *proprietà universale*:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f \circ p"] & \\ N \arrow[r, "f"] & P \end{tikzcd}$$

Se $(M, p, N)$ è una *varietà fibrata* e $f \colon N \to P$ è un'applicazione verso qualche altra varietà, tale che $f \circ p \colon M \to P$ è liscia, allora $f$ è liscia.

**Definizione 2.2.5.** Un'applicazione liscia $f \colon M \to N$ si dice un'*immersione in* $x \in M$ se il rango di $T_x f \colon T_x M \to T_{f(x)} N$ è uguale a $dim M$. Dal momento che il rango è massimale in $x$ e non può annullarsi localmente, $f$ è un'immersione su un intorno pieno di $x$. Se ciò vale per ogni $x \in M$, $f$ si dice un'*immersione.*

**Lemma 2.2.6.** *Se $f \colon M \to N$ è un'immersione, allora per ogni carta $(U, u)$ centrata in $x \in M$ esiste una carta $(V, v)$ centrata in $f(x)$ su $N$ tale che*

$$v \circ f \circ u^{-1}(y^1, \dots, y^m) = (y^1, \dots, y^m, 0, \dots, 0).$$

*Dimostrazione.* Basta applicare il teorema della funzione inversa. □

**Corollario 2.2.7.** *Se $f \colon M \to N$ è un'immersione, allora per ogni $x \in M$ esiste un intorno aperto $U$ di $x \in M$ tale che $f(U)$ è una sottovarietà di $N$ e $f|_U \colon U \to f(U)$ è un diffeomorfismo.*

**Corollario 2.2.8.** *Se un'immersione iniettiva $i \colon M \to N$ è un'omeomorfismo sulla sua immagine, allora $i(M)$ è una sottovarietà di $N$.*

*Dimostrazione.* Usare 2.2.7. □

**Definizione 2.2.9.** Chiamiamo *embedding* un'immersione che è anche un'omeomorfismo sulla sua immagine.

## 2.3 Prodotti

Siano $M$ e $N$ due varietà descritte rispettivamente dagli atlanti lisci $(U_\alpha, u_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(U_\beta, u_\beta)_{\beta \in B}$.

Allora la famiglia $(U_\alpha \times V_\beta, u_\alpha \times v_\beta \colon U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$ è un atlante liscio per il prodotto cartesiano $M \times N$. Chiaramente le proiezioni

$$M \xleftarrow{pr_1} M \times N \xrightarrow{pr_2} N$$

sono a loro volta lisce. Il prodotto $(M \times N, pr_1, pr_2)$ ha la seguente *proprietà universale*:

> Per ogni varietà liscia $P$ e per ogni coppia di applicazioni lisce $f\colon P \to M$ e $g\colon P \to N$, l'applicazione $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$ è l'unica applicazione liscia tale che $pr_1 \circ (f,g) = f$, $pr_2 \circ (f,g) = g$.

Dalla costruzione del fibrato tangente in 1.6 è immediatamente chiaro che

$$TM \xleftarrow{T(pr_1)} T(M \times N) \xrightarrow{T(pr_2)} TN$$

è di nuovo un prodotto, così $T(M \times N) = TM \times TN$ in maniera canonica.

Chiaramente possiamo formare prodotti di un numero finito qualsiasi di varietà.

**Teorema 2.3.1** (Retratti lisci di varietà sono varietà)**.** *Sia $M$ una varietà connessa, e suppuniamo che $f\colon M \to M$ sia liscia, con $f \circ f = f$. Allora l'immagine $f(M)$ di $f$ è una sottovarietà su M.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che esiste un intorno aperto $U$ di $f(M)$ in M tale che il rango di $T_y f$ è costante per $y \in U$. Allora il risultato segue dal teorema del rango costante 2.1.4.

Per $x \in f(M)$ abbiamo $T_x f \circ T_x f = T_x F$, perciò $Im T_x f = Ker(Id - T_x f)$, e $rank T_x f + rank(Id - T_x f) = dim M$. Dal momento che $rank T_x f$ e $rank(Id - t_x f)$ non possono annullarsi localmente, $rank T_x f$ è localmente costante per $x \in f(M)$ e, dal momento che $f(M)$ è connesso, $rank T_x f = r$ per ogni $x \in f(M)$.

Ma allora, per ogni $x \in f(M)$, esiste un intorno aperto $U_x$ in $M$ con $rank T_y f \geq r$ per ogni $y \in U_x$. D'altra parte, $rank T_y f = rank T_y (f \circ f) = rank T_{f(y)} f \circ T_y f \leq rank T_{f(y)} f = r$, dal momento che $f(y) \in f(M)$. Quindi l'intorno richiesto è dato da $U = \bigcup_{x \in f(M)} U_x$. □

Se non supponiamo che $M$ sia connessa, allora $f(M)$ non sarà in generale una varietà pura, cioè potrà avere diverse dimensioni nelle diverse componenti connesse.

**Corollario 2.3.2.**

1. *Le varietà lisce connesse (separabili) sono esattamente i retratti lisci dei sottoinsiemi aperti connessi di $\mathbb{R}^n$.*

2. *$f\colon M \to N$ è un embedding di una sottovarietà se e solo se esiste un intorno aperto $U$ di $f(M)$ in $N$ e un'applicazione liscia $r\colon U \to M$, con $r \circ f = Id_M$.*

*Dimostrazione.* Ogni varietà $M$ può essere embedded in qualche $\mathbb{R}^n$. Quindi esiste un intorno tubolare di $M$ in $\mathbb{R}^n$ e $M$ è chiaramente un retratto di questo intorno tubolare. Il viceversa segue dal teorema precedente 2.3.1. □

## 2.4 Valori regolari

**Definizione 2.4.1.** Sia $f\colon M \to N$ un'applicazione liscia tra varietà.

1. $x \in M$ si dice un *punto singolare* di $f$ se $T_x f$ non è surgettiva, ed è detto un *punto regolare* di $f$ se $T_x f$ è surgettiva.

2. $y \in N$ si dice un *valore regolare* di $f$ se $T_x f$ è surgettiva per ogni $x \in f^{-1}(y)$, altrimenti si dice *valore singolare.* Notiamo che $y \in N\ f(M)$ è un valore regolare.

## 2.5 Sottovarietà immerse

**Definizione 2.5.1.** Se $i\colon M \to N$ è un'immersione iniettiva, allora $(M, i)$ è detta *sottovarietà immersa* di N.

Una sottovarietà è sempre una sottovarietà immersa, ma il viceversa è generalmente falso.

In generale, la struttura di una sottovarietà immersa $(M, i)$ non è determinata dal sottoinsieme $i(M) \subset N$, come si vede dal seguente esempio.

**Esempio 2.5.2.** Consideriamo la curva $\gamma(t) = (sin^3 t, sint \cdot cost) in \mathbb{R}^2$. Allora $((-\pi, \pi), \gamma|_{(-\pi,\pi)})$ e $(0, 2\pi), \gamma|_{(0,2\pi)})$ sono due diverse sottovarietà immerse, ma l'immagine degli embeddings è in entrambi i casi semplicemente un otto.

Sia $M$ una sottovarietà di $N$. Allora l'embedding $i\colon M \to N$ è un'immersione iniettiva con la seguente proprietà:

(P1) Per ogni varietà $Z$ l'applicazione $f\colon Z \to M$ è liscia se e solo se $i \circ f\colon Z \to N$ è liscia.

**Esempio 2.5.3.** Consideriamo $\mathbb{T}^2$, il toro in due dimensioni: $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}^2$.

Allora l'applicazione quoziente $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ è una mappa ricoprimento, e cioè localmente è un diffeomorfismo. Possiamo anche considerare l'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, \alpha \cdot t)$, dove $\alpha$ è irrazionale. Allora $\pi \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ è un'applicazione iniettiva con immagine densa, e ovviamente non è un omeomorfismo sulla sua immagine. Ma $\pi \circ f$ ha la proprietà in (P1), come segue dal fatto che $\pi$ è una mappa ricoprimento.

L'esempio in 2.5.2 mostra che ci sono immersioni iniettive che non godono della proprietà (P1).

Determiniamo tutte le immersioni iniettive che godono della proprietà (P1): chiedere che $i$ sia un omeomorfismo sulla sua immagine è troppo restrittivo, come mostra l'esempio 2.5.3. D'altra parte, cercare tutte le applicazioni lisce $i\colon M \to N$ con la proprietà (P1) è troppo difficile, come mostra l'esempio seguente.

**Esempio 2.5.4.** Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che $f^p$ e $f^q$ sono lisce per qualche $p, q$ relativamente primi in $\mathbb{N}$, allora $f$ stessa sarà liscia. Così l'applicazione $i\colon t \mapsto \binom{t^p}{t^q}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ha la proprietà (P1), ma $i$ non è un'immersione in 0.

## 2.6 Sottovarietà iniziali

**Definizione 2.6.1.** Per un sottoinsieme arbitrario $A$ di una varietà $N$, e per $x_0 \in A$, indichiamo con $C_{x_0}(A)$ l'insieme di tutte le $x \in A$ che possono essere collegate ad $x_0$ tramite una curva liscia su M contenuta in $A$. Un sottoinsieme $M$ in una varietà N è detto una *sottovarietà iniziale* di dimensione $m$, se la seguente proprietà è verificata:

(P2) Per ogni $x \in M$ esiste una carta $(U, u)$ centrata in $x$ su $N$ tale che $u(C_x(U \cap M)) = u(U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0)$.

I tre lemmi seguenti spiegano il concetto di sottovarietà iniziali.

**Lemma 2.6.2.** *Sia $f\colon M \to N$ un'immersione iniettiva tra varietà con la proprietà universale (P1). Allora $f(M)$ è una sottovarietà iniziale di $N$.*

*Dimostrazione.* Sia $x \in M$. Per la proprietà delle immersioni presentata nel lemma 2.2.6, possiamo scegliere una carta $(V, v)$ centrata in $f(x)$ su $N$ e un'altra carta $(W, w)$ centrata in $x$ su $M$ tali che

$$(v \circ f \circ w^{-1})(y^1, \dots, y^m) = (y^1, \dots, y^m, 0, \dots, 0).$$

Prendiamo un $r$ positivo sufficientemente piccolo affinché $\{y \in \mathbb{R}^m \colon |y| < 2r\} \subset w(W)$, e $\{z \in \mathbb{R}^n \colon |z| < 2r\} \subset v(V)$. Poniamo

$$\begin{aligned} U &:= v^{-1}(z \in \mathbb{R}^n \colon |z| < r) \subset N \\ W_1 &:= w^{-1}(y \in \mathbb{R}^m \colon |y| < r) \subset M. \end{aligned}$$

Affermiamo che $(U, u = u|_U)$ soddisfa le condizioni di (P2).

$$\begin{aligned} u^{-1}(u(U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0)) &= u^{-1}(\{(y^1, \dots, y^m, 0, \dots, 0) \colon |y| < r\}) = \\ &= f \circ w^{-1} \circ (u \circ f \circ w^{-1})^{-1}(\{(y^1, \dots, y^m, 0, \dots, 0) \colon |y| < r\}) = \\ &= f \circ w^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^m \colon |y| < r\}) = f(W_1) \subseteq C_{f(x)}(U \cap f(M)), \end{aligned}$$

dal momento che $f(W_1) \subseteq U \cap f(M)$, e $f(W_1)$ è $C^\infty$-contraibile.

Ora, viceversa, sia $z \in C_{f(x)}(U \cap f(M))$; per definizione esiste una curva liscia $c\colon [0,1] \to N$, con $c(0) = f(x)$, $c(1) = z$, e $c([0,1]) \subseteq U \cap f(M)$. Dalla proprietà (P1) l'unica curva $\bar{c}\colon [0,1] \to M$, con $f \circ \bar{c} = c$, è liscia.

Affermiamo che $\bar{c}([0,1]) \subseteq W_1$.

Se non fosse così,esisterebbe qualche $t \in [0,1]$, con $\bar{c}(t) \in w^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^m \colon r \leq |y| \leq 2r\})$, dal momento che $\bar{c}$ è liscia e quindi continua. Ma allora avremmo

$$\begin{aligned} (v \circ f)(\bar{c}(t)) &\in (v \circ f \circ w^{-1})(\{y \in \mathbb{R}^m \colon r \leq |y| < 2r\}) = \\ &= \{(y, 0) \in \mathbb{R}^m \times 0 \colon r \leq |y| < 2r\} \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n \colon r \leq |z| < 2r\}. \end{aligned}$$

Questo significa che $(v \circ f \circ \bar{c})(t) = (v \circ c)(t) \in \{z \in \mathbb{R}^n \colon r \leq |z| < 2r\}$, così $c(t) \notin U$, ma è una contraddizione.

Pertanto $\bar{c}([0,1]) \subseteq W_1$, cioè $\bar{c}(1) = f^{-1}(z) \in W_1$ e $z \in f(W_1)$. Di conseguenza abbiamo $C_{f(x)}(U \cap f(M)) = f(W_1)$, e infine $f(W_1) = u^{-1}(u(U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0))$, per la prima parte della dimostrazione. $\square$

**Lemma 2.6.3.** *Sia $M$ una sottovarietà iniziale di una varietà $N$. Allora esiste un'unica struttura di varietà $C^\infty$ su $M$ tale che l'inclusione $i\colon M \to N$ sia un'immersione iniettiva con la proprietà (P1). Le componenti connesse di $M$ sono separabili (ma possono essere in quantità non numerabile).*

*Dimostrazione.* Usiamo gli insiemi $C_x(U_x \cap M)$ come carte per $M$, dove $x \in M$ e $(U_x, u_x)$ è una carta per $N$ centrata in $x$ con la proprietà richiesta in (P2). Allora i cambiamenti di carta sono lisci, dal momento che sono solo restrizioni dei cambiamenti di carte su $N$. Ma gli insiemi $C_x(U_x \cap M)$ non sono in generale aperti nella topologia indotta su $M$: pertanto la topologia identificazione rispetto alle carte $(C_x(U_x \cap M), u_x)_{x \in M}$ produce una topologia su $M$ che è più fine di quella indotta, e pertanto è di Hausdorff. Chiaramente $i\colon M \to N$ è allora un'immersione iniettiva.

L'unicità della struttura liscia segue dalla proprietà universale (P1):

per $z \in Z$ scegliamo una carta $(U, u)$ su N, centrata in $f(z)$, tale che $u(C_{f(z)}(U \cap M)) = u(U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0)$. Allora $f^{-1}(U)$ è aperto in $Z$ e contiene una carta $(V, v)$ centrata in $z$ su $Z$ con $v(V)$ una palla. Allora $f(V)$ è $C^\infty$ contraibile in $U \cap M$, quindi $f(V) \subseteq C_f(x)(U \cap M)$, e $(u|_{C_f(x)(U \cap M)}) \circ f \circ v^{-1} = u \circ f \circ v^{-1}$ è liscia. □

## 2.7 Applicazioni trasverse

**Definizione 2.7.1.** Siano $M_1$, $M_2$ e $N$ delle varietà, e siano $f_i\colon M_i \to N$ delle applicazioni lisce per $i = 1, 2$. Diciamo che $f_1$ e $f_2$ sono *trasversi a* $y \in N$, se

$$imT_{x_1} f_1 + imT_{x_2} f_2 = T_y N \text{ ogniqualvolta } f_1(x_1) = f_2(x_2) = y.$$

Notiamo che esse sono trasverse in ogni $y$ che non è in $f_1(M_1)$ o in $f_2(M_2)$

**Definizione 2.7.2.** Le applicazioni $f_1$, $f_2$ si dicono *trasverse* se lo sono per ogni $y \in N$. Se $P$ è una sottovarietà iniziale di $N$ con embedding $i\colon P \to N$, allora $f\colon M \to N$ si dice *trasversa a* $P$, se $i$ e $f$ sono trasverse.

**Lemma 2.7.3.** *In questo caso $f^{-1}(P)$ è una sottovarietà iniziale di $M$ con la stessa codimensione in $M$ come $P$ ha in $N$, o l'insieme vuoto. Se $P$ è una sottovarietà, allora anche $f^{-1}(P)$ è una sottovarietà.*

*Dimostrazione.* Sia $x \in f^{-1}(P)$, e sia $(U, u)$ una carta di una sottovarietà iniziale per $P$ centrata in $f(x)$ su $N$, cioè $u(C_{f(x)}(U \cap P)) = u(U) \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$. Allora l'applicazione

$$M \supseteq f^{-1}(U) \xrightarrow{f} U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^{n-p}$$

è una submersione in $x$, dal momento che $f$ è trasversa a $P$. Pertanto, per il lemma 2.2.2, esiste una carta $(V, v)$ su $M$ centrata in $x$ tale che abbiamo

$$(pr_2 \circ u \circ f \circ v^{-1})(y^{-1}, \ldots, y^{n-p}, \ldots, y^m) = (y^1, \ldots, y^{n-p}).$$

Ma allora $z \in C_x(f^{-1}(P) \cap V)$ se e solo se $v(z) \in v(V) \cap (0 \times \mathbb{R}^{m-n+p})$, e così $v(C_x(f^1(P) \cap V)) = v(V) \cap (0 \times \mathbb{R}^{m-n+p})$. □

# Capitolo 3

# Campi di vettori

## 3.1 Campi di vettori su una varietà

**Definizione 3.1.1.** Un *campo di vettori* $X$ su una varietà M è una sezione liscia del fibrato tangente; perciò

$$X \colon M \to TM$$

è liscia e

$$\pi_M \circ X = Id_M.$$

Un *campo di vettori locale* è una sezione liscia che è definita solo su un sottoinsieme aperto di M.

Indichiamo con $\mathfrak{X}(M)$ l'insieme di tutti i campi di vettori $C^\infty$ definiti su $M$.
Esso è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dal momento che, se $X$ e $Y$ sono campi vettoriali di $\mathfrak{X}(M)$, tutte le combinazioni lineari che hanno per coefficienti funzioni $C^\infty$ su $M$ sono, a loro volta, campi di vettori $C^\infty$: ovvero, presi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$, si ha che il campo vettoriale

$$Z = fX + gY,$$

definito ovviamente come

$$Z_p = f(p)X_p + g(p)Y_p,$$

è un campo vettoriale $C^\infty$ per ogni $p \in M$.

**Esempio 3.1.2.** Una varietà differenziabile ammette sempre il campo vettoriale ovunque nullo, che è differenziabile poiché ha coordinate tutte nulle rispetto ad ogni carta.

**Esempio 3.1.3.** Sia $(U, u)$ una carta su $M$, e sia $dim\, M = n$. Allora l'applicazione

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \colon U \to TM|_U = \bigcup_{x \in U} T_x M$$

$$p \to \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \text{ per } \; i = 1 \ldots, n$$

è un campo di vettori locali definito su U. Si tratta del campo di vettori velocità delle linee coordinate $x^i$ per i punti di $U$. Le sue coordinate sulla carta $(U, u)$ sono costanti e uguali a $(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$

**Esempio 3.1.4.** Su $S^1 = \{z = e^{i\vartheta} \in C \equiv \mathbb{R}^2\}$ l'applicazione

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} \colon e^{i\vartheta_0} \mapsto \frac{\partial}{\partial\vartheta|_{\vartheta_0}}$$

è un campo vettoriale. (Ponendo, ad esempio , la limitazione $|\vartheta - \vartheta_0| < \pi$ il parametro $\vartheta$ è una coordinata per il corrispondente arco di $S^1$).

Si noti che, scrivendo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} \colon (x, y) \mapsto ((x, y), (-y, x))$$

ovvero, scrivendo $S^1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | z = \overline{z} = 1\}$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} \colon z \mapsto (z, iz)$$

**Esempio 3.1.5.** Sulla sfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ si possono considerare i tre campi vettoriali $X_1, X_2, X_3$ definiti come:

$$\begin{aligned} X_1 \colon x = (x^1, x^2, x^3, x^4) &\mapsto (x, (-x^2, x^1, x^4, -x^3)) \\ X_2 \colon x = (x^1, x^2, x^3, x^4) &\mapsto (x, (-x^3, -x^4, x^1, x^2)) \\ X_3 \colon x = (x^1, x^2, x^3, x^4) &\mapsto (x, (-x^4, x^3, -x^2, x^1)) \end{aligned}$$

Mediante l'identificazione $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{H}$, per la quale $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3$, il prodotto scalare canonico Euclideo $<,>$ si può esprimere in forma quaternionale come

$$< x, y >= \Re(x\overline{y}) :$$

infatti, entrambi i membri valgono $x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$. La sfera $S^3$ può essere identificata con il gruppo dei quaternioni a norma 1, $S^3 = \{x = x^1 + ix^2 + jx^3 + kx^4 \in \mathbb{H} | x\overline{x} = 1\}$. I campi vettoriali scritti sopra allora sono dati da

$$\begin{aligned} X_1 \colon x &\mapsto (x, xi) \\ X_2 \colon x &\mapsto (x, xj) \\ X_3 \colon x &\mapsto (x, xk) \end{aligned}$$

e risultano tangenti ad $S^3$ in ogni suo punto $x$, infatti

$$< x, xi >= \Re(\overline{x}xi) = \Re(i) = 0.$$

**Definizione 3.1.6.** Una varietà differenziabile si dice *parallelizzabile* se esistono $n$ cammpi vettoriali $X_1, \dots, X_n$ continui e linearmente indipendenti in ciascun punto della varietà stessa.

Dai due esempi precedenti, $S^1$ e $S^3$ sono parallelizzabili.

**Lemma 3.1.7.** *Se $X$ è un campo di vettori su $M$ e $x \in U$, allora si ha*

$$X(x) = \sum_{i=1}^{m} X(x)(u^i)\frac{\partial}{\partial u^i}|x.$$

*Scriveremo* $X|_U = \sum_{i=1}^{m} X(u^i)\frac{\partial}{\partial u^i}$

**Lemma 3.1.8.** *Lo spazio $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori su M coincide canonicamente con lo spazio di tutte le derivate dell'algebra $C^\infty(M)$ di funzioni lisce, cioè gli operatori lineari*

$$D \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

*con*

$$D(fg) = D(f)g + fD(g).$$

*Dimostrazione.* Ogni campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ definisce una derivazione (che per ora chiamiamo ancora $X$, più tardi $\mathcal{L}_X$) dell'algebra $C^\infty(M)$.

$$X(f)(x) := X(x)(f) = df(X(x)).$$

Se viceversa è data una derivazione $D$ di $C^\infty(M)$, per ogni $x \in M$ consideriamo

$$D_x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$
$$D_x(f) = D(f)(x)$$

Allora $D_x$ è una derivazione nel punto x di $C^\infty(M)$ (nel senso spiegato in 1.4.2), così $D_x = X_x$ per qualche $X_x \in T_xM$. In questo modo abbiamo una sezione $X \colon M \to TM$. Se $(U, u)$ è una carta su M, abbiamo

$$D_x = \sum_{i=1}^{m} X(x)(u_i)\frac{\partial}{\partial u^i}|_x$$

per le regole di derivazione.

Scegliamo $V$ aperto in $M$, $V \subset \overline{V} \subset U$, e $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tale che $supp(\varphi) \subset U$ e $\varphi|_V = 1$. Allora $\varphi \cdot u^i \in C^\infty(M)$, e $(\varphi u^i)|_V = u^i|_V$. Così

$$D(\varphi u^i)(x) = X(x)(\varphi u^i) = X(x)(u^i)$$

e

$$X|_V = \sum_{i=1}^{m} D(\varphi u^i)|_V \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}|_V$$

è liscia.

□

## 3.2 La parentesi di Lie

Grazie al lemma precedente, possiamo identificare $\mathfrak{X}(M)$ con lo spazio di vettori di tutte le derivazioni dell'algebra $C^\infty(M)$, cosa che faremo senza cambiare notazione.

**Proposizione 3.2.1.** *Se $X, Y$ sono due campi di vettori su $M$, allora l'applicazione*

$$f\colon X(Y(f)) - Y(X(f))$$

*è nuovamente una derivazione di $C^\infty$.*

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} D(fg) = X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = \\ = X(Y(f)g(x) + f(x)Y(g)) - Y(X(f)g(x) + f(x)X(g)) = \\ = X(Y(f)g(x)) + X(f(x)Y(g)) - Y(X(f)g(x)) + Y(f(x)X(g)) = \\ = g(x)X(Y(f)) + f(x)X(Y(g)) - g(x)Y(X(f)) - f(x)Y(X(g)) = \\ = [X(Y(f)) - Y(X(f))]g(x) + f(x)[X(Y(g)) - Y(X(g))] = \\ D(f)g(x) + f(x)D(g). \end{aligned}$$

□

Perciò c'è un unico campo di vettori $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ tale che

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{3.1}$$

vale per ogni $f \in C^\infty$.

**Proposizione 3.2.2.** *In una carta locale $(U, u)$ su $M$, se $X$ e $Y$ sono due campi di vettori su $M$, allora, considerate le restrizioni*

$$X|_U = \sum X^i \frac{\partial}{\partial u^i} \qquad Y|_U = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

*si ha*

$$[X, Y] = \sum_i (\sum_j X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

*Dimostrazione.* Usando la (3.1), risulta, per ogni $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = \\ = X[\sum_i Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}] - Y[\sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}] = \\ = \sum_{i,j} \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} X^j + \sum_{i,j} Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} X^j - \\ \sum_{i,j} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} Y^j - \sum_{i,j} X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} Y^j. \end{aligned}$$

dal momento che la seconda derivata parziale commuta, ovvero

$$[X, Y]f = \sum_i (\sum_j (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j)) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

e la tesi segue per l'arbitrarietà di $f$. □

**Definizione 3.2.3.** La mappa $\mathbb{R}$-bilineare

$$[\quad,\quad]\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$$

è detta *parentesi di Lie* o *bracket* di campi di vettori.

**Teorema 3.2.4.** *La parentesi di Lie* $[\quad,\quad]\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ *ha le seguenti proprietà:*

1. $[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$
2. $[X,Y]=-[Y,X], \qquad [X,X]=0$
3. $[X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]+[Y[X,Z]]$, *l'identità di Jacobi,*
4. $[fX,Y]=f[X,Y]-(Yf)X, \qquad [X,fY]=f[X,Y]+(Xf,Y)$

*Dimostrazione.* 1. $[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$

$$\begin{aligned}
&[aX+bY,Z]=\\
&=\sum_i(\sum_j((aX^j+bY^j)\frac{\partial Z^i}{\partial x^j}-\frac{\partial(aX^i+bY^i)}{\partial x^j}Z^j))\frac{\partial}{\partial x^i}=\\
&=\sum_i(\sum_j aX^j\frac{\partial Z^i}{\partial x^j}+\sum_j bY^j\frac{\partial Z^i}{\partial x^j}+\\
&-\sum_j a\frac{\partial X^i}{\partial x^j}Z^j-\sum_j b\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}Z^j)\frac{\partial}{\partial x^i}=\\
&=a\sum_i(\sum_j(X^j\frac{\partial Z^i}{\partial x^j}-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}Z^j))\frac{\partial}{\partial x^i}+\\
&b\sum_i(\sum_j(Y^j\frac{\partial Z^i}{\partial x^j}-\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}Z^j))\frac{\partial}{\partial x^i}=\\
&=a[X,Z]+b[Y,Z].
\end{aligned}$$

2. $[X,Y]=-[Y,X]$

$$\begin{aligned}
&[X,Y]=\\
&=\sum_i(\sum_j(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j})-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}Y^j)))\frac{\partial}{\partial x^i}=\\
&=\sum_i(\sum_j(-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j})+(\frac{\partial(Y^i}{\partial x^j}X^j)))\frac{\partial}{\partial x^i}=\\
&=-\sum_i(\sum_j(Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j})-(\frac{\partial(Y^i}{\partial x^j}X^j)))\frac{\partial}{\partial x^i}=\\
&=-[X,Y].
\end{aligned}$$

3. $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$

$$\begin{aligned} [X,[Y,Z]] &= [X, YZ(x) - ZY(x)] = \\ &= XYZ(x) - XZY(x) - YZX(x) + ZYX(x) = \\ &= XYZ(x) - YXZ(x) - ZXY(x) + ZYX(x) + \\ &+YXZ(x) - YZX(x) - XZY(x) + ZXY(x) = \\ &= [XY(x) - YX(x), Z] + [Y, XZ(x) - ZX(x)] = \\ &= [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]. \end{aligned}$$

4. $[fX,Y] = f[X,Y] - (Yf)X$ e $[X,fY] = f[X,Y] + (Xf)Y$

$$\begin{aligned} [fX,Y] &= fX \cdot Y(x) - Y \cdot fX(x) = \\ &= f(XY(x) - YX(x)) - (Yf)X(x) = f[X,Y] - (Yf)X; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X,fY] &= X \cdot fY(x) - fY \cdot X(x) = \\ &= fXY(x) - fYX(x) + (Xf)Y = f[X,Y] + (Xf)Y. \end{aligned}$$

□

## 3.3 L'Algebra di Lie dei campi di vettori su una varietà

**Definizione 3.3.1.** Diremo che uno spazio di vettori $L$ su $\mathbb{R}$ è un'*algebra di Lie* se, oltre alla struttura di spazio vettoriale, essa possiede un prodotto, cioè un'applicazione $L \times L \to L$, che alla coppia $(X,Y)$ associa l'elemento $[X,Y] \in L$ con le seguenti proprietà:

- è bilineare su $\mathbb{R}$:

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y],$$

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2];$$

- è antisimmetrico $[X,Y] = -[X,Y]$;
- soddisfa l'identità di Jacobi: $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y[X,Z]]$;

**Esempio 3.3.2.** Uno spazio di vettori $V^3$, di dimensione 3 su $\mathbb{R}$ con l'usuale prodotto di vettori è un'algebra di Lie.

**Esempio 3.3.3.** Sia $M_n(\mathbb{R})$ l'algebra delle matrici reali $n \times n$ su $\mathbb{R}$, e indichiamo con $XY$ l'usuale prodotto tra le matrici $X$ e $Y$. Allora $[X,Y] = XY - YX$, il *commutatore* di $X$ e $Y$, definisce una struttura di algebra di Lie su $M_n(\mathbb{R})$.

**Osservazione 3.3.4.** Dalle prime tre proprietà della parentesi di Lie, $\mathfrak{X}(M)$ con $[X,Y]$ è un'algebra di Lie. La quarta ci dice invece che $[X,Y]$ non è $C^\infty$ bilineare (per $f \in C^\infty(M)$, valgono $[X,fY] = f[X,Y] + (Xf)Y$ e $[fX,Y] = f[X,Y] - (Yf)X$).

## 3.4 Curve integrali

Sia $c : J \to M$ una curva liscia in una varietà $M$ definita su un intervallo $J \subseteq \mathbb{R}$. Useremo le seguenti notazioni:

$$c'(t) = \dot{c}(t) = \frac{d}{dt}c(t). = T_t c \cdot 1.$$

Chiaramente $c' : J \to TM$ è liscia. Diciamo che $c'$ un *campo di vettori su $c$* se vale$\pi_M \circ c' = c$.

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[dr, "\pi_M"] & \\
J \arrow[u, "c'"] \arrow[r, "c"] & M
\end{tikzcd}$$

**Definizione 3.4.1.** Una curva liscia $c : J \to M$ si dirà *curva integrale* o *linea di flusso* di un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, se $c'(t) = X(c(t))$ vale per ogni $t \in J$, cioè se $c$ ha in ogni punto vettore tangente coincidente con il vettore $X_{c(t)} \equiv X(c(t))$ del campo $X$ nel punto stesso.

**Lemma 3.4.2.** *Sia $X$ un campo di vettori su $M$. Allora per ogni $x \in M$ esistono un intervallo aperto $J_x$ contenente 0 e una curva integrale $c_x : J_x \to M$ per $X$ (cioé $c'_x = X \circ c_x$), con $c_x(0) = x$. Se $J_x$ è massimale, allora $c_x$ è unica.*

*Dimostrazione.* In una carta $(U, u)$ su $M$, con $x \in U$, l'equazione

$$\begin{cases} c'(t) = X(c(t)), \\ c(0) = x. \end{cases}$$

è un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt}(t) = X^i(x^1(t), \dots, x^n(t)) \quad i = 1, \dots n \\ x^i(0) = x^i \end{cases}$$

nelle n funzioni incognite $x^i = x^i(t)$ per $i = 1, \dots, n$. Dal momento che $X$ è liscia, il teorema di esistenza e unicità locale ci dice che c'è un'unica soluzione locale, per ogni assegnata condizione iniziale.

Così su $M$ esistono sempre delle curve integrali locali. Se $J_x = (a, b)$ ed esiste in $M$ il

$$\lim_{t \to b_-} c_x(t) =: c_x(b) \in M,$$

allora esiste un'unica soluzione locale $c_1$ definita su un intervallo aperto contenente $b$, con $c_1(b) = c_x(b)$. Per l'unicità della soluzione sull'intersezione dei due intervalli, $c_1$ prolunga $c_x$ ad un intervallo più grande. Questo procedimento può essere ripetuto anche per il lato sinistro di $J_x$, in tutti i punti in cui il limite esiste. Così, se supponiamo che $J_x$ sia massimale, allora o $J_x$ coinciderà con $\mathbb{R}$ , oppure la curva integrale lascerà la varietà dopo un intervallo di tempo (parametrico) finito nel passato, nel futuro o in entrambi. $\square$

## 3.5 Il flusso di un campo di vettori

**Definizione 3.5.1.** Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori. Scriviamo

$$Fl_t^X(x) = Fl^X(t,x) := c_x(t),$$

dove $c_x \colon J_x \to M$ è la curva integrale definita in modo massimale su $X$ con $c_x(0) = x$, costruita nel lemma 3.4.2. Sia $\mathcal{D}(X) = \bigcup_{x \in M} J_x \times x$ un intorno aperto di $0 \times M$ in $\mathbb{R} \times M$. Allora l'applicazione $Fl : \mathcal{D}(X) \to M$ si dice $flusso$ del campo X.

**Teorema 3.5.2.** *Per ogni campo di vettori $X$ su $M$, l'applicazione $Fl^X$ : $\mathcal{D}(X) \to M$ è liscia, e si ha*

$$Fl^X(t+s,x) = Fl^X(t, Fl^X(s,x))$$

*nel senso seguente:*

- *se esiste il lato destro, allora esiste anche il lato sinistro e si ha l'uguaglianza;*

- *se $t$ ed $s$ sono entrambi positivi o negativi e se il lato sinistro esiste, allora esiste sempre il lato destro e si ha l'uguaglianza.*

*Dimostrazione.* Come abbiamo visto nella dimostrazione del lemma 3.4.2, il flusso $Fl^X(t,x)$ è liscio in $(t,x)$ per piccoli valori di $t$, e, se è definito per $(t,x)$, allora è definito anche per $(s,y) \in I(t,x)$.

Ora consideriamo l'equazione

$$Fl^X(t+s,x) = Fl^X(t, Fl^X(s,x))$$

.

- Se esiste il lato destro, cioè se esiste $Fl^X(t, Fl^X(s,x)$, allora consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Fl^X(t+s,x) = \frac{d}{dt} Fl^X(u,x)|_{u=t+s} = X(Fl^X(t+s,x) \\ Fl^X(t+s,x)|_{t=0} = Fl^X(s,x). \end{cases}$$

  Ma una soluzione di questo è $Fl^X(t, Fl^X(s,x))$: dalla definizione di flusso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{Fl^X(t, Fl^X(s,x))\} &= \frac{d}{dt}\{c_{Fl^X(s,x)}(t)\} = \\ &= X\{c_{Fl^X(s,x)}(t)\} = X\{Fl^X(t, Fl^X(s,x))\}. \\ Fl^X(t, Fl^X(s,x))|_{t=0} &= Fl^X(0, Fl^X(s,x)) = Fl^X(s,x). \end{aligned}$$

  La soluzione deve essere unica, quindi il lato sinistro esiste ed è uguale al lato destro.

- Se esiste il lato sinistro, supponiamo che $t, s \geq 0$. Poniamo

$$c_x(u) = \begin{cases} Fl^X(u,x) & \text{se } u \leq s \\ Fl^X(u-s, Fl^X(s,x)) & \text{se } u \geq s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}c_x(u) &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{du}Fl^X(u,x) & \text{per } u \leq s \\ \frac{d}{du}Fl^X(u-s, Fl^X(s,x)) & \text{per } u \geq s \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} X(Fl^X(u,x)) & \text{per } u \leq s \\ X(Fl^X(u-s, Fl^X(s,x))) & \text{per } u \geq s \end{array} \right\} = \\ &= X(c_x(u)), \text{ per } 0 \leq u \leq t+s. \end{aligned}$$

Poiché anche $c_x(0) = x$ e sull'intersezione entrambe le definizioni coincidono per la prima parte della dimostrazione; possiamo allora concludere che

$$c_x(u) = Fl^X(u,x) \text{ per } 0 \leq u \leq t+s$$

e abbiamo

$$Fl^X(t, Fl^X(s,x)) = c_x(t+s) = Fl^X(t+s,x).$$

Ora mostriamo che $\mathcal{D}(X)$ è aperto e che $Fl^X$ è liscio su $\mathcal{D}(X)$. Sappiamo già che $\mathcal{D}(X)$ è un intorno di $0 \times M$ in $\mathbb{R} \times M$, e che $Fl^X$ è liscio vicino a $0 \times M$.

Per $x \in M$, sia $J'_x$ l'insieme delle $t \in \mathbb{R}$ tali che $Fl^X$ è definito e liscio in un intorno aperto di $[0,t] \times \{x\}$ (rispettivamente di $[t,0] \times \{x\}$ per $t < 0$ in $\mathbb{R} \times M$. Ora mostriamo, per terminare la dimostrazione, che $J'_x = J_x$. E' sufficiente far vedere che $J'_x$ è non vuoto, aperto e chiuso in $J_x$.

Ora, esso è aperto per costruzione, e non vuoto, dal momento che contiene lo zero. Supponiamo per assurdo che $J'_x$ non sia chiuso in $J_x$.

Sia allora $t_0 \in J_x \cap (\overline{J'_x} \backslash J'_x)$, e supponiamo ad esempio che $t_0 > 0$. Sappiamo che, localmente, il flusso $Fl^X$ esiste ed è liscio: allora questo vale anche vicino $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \{y := Fl^X(t_0, x)\}$ in $\mathbb{R} \times M$, per qualche $\varepsilon > 0$, pertanto per costruzione $Fl^X$ esiste ed è liscio in un intorno di $[0, t_0 - \varepsilon] \times \{x\}$.

Dal momento che

$$Fl^X(-\varepsilon, y) = Fl^X(t_0 - \varepsilon, x),$$

concludiamo, per $t$ vicino $[0, t_0 - \varepsilon]$, $x'$ vicino $x$, e $t'$ vicino $[-\varepsilon, \varepsilon]$, che $Fl^X(t + t', x') = Fl^X(t', Fl^X(t, x'))$ esiste ed è liscio. Pertanto $t_0 \in J'_x$, e si genera una contraddizione. □

**Definizione 3.5.3.** Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori. Il suo flusso $Fl^X$ si dice *globale* o *completo* se il suo dominio di definizione $\mathcal{D}(X)$ coincide con $\mathbb{R} \times M$: in questo caso, $Fl^X_t$ è un diffeomorfismo di $M$,anche il campo di vettori $X$ si dice *completo*. Chiamiamo *supporto* di un campo di vettori $X$ l'insieme

$$supp(X) = \overline{\{x \in M \colon X(x) \neq 0\}}.$$

**Lemma 3.5.4.** *Un campo di vettori con supporto compatto su $M$ è completo.*

*Dimostrazione.* Poniamo che $K := supp(X)$ sia compatto. Allora l'insieme compatto $0 \times K$ ha distanza positiva dall'insieme chiuso disgiunto $(\mathbb{R} \times M)/\mathcal{D}(X)$ (se non è vuoto), così $[-\varepsilon, \varepsilon] \times K \subset \mathrm{D}(X)$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Se $x \notin K$ allora $X(x) = 0$, così $Fl^X(t, x) = x$ per ogni $t$ e $\mathbb{R} \times \{x\} \subset \mathcal{D}(X)$. Per il teorema 3.5.2, dal momento che $Fl^X(t + \varepsilon, x) = Fl^X(t, Fl^X(\varepsilon, x))$ esiste per $|t| \leq \varepsilon$, abbiamo che $[-2\varepsilon, 2\varepsilon] \times M \subset \mathcal{D}(X)$ e reiterando il procedimento $\mathbb{R} \times M = \mathcal{D}(X)$.

□

Perciò su una varietà compatta ogni campo di vettori è completo.

Se $M$ non è compatta e di dimensione $\geq 2$, allora in generale l'insieme dei campi di vettori completi su $M$ non è né uno spazio di vettori, né è chiuso tramite le parentesi di Lie, come mostra il seguente esempio.

**Esempio 3.5.5.** $X = y\frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}$ sono completi in $\mathbb{R}^2$, ma né $X + Y$ né $[X, Y]$ sono completi. In generale, si può immergere $\mathbb{R}^2$ come sottovarietà chiusa in M e estendere i campi di vettori X e Y.

## 3.6 Campi di vettori $f$-correlati

Se $f\colon M \to M$ è un diffeomorfismo, allora per ogni campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ l'applicazione
$$f^*X = Tf^{-1} \circ X \circ f$$
è essa stessa un campo di vettori. Analogamente, porremo
$$f_*X := Tf \circ X \circ f^{-1} = (f^{-1})^*X.$$

Ma se $f : M \to N$ è un'applicazione liscia e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ è un campo di vettori, allora può esistere o meno un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] & TN \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

**Definizione 3.6.1.** Sia $f : M \to N$ un'applicazione liscia. Due campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ si dicono $f -$ *correlati* se vale $Tf \circ X = Y \circ f$, cioé se il diagramma precedente commuta.

**Esempio 3.6.2.** Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$, e $X \times Y \in \mathfrak{X}(M \times N)$ è dato da $(X \times Y)(x, y) = (X(x), Y(y))$, allora si ha:

- $X \times Y$ e $X$ sono $pr_1$-correlati;
- $X \times Y$ e $Y$ sono $pr_2$-correlati;
- $X$ e $X \times Y$ sono $ins(y)$-correlati se e solo se $Y(y) = 0$, dove l'applicazione $ins(y) : M \to M \times N$ è data da $ins(y)(x) = (x, y)$.

**Lemma 3.6.3.** *Considera i campi di vettori $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_i \in \mathfrak{X}(N)$ per $i = 1, 2$, e un'applicazione liscia $f : M \to N$. Se $X_i$ e $Y_i$ sono $f$-correlati per $i = 1, 2$, allora anche $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ e $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ sono $f$-correlati, e anche $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ sono $f$-correlati.*

*Dimostrazione.* La prima assunzione è immediata. Per provare la seconda, scegliamo $h \in C^\infty(N)$. Allora, per ipotesi, si ha $Tf \circ X_i = Y_i \circ f$, e quindi

$$\begin{aligned}(X_i(h \circ f))(x) = X_i(x)(h \circ f) &= (T_x f . X_i(x))(h) = (Tf \circ X_i)(x)(h) \\ &= (Y_i \circ f)(x)(h) = Y_i(f(x))(h) = (Y_i(h))(f(x)),\end{aligned}$$

così $X_i(h \circ f) = (Y_i(h)) \circ f$, e possiamo continuare:

$$\begin{aligned}[X_1, X_2](h \circ f) = X_1(X_2(h \circ f)) - X_2(X_1(h \circ f)) &= \\ = X_1(Y_2(h) \circ f) - X_2(Y_1(h) \circ f) &= \\ = Y_1(Y_2(h)) \circ f - Y_2(Y_1(h)) \circ f &= \\ = [Y_1, Y_2](h) \circ f&.\end{aligned}$$

Ma questo significa che $Tf \circ [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ f$, cioè $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ sono $f$-correlati. $\square$

**Corollario 3.6.4.** *Sia $f : M \to N$ è un diffeomorfismo locale (cioè un omeomorfismo tale che $(T_x f)^{-1}$ abbia valori per ogni $x \in M$); per $Y \in \mathfrak{X}(N)$, definiamo il campo di vettori $f^* Y \in \mathfrak{X}(M)$ come*

$$(f^* Y)(x) = (Tf)^{-1} \cdot Y(f(x)).$$

*In tal caso, l'applicazione lineare $f^* : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$ è un omomorfismo di algebre di Lie, cioè*

$$f^*[Y_1, Y_2] = [f^* Y_1, f^* Y_2].$$

## 3.7 Le derivate di Lie di funzioni

**Definizione 3.7.1.** Dati un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, definiamo $\mathcal{L}_X f \in C^\infty(M)$ come

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X f(x) &:= \frac{d}{dt}|_0 f(Fl^X(t, x)), \text{ ovvero} \\ \mathcal{L}_X f &:= \frac{d}{dt}|_0 (Fl^X_t)^* f = \frac{d}{dt}|_0 (f \circ Fl^X_t),\end{aligned}$$

e la chiameremo *derivata di Lie* per la funzione $f$.

La derivata di Lie è ben definita, dal momento che per piccoli valori di t $Fl^X(t, x)$ è definito.

**Lemma 3.7.2.** *Si ha*

$$\frac{d}{dt}(Fl^X_t)^* f = (Fl^X_t)^* (\frac{d}{dt} f) = (Fl^X_t)^* X(f) = X((Fl^X_t)^* f).$$

*In particolare, per $t = 0$,*

$$\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X).$$

*Dimostrazione.* Abbiamo

$$\frac{d}{dt}(Fl_t^X)^* f(x) = df(\frac{d}{dt}Fl^X(t,x)) = df(X(Fl^X(t,x))) = (Fl_t^X)^*(Xf)(x).$$

Da ciò si ottiene $\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X)$ e di conseguenza

$$\frac{d}{dt}(Fl_t^X)^* f = \frac{d}{ds}|_0(Fl_t^X \circ Fl_s^X)^* f = \frac{d}{ds}|_0(Fl_s^X)^*(Fl_t^X)^* f = X((Fl_t^X)^* f).$$

□

## 3.8 La derivata di Lie per campi di vettori

**Definizione 3.8.1.** Per $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definiamo $\mathcal{L}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ come

$$\mathcal{L}_X Y := \frac{d}{dt}|_0(Fl_t^X)^* Y = \frac{d}{dt}|_0(T(Fl_{-t}^X) \circ Y \circ Fl_t^X),$$

e la chiameremo *derivata di Lie di $Y$ rispetto a $X$.*

**Lemma 3.8.2.** *Siano $X$ e $Y$ due campi di vettori di $\mathfrak{X}(M)$. Allora*

1. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$,
2. $\frac{d}{dt}(Fl_t^X)^* Y = (Fl_t^X)^* \mathcal{L}_X Y =$
$= (Fl_t^X)^*[X, Y] = \mathcal{L}_X (Fl_t^X)^* Y = [X, (Fl_t^X)^* Y]$.

*Dimostrazione.* 1. Sia $f \in C^\infty(M)$, e consideriamo l'applicazione

$$\alpha(t,s) := Y(Fl^X(t,x))(f \circ Fl_s^X),$$

che è definita localmente vicino a 0. Essa soddisfa

$$\alpha(t,0) = Y(Fl^X(t,x))(f),$$

$$\alpha(0,s) = Y(x)(f \circ Fl_s^X),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}|_0 Y(Fl^X(t,x))(f) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}|_0(Yf)(Fl^X(t,x)) = X(x)(Yf),$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\alpha(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}|_0 Y(x)(f \circ Fl_s^X) = Y(x)\frac{\partial}{\partial s}|_0(f \circ Fl_s^X) = Y(x)(Xf).$$

Ma d'altra parte abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial u}|_0\alpha(u,-u) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial u}|_0 Y(Fl^X(u,x))(f \circ Fl_{-u}^X) = \frac{\partial}{\partial u}|_0 Y(Fl_n^X)(f \circ Fl_{-n}^X) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial u}|_0(T(Fl_{-u}^X) \circ Y \circ Fl_u^X)_x(f) = (\mathcal{L}_X Y)_x(f),$$

e da questo segue la prima affermazione.

2. Per la seconda si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(Fl_t^X)^* Y = \\
= \frac{\partial}{\partial s}|_0 (T(Fl_{-t}^X) \circ T(Fl_{-s}^X) \circ Y \circ Fl_s^X \circ Fl_t^X) = \\
= T(Fl_{-t}^X \circ \frac{\partial}{\partial s}|_0 (T(Fl_{-s}^X) \circ Y \circ Fl_s^X) \circ Fl_t^X = \\
= T(Fl_{-t}^X) \circ [X, Y] \circ Fl_t^X = (Fl_t^X)^*[X, Y].
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial t}(Fl_t^X)^* Y = \frac{\partial}{\partial s}|_0 (Fl_s^X))^* (Fl_t^X)^* Y = \mathcal{L}_X (Fl_t^X)^* Y.$$

Da ciò segue che $(Fl_t^X)^*[X, Y] = \mathcal{L}_X (Fl_t^X)^* Y$, cioè la tesi.

□

**Lemma 3.8.3.** *Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ due campi di vettori correlati per un'applicazione liscia $f : M \to N$. Allora abbiamo $f \circ Fl_t^X = Fl_t^Y \circ f$, ogniqualvolta entrambi i membri sono definiti. In particolare, se $f$ è un diffeomorfismo, abbiamo $Fl_t^{f^*Y} = f^{-1} \circ Fl_t^Y \circ f$.*

*Dimostrazione.* Vale

$$\frac{d}{dt}(f \circ Fl_t^X) = Tf \circ \frac{d}{dt} Fl_t^X = Tf \circ X \circ Fl_t^X = Y \circ f \circ Fl_t^X$$

e $f(Fl^X(0, x)) = f(x)$. Così $t \mapsto f(Fl^X(t, x))$ è una curva integrale del campo di vettori $Y$ su $N$ con valore iniziale $f(x)$, e pertanto abbiamo $f(Fl^X(t, x)) = Fl^Y(t, f(x))$, ovvero $f \circ Fl_t^X = Fl_t^Y \circ f$. □

**Corollario 3.8.4.** *Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = 0$;
2. $(Fl_t^X)^* Y = Y$, *dove sono definite;*
3. $Fl_t^X \circ Fl_s^Y = Fl_s^Y \circ Fl_t^X$, *dove sono definite.*

*Dimostrazione.* (1) $\leftrightarrow$ (2) come visto nel lemma 3.8.2.

Per vedere (2) $\leftrightarrow$ (3) osserviamo che

$Fl_t^X \circ Fl_s^Y = Fl_s^Y \circ Fl_t^X$ vale se e solo se $Fl_s^Y = Fl_{-t}^X \circ Fl_s^Y \circ Fl_t^X = Fl_s^{(Fl_t^X)^* Y}$

per il lemma 3.8.3; e questo è a sua volta equivalente a $Y = (Fl_t^X)^* Y$. □

**Teorema 3.8.5.** *Sia $M$ una varietà, siano*

$$\varphi^i : \mathbb{R} \times M \supset U_{\varphi^i} \to M$$

*delle applicazioni lisce per i=1,. . . ,k dove ogni $U_{\varphi^i}$ è un intorno aperto di $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$, tale che ogni $\varphi_t^i$ è un diffeomorfismo sul suo dominio, $\varphi_0^i = Id_M$, e $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \varphi_t^i = X_i \in \mathfrak{X}(M)$. Poniamo*

$$[\varphi^i, \varphi^j]_t = [\varphi_t^i, \varphi_t^j] := (\varphi_t^j)^{-1} \circ (\varphi_t^i)^{-1} \circ \varphi_t^j \circ \varphi_t^i.$$

*Allora per ogni espressione formale data da una parentesi $P$ di lunghezza $k$ abbiamo*

$$0 = \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}|_0 P(\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^k) \qquad \textit{per } 1 \le \ell < k,$$

$$P(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}|_0 P(\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^k) \in \mathfrak{X}(M)$$

*nel senso spiegato nel passo 2 della dimostrazione. In particolare, per i campi di vettori $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}|_0 (Fl^Y_{-t} \circ Fl^X_{-} t \circ Fl^Y_t \circ Fl^X_t),$$

$$[X, Y] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}|_0 (Fl^Y_{-t} \circ Fl^X_{-t} \circ Fl^Y_t \circ Fl^X_t)$$

*Dimostrazione. Passo 1.*

Sia $c : \mathbb{R} \to M$ una curva liscia. Se $c(0) = x \in M$, $c'(0) = 0, \dots, c^{(k-1)}(0) = 0$, allora $c^{(k)}(0)$ è un vettore tangente, ben definito in $T_xM$, che è dato dalla derivazione $f \mapsto (f \circ c)^{(k)}(0)$ in $x$. Perciò abbiamo

$$\begin{aligned} ((f.g) \circ c)^{(k)}(0) &= ((f \circ c).(g \circ c))^{(k)}(0) = \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (f \circ c)^{(j)}(0)(g \circ c)^{(k-j)}(0) = \\ &= (f \circ c)^{(k)}(0)g(x) + f(x)(g \circ c)^{(k)}(0), \end{aligned}$$

dal momento che tutti gli addendi svaniscono: $(f \circ c)^{(j)}(0) = 0$ per $1 \le j < k$.

*Passo 2.*

Sia $\varphi : \mathbb{R} \times M \supset U_\varphi \to M$ un'applicazione liscia, dove $U_\varphi$ è un intorno aperto di $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$, tale che ogni $\varphi_t$ è un diffeomorfismo sul suo dominio e $\varphi_0 = Id_M$. Diciamo che $\varphi_t$ è una *curva del diffoemorfismo locale* attraverso $Id_M$.

Dal passo 1 si vede che, se $\frac{\partial^j}{\partial t^j}|_0 \varphi_t = 0$ per ogni $1 \le j < k$, allora $X := \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}|_0 \varphi_t$ è un campo di vettori ben definito su M. Diciamo che X è la *prima derivata che non si annulla* in 0 della curva $\varphi_t$ del diffeomorfismo locale. Possiamo riscrivere questo come

$$\partial_t^k|_0 (\varphi_t^*) f = k! \mathcal{L}_X f.$$

*Passo 3.*

Siano $\varphi_t, \psi_t$ due curve del diffeomorfismo locale attraverso $Id_M$, e sia $f \in C^\infty(M)$. Allora abbiamo

$$\partial_t^k|_0 (\varphi_t \circ \psi_t)^* f = \partial_t^k|_0 (\psi_t^* \circ \varphi_t^*) f = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\partial_t^j|_0 \psi_t^*)(\partial_t^{k-j}|_0 \varphi_t^*) f.$$

Vale anche la versione multinomiale di questa formula:

$$\partial_t^k|_0 (\varphi_t^1 \circ \dots \circ \varphi_t^\ell)^* f = \sum_{j_1 + \dots + j_\ell = k} \frac{k!}{j_1! \dots j_\ell!} (\partial_t^{j_\ell}|_0 (\varphi_t^\ell)^*) \dots (\partial_t^{j_1}|_0 (\varphi_t^1)^*) f.$$

Verifichiamo solo la versione binomiale. Per una funzione $h(t,s)$ di due variabili abbiamo

$$\partial_t^k h(t,t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial_t^j \partial_s^{k-j} h(t,s)|_{s=t},$$

dal momento che, per $h(t,s) = f(t)g(s)$, questa è semplicemente una conseguenza della regola di Leibniz; inoltre, combinazioni lineari di queste sono dense nello spazio di tutte le funzioni di due variabili nella topologia compatta $C^\infty$; così per continuità la formula vale per tutte le funzioni.

Nella seguente forma implica il risultato:

$$\partial_t^k|_0 f(\varphi(t,\psi(t,x))) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial_t^j \partial_s^{k-j} f(\varphi(t,\psi(s,x)))|_{t=s=0}.$$

*Passo 4.*

Sia $\varphi_t$ una curva di un diffeomorfismo locale attraverso $Id_M$ con prima derivata non nulla per $k!X = \partial_t^k|_0 \varphi_t$.

Allora la curva inversa dei diffeomorfismi locali ha la prima derivata non nulla per $-k!X = \partial_t^k|_0 \varphi_t^{-1}$. Per il risultato 3 si ricava ( tenendo conto del fatto che $\varphi_t^{-1} \circ \varphi_t = Id$), per $1 \le j \le k$,

$$0 = \partial_t^j|_0 (\varphi_t^{-1} \circ \varphi_t)^* f = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (\partial_t^i|_0 \varphi_t^*)(\partial_t^{j-i}(\varphi_t^{-1})^*) f =$$

$$= \partial_t^j|_0 \varphi_t^* (\varphi_0^{-1})^* f + \varphi_0^* \partial_t^j|_0 (\varphi_t^{-1})^* f,$$

cioè $\partial_t^j|_0 \varphi_t^* f = -\partial_t^j|_0 (\varphi_t^{-1})^* f$, come richiesto.

*Passo 5.*

Sia $\varphi_t$ una curva dei diffeomorfismi locale attreverso $Id_M$, con prima derivata non nulla per $m!X = \partial_t^m|_0 \varphi_t$, e sia $\psi_t$ una curva dei diffeomorfismi locali attraverso $Id_M$, con prima derivata non nulla per $n!Y = \partial_t^n|_0 \psi_t$.

Allora la curva del diffeomorfismo locale $[\varphi_t, \psi_t] = \psi_t^{-1} \circ \varphi_t^{-1} \circ \psi_t \circ \varphi_t$ ha prima derivata non nulla

$$(m+n)![X,Y] = \partial_t^{m+n}|_0 [\varphi_t, \psi_t].$$

Il teorema segue da questo risultato.

Per la versione multinomiale del risultato 3 abbiamo:

$$A_N f := \partial_t^N|_0 (\psi_t^{-1} \circ \varphi_t^{-1} \circ \psi_t \circ \varphi_t)^* f =$$

$$\sum_{i+j+k+\ell=N} \frac{N!}{i!j!k!\ell!} (\partial_t^i|_0 \varphi_t^*)(\partial_t^j|_0 \psi_t^*)(\partial_t^k|_0 (\varphi_t^{-1})^*)(\partial_t^\ell|_0 (\psi_t^{-1})^*) f.$$

Supponiamo che $1 \le n \le m$ (il caso $m \le n$ è simile). Se $N < n$ tutte le somme sono nulle. Se N=n abbiamo, per il risultato 4,

$$A_N f := (\partial_t^n|_0 \varphi_t^*) f + (\partial_t^n|_0 \psi_t^*) f + (\partial_t^n|_0 (\varphi_t^{-1})^*) f + (\partial_t^n|_0 (\psi_t^{-1})^*) f = 0.$$

Se $n < N \le m$ abbiamo, usando di nuovo il risultato 4:

$$A_N f = \sum_{j+\ell=N} \frac{N!}{j!\ell!} (\partial_t^j|_0 \psi_t^*)(\partial_t^\ell|_0 (\psi_t^{-1})^*) f + \delta_N^m ((\partial_t^m|_0 \varphi_t^*) f + (\partial_t^m|_0 (\varphi_t^{-1})^*) f)$$

$$= (\partial_t^N|_0(\psi_t^{-1}\circ\psi_t)^*)f + 0 = 0.$$

E ora l'ultimo caso, $m, n < N \leq m+n$

$$\begin{aligned} &A_N f = \\ &= \partial_t^N|_0(\psi_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}\circ\psi_t)^* f + \binom{N}{m}(\partial_t^m|_0\varphi_t^*)(\partial_t^{N-m}|_0(\psi_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}\circ\psi_t)^*)f \\ &+(\partial_t^N|_0\varphi_t^*)f, \end{aligned} \tag{1}$$

per il passo 3, dal momento che tutti gli altri termini svaniscono, vedere (3) qui sotto.

Dal risultato 3 abbiamo di nuovo:

$$\begin{aligned} &\partial_t^N|_0(\psi_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}\circ\psi_t)^* f = \\ &= \sum_{j+k+\ell=N}\frac{N!}{j!k!\ell!}(\partial_t^j|_0\psi_t^*)(\partial_t^k|_0(\varphi_t^{-1})^*)(\partial_t^\ell|_0(\psi_t^{-1})^*)f = \\ &= \sum_{j+\ell=N}\binom{N}{j}(\partial_t^j|_0\psi_t^*)(\partial_t^\ell|_0(\psi_t^{-1})^*)f + \\ &+\binom{N}{m}(\partial_t^{N-m}|_0\psi_t^*)(\partial_t^m|_0(\varphi_t^{-1})^*)f + \\ &+\binom{N}{m}(\partial_t^m|_0(\varphi_t^{-1})^*)(\partial_t^{N-m}|_0(\psi_t^{-1})^*)f + \partial_t^N|_0(\varphi_t^{-1})^* f = \\ &= 0 + \binom{N}{m}(\partial_t^{N-m}|_0\psi_t^*)m!\mathcal{L}_{-X}f + \binom{N}{m}m!\mathcal{L}_{-X}(\partial_t^{N-m}|_0(\psi_t^{-1})^*)f + \\ &+\partial_t^N|_0(\varphi_t^{-1})^* f = \\ &= \delta_{m+n}^N(m+n)!(\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X)f + \partial_t^N|_0(\varphi_t^{-1})^* f = \\ &= \delta_{m+n}^N(m+n)!\mathcal{L}_{[X,Y]}f + \partial_t^N|_0(\varphi_t^{-1})^* f. \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla seconda espressione in (2) possiamo estrarre anche

$$\partial_t^{N-m}|_0(\psi_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}\circ\psi_t)^* f = \partial_t^{N-m}|_0(\varphi_t^{-1})^* f. \tag{3}$$

Se mettiamo (2) e (3) in (1) otteniamo, usando di nuovo i passi 3 e 4, il passaggio finale che prova il passo 5 e il teorema:

$$\begin{aligned} A_N f &= \delta_{m+n}^N(m+n)!\mathcal{L}_{[X,Y]}f + \partial_t^N|_0(\varphi_t^{-1})^* f + \\ &+\binom{N}{m}(\partial_t^m|_0(\varphi_t^*)(\partial_t^{N-m}|_0(\varphi_t^{-1})^*)f + (\partial_t^N|_0\varphi_t^*)f = \\ &= \delta_{m+n}^N(m+n)!\mathcal{L}_{[X,Y]}f + \partial_t^N|_0(\varphi_t^{-1}\circ\varphi_t)^* f \\ &= \delta_{m+n}^N(m+n)!\mathcal{L}_{[X,Y]}f + 0. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.8.6.** *Siano $X_1, X_2, \dots X_m$ dei campi di vettori su $M$ definiti in un intorno di un punto $x \in M$ tali che $X_1(x), \dots, X_m(x)$ siano una base per $T_xM$ e $[X_i, X_j] = 0$ per ogni $i, j$.*

*Allora c'è una carta $(U, u)$ di $M$ centrata in $x$ tale che $X_i|_U = \frac{\partial}{\partial u^i}$.*

*Dimostrazione.* Per piccoli valori di $t = (t^1, \dots, t^m) \in \mathbb{R}^m$ poniamo

$$f(t^1, \dots t^m) = (Fl^{X_1}_{t^1} \circ \dots \circ Fl^{X_m}_{t^m})(x)$$

Per il corollario 3.8.4, possiamo interscambiare l'ordine dei flussi arbitrariamente. Dunque

$$\frac{\partial}{\partial t^i} f(t^1, \dots, t^m) = \frac{\partial}{\partial t^i}(Fl^{X_i}_{t^i} \circ Fl^{X_1}_{t^1} \circ \dots)(x) = X_i((Fl^{X_1}_{t^1} \circ \dots)(x)).$$

Perciò $T_0 f$ è invertibile, $f$ è un diffeomorfismo locale e la sua inversa fornisce una carta con le proprietà desiderate. □

# Capitolo 4

# Teoremi di Ehresmann e Frobenius

## 4.1 Il teorema di Ehresmann

**Definizione 4.1.1.** Sia $f\colon M \to N$ un'applicazione liscia. Diciamo che $f$ è una *fibrazione localmente banale* se, per ogni $p \in M$, esistono un intorno aperto $U$ e un diffeomorfismo

$$h\colon U \times f^{-1}(p) \to f^{-1}(U)$$

tali che

$$\begin{tikzcd} U \times f^{-1}(p) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "pr_U"'] & & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f|_{f^{-1}(U)}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

commuta.

Se $U \in M$ è un intorno piccolo, una fibrazione localmente banale si comporta come la proiezione $U \times f^{-1}(p) \to U$.

**Esempio 4.1.2.** Se $M$ è il toro $S^1 \times S^1$, e $N$ è la sfera $S^1$, la fibrazione è *globalmente* banale: cioè vale $f^{-1}(U) \cong U \times f^{-1}(p)$ per ogni $U \subseteq M$, e questo accade perché il toro è globalmente un prodotto. Comunque, a causa della scarsità di varietà 2-dimensionali, il toro è l'unico esempio che si può fare in $\mathbb{R}^3$.

**Esempio 4.1.3.** La proiezione della bottiglia di Klein sul suo cerchio centrale, invece, è effettivamente una fibrazione localmente banale.

**Definizione 4.1.4.** Un'applicazione continua $f\colon A \to B$ si dice *propria* se è chiusa, cioè se $f(C)$ è chiuso per ogni $C$ chiuso in $A$, e le fibre $f^{-1}(b)$ sono compatte.

**Teorema 4.1.5** (Teorema di Ehresmann)**.** *Sia $M$ una varietà differenziabile, $B$ un aperto di $\mathbb{R}^m$, e $\omega\colon M \to B$ un'applicazione propria $C^\infty$. Supponiamo che il differenziale di $\omega$ sia surgettivo in ogni punto di $M$. Allora $\omega$ è una fibrazione localmente banale.*

*Dimostrazione.* Dal momento che questo è un problema locale su $B$, possiamo assumere che $B \equiv \mathbb{R}^m$, e dunque che contenga lo 0: pertanto basta provare che esistono $U \subset \mathbb{R}^m$ e un diffeomorfismo $\psi\colon U \times \omega^{-1}(0) \to \omega^{-1}(U)$ tali che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} U \times \omega^{-1}(0) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \omega^{-1}(U) \arrow[dl, "\omega"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Consideriamo su $B$ un sistema di coordinate locali $(t_1, \ldots, t_m)$ centrato in 0: ad esse sono associati i campi di vettori

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}\right).$$

Poiché il differenziale di $\omega$ è surgettivo in ogni punto, esso avrà ovunque rango massimo, cioè $m$. Allora, per il teorema del rango costante, per ogni $p \in \omega^{-1}(0)$ esistono le carte $x_p\colon U_p \to U'_p$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd} U_p \subset M \arrow[rr, "x_p"] \arrow[dr, "\omega|_{U_p}"'] & & U'_p \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi"] \\ & B \equiv \mathbb{R}^m & \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $\omega = \pi \circ x_p$.

Dunque, $\bigcup_{p\in\omega^{-1}(0)} U_p$ è un ricoprimento di $\omega^{-1}(0)$: consideriamo la partizione dell'unità corrispondente ad esso, e indichiamola con $\{\varphi_j\}$: per ogni $j$, scegliamo un aperto $U_p$ del ricoprimento tale che $supp(\varphi_j) \subset U_p$, e indichiamo la carta $(U_p, x_p)$ come $(U_j, x_j)$. Otteniamo così un atlante al più numerabile per $\omega^{-1}(0)$.

A partire dal campo di vettori $\frac{\partial}{\partial t_i}$ definito su $B$, definiamo il campo di vettori sulla carta $U_j$ come:

$$\begin{aligned} Y_{i,j}(q) &= germ_q f_{i,j}\colon U_j \to TU_j, dove \\ f_{i,j}(q)(t) &= x_j^{-1}(x_j(q) + e_i t) \end{aligned}$$

dove $e_i \in \mathbb{R}^n$ è l'$i$-esimo vettore unitario. Ora definiamo il campo

$$Y_i = \sum_j \varphi_j Y_{i,j}\colon M \to TM,$$

i cui elementi sono una versione globale della $i$-esima derivata parziale su $M$, ottenuta incollando con le partizioni dell'unità.

La funzione $\omega$ agisce in questo modo:

$$\begin{aligned} \omega\colon M &\to B \\ Y_i &\mapsto \frac{\partial}{\partial t_i} \end{aligned}$$

e pertanto i campi $Y_i$ sono $\omega$-correlati ai campi $\frac{\partial}{\partial t_i}$:

$$d\omega_x(Y_i(x)) = \frac{\partial}{\partial t_i}, \text{ per ogni } x \in M.$$

Ora, sia $\eta$ una funzione di $C^\infty(B)$ a supporto compatto, tale che $\eta \equiv 1$ in un intorno di 0. Anche la funzione $\eta \circ \omega \colon M \to \mathbb{R}$ ha supporto compatto: infatti,

$$supp(\eta \circ \omega) \subset \omega^{-1} supp(\eta)$$

visto che, essendo $\omega$ chiusa, $supp(\eta \circ \omega)$ è un sottoinsieme chiuso di un compatto, e dunque è a sua volta un compatto; costruisco i campi:

$$X_i = \eta \circ \omega \circ Y_i;$$

essi sono a supporto compatto, quindi per il lemma 3.5.4 i flussi corrispondenti sono integrabili ovunque.

Sia $U = \{b \in B | \eta(b) = 1\}$. A meno di restringerlo, posso assumere che $U = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$.

Definiamo l'applicazione $\psi \colon U \times M_0 \to M$, tale che

$$\psi(t_1, \dots, t_m, x) = Fl_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ Fl_{t_m}^{X_m}(x),$$

e affermiamo che questa è l'applicazione cercata, che chiude il diagramma

$$\begin{tikzcd} M_0 \times U \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \omega^{-1}(U) \arrow[dl, "\omega"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

e che è un diffeomorfismo; infatti:

1. Il diagramma commuta: $\omega \circ \psi = \pi$.

   Poiché i campi $X_i$ e $\frac{\partial}{\partial t_i}$ sono $\omega$-correlati, i flussi commutano:

   $$\omega(Fl_{t_1}^{X_1}(y)) = Fl_{t_1}^{\frac{\partial}{\partial t_1}}(\omega(y)) = \omega(x) + (t_1, 0, \dots, 0)$$

   e dunque, integrando nelle diverse direzioni,

   $$\omega(\psi(t_1, \dots, t_n, x)) = \omega(Fl_{t_1}^{Y_1} \circ \dots \circ Fl_{t_n}^{Y_n}(x)) = \omega(x) + (t_1, \dots, t_n).$$

   Se $x \in M_0$, allora per definizione $\omega(x) = 0$, e quindi $\omega(\psi(t_1, \dots, t_n, x)) = (t_1, \dots, t_n)$.

2. $\psi$ è un diffeomorfismo. Infatti i flussi sono completi, quindi posso certamente costruire l'inverso di ogni flusso, e l'inverso di $\psi$ è la composizione degli inversi dei flussi:

   $$\psi^{-1}(y) = Fl_{-t_n}^{X_n} \circ \dots \circ Fl_{-t_1}^{X_1}(y).$$

□

**Osservazione 4.1.6.** Dal momento che $\omega$ è liscia per ogni $c \in B$, esistono un intorno $U(c)$ sufficientemente piccolo con centro in $c$ e un diffeomorfismo $\psi_c \colon M_c \times U(c) \to \omega^{-1}(U(c))$ tale che $\omega \circ \psi_c = \pi_c$, dove $\pi$ è la proiezione sul secondo fattore.

**Corollario 4.1.7.** *Se $B$ è connesso, allora le fibre sono tutte diffeomorfe.*

*Dimostrazione.* Infatti, per ogni $t \in U(c)$, il diffeomorfismo $\psi_c$ manda ogni $M_c \times t$ su $M_t = \omega^{-1}(t)$. Perciò, per $t \in U(c)$, $M_t$ è diffeomorfa a $M_c$.

Per ogni coppia di punti $t, t_0$ di $B$ possiamo scegliere una serie di intorni aperti $U(c_o), \dots, U(c_l)$ come nell'osservazione, in modo che $t_0 \in U(c_0)$, $t \in U(c_l)$ e $U(c_{j-1}) \cap U(c_j) \neq \emptyset$ per $j = 1, \dots l$. Pertanto $M_t = \omega^{-1}(t)$ è diffeomorfo a $M_{t_0} = \omega^{-1}(t_0)$. □

## 4.2 Il teorema di Frobenius

**Definizione 4.2.1.** Sia $M$ una varietà. Per *sottofibrato vettoriale* $E$ di $TM$ di dimensione fibrata $k$, intendiamo un sottoinsieme $E \subset TM$ tale che ogni $E_x := E \cap T_xM$ sia un sottospazio lineare di dimensione $k$, e tale che, per ogni $x \in M$, ci siano $k$ campi di vettori definiti su un intorno aperto di $M$ a valori in $E$ e che generano $E$, chiamati un *frame locale* per $E$. Tale $E$ si dice anche una *distribuzione* liscia di rango costante $k$. Lo spazio di tutti i campi di vettori a valori in $E$ sarà indicato come $\Gamma(E)$.

**Definizione 4.2.2.** Il sottofibrato vettoriale $E$ di $TM$ si dice *integrabile* o *involutivo* se, per ogni $X, Y \in \Gamma(E)$, anche $[X, Y] \in \Gamma(E)$.

**Teorema 4.2.3** (Versione locale del teorema di Frobenius)**.** *Sia $E \subset TM$ un sottofibrato vettoriale integrabile di dimensione fibrata $k$ di $TM$. Allora, per ogni $x \in M$, esiste una carta $(U, u)$ di $M$ centrata in $x$, con $u(U) = V \times W \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, tale che*

$$T(u^{-1}(V \times \{y\})) = E|_{(u^{-1}(V \times \{y\}))}$$

*per ogni $y \in W$.*

*Dimostrazione.* Sia $x \in M$, e scegliamo una carta $(U, u)$ di $M$ centrata in $x$ tale che esistano $k$ campi di vettori $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(E)$ che formino un frame di $E|_U$: allora abbiamo

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} f_i^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

per $f_i^j \in C^\infty(U)$.

Dunque $f = (f_i^j)$ è una matrice $(k \times m)$ i cui valori sono funzioni lisce su $U$, e che ha rango $k$ in $U$. Perciò esiste una sottomatrice $(k \times k)$, assumeremo che sia quella superiore, che è invertibile in $x$ e, poiché $f$ è liscia, possiamo prendere un intorno $U$ sufficientemente piccolo in cui questa sottomatrice è invertibile.

Sia $g = (g_i^j)$ l'inversa di questa sottomatrice, in modo che $f.g = (\frac{Id}{*})$. Poniamo

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} g_i^j X_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{m} g_i^j f_j^l \frac{\partial}{\partial u^l} = \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{p \geq k+1} h_i^p \frac{\partial}{\partial u^p} \tag{4.1}$$

Proviamo ora che $[Y_i, Y_j] = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq k$. Dal momento che E è integrabile, abbiamo

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{l=1}^{k} c_{ij}^l Y_l.$$

Ma da 4.1 concludiamo, usando la formula delle coordinate 3.2.2 che

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{p \geq k+1} a_i^p \frac{\partial}{\partial u^p}.$$

Di nuovo per 4.1 ciò implica che $c_{ij}^l = 0$ per ogni $l$, e dunque segue che $[Y_i, Y_j] = 0$.

Ora consideriamo un sottospazio lineare $(m-k)$-dimensionale $W_1$ in $\mathbb{R}^m$, che è trasverso ai $k$ vettori $T_x u \cdot Y_i(x) \in T_0\mathbb{R}^m$ che generano $\mathbb{R}^k$, e definiamo $f \colon V \times W \to U$ come

$$f(t^1, \ldots, t^k, y) := \left( Fl_{t^1}^{Y_1} \circ Fl_{t^2}^{Y_2} \circ \cdots \circ Fl_{t^k}^{Y_k} \right) (u^{-1}(y)),$$

dove $t = (t^1, \ldots, t^k) \in V$, un piccolo intorno di 0 in $\mathbb{R}^k$, e dove $y \in W$, un piccolo intorno di 0 in $W_1$. Dalla 3.8.4 possiamo interscambiare arbitrariamente l'ordine dei flussi nella definizione di $f$. Perciò

$$\frac{\partial}{\partial t^i} f(t, y) = \frac{\partial}{\partial t^i} \left( Fl_{t^i}^{Y_i} \circ Fl_{t^1}^{Y_1} \circ \ldots)(u^{-1}(y)\right) = Y_i(f(t, y)),$$

$$\frac{\partial}{\partial y^k} f(0, y) = \frac{\partial}{\partial y^k} (u^{-1}(y)),$$

e così $T_0 f$ è invertibile e l'inversa di $f$ sull'intorno $W$ di $x$ ci fornisce la carta richiesta. □

**Definizione 4.2.4.** Ogni carta $(U, u : U \to V \times W \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k})$ (con $U$ e $V$ palle aperte) come quella costruita nella versione locale del teorema di Frobenius 4.2.3 si dice *carta distinguibile* per $E$.

Le sottovarietà $u^{-1}(V \times \{y\})$ sono dette *placche*. Due placche di due differenti carte distinguibili si intersecano in sottoinsiemi che sono aperti in entrambe le carte o in nessuna delle due. Perciò un atlante di carte distinguibili su $M$ ha applicazioni per il cambiamento di carte che rispettano la submersione $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \to \mathbb{R}^{m-k}$ (la struttura delle placche su M). Un tale atlante (o una classe di equivalenza di atlanti di tale tipo) si dice una *foliazione corrispondente al sottofibrato vettoriale integrabile $E \subset TM$.*

**Teorema 4.2.5** (Versione globale del teorema di Frobenius)**.** *Sia $E \subsetneq TM$ un sottofibrato integrabile di $TM$. Una nuova struttura di varietà liscia su $M$ si ottiene considerando come carte le restrizioni delle carte distinguibili alle placche. Chiameremo $M_e$ questa nuova struttura.*

*Se $E \neq TM$, allora*

- *la topologia di $M_E$ è più fine di quella di $M$,*
- *$M_E$ ha una quantità non numerabile di componenti connesse, dette le foglie della foliazione,*
- *l'identità induce un'immersione bigettiva $M_E \to M$.*

*Ogni foglia $L$ è una sottovarietà iniziale a base numerabile di $M$, ed è una sottovarietà integrabile massimale di $M$ per $E$, nel senso che $T_x L = E_x$ per ogni $x \in L$.*

*Dimostrazione.* Sia

$$(U_\alpha, u_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha \times W_\alpha \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k})$$

un atlante di carte distinguibili corrispondente al sottofibrato vettoriale integrabile $E \subset TM$, come dato dalla versione locale del Teorema di Frobenius. Ora, per ogni placca prendiamo come carte gli omeomorfismi

$$pr_1 \circ u_\alpha|_{(u_\alpha^{-1}(V_\alpha \times \{y\}))} \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^{m-k};$$

in questo modo descriviamo su $M$ una nuova struttura di varietà liscia $M_E$, con una topologia più fine, che comunque ha una quantità non numerabile di componenti connesse, e l'identità induce un'immersione bigettiva $M_E \to M$. Chiameremo *foglie della foliazione* le componenti connesse di $M_E$.

Per provare il resto delle asserzioni, costruiamo l'unica foglia $L$ per un arbitrario punto $x \in M$: scegliamo una placca contenente $x$ e prendiamo l'unione di essa con tutte le altre placche che la intersecano, e così via.

Ora, scegliamo un punto $y \in L$ e una curva $c\colon [0,1] \to L$ con $c(0) = x$ e $c(1) = y$. Allora c'è un numero finito di carte distinguibili $(U_1, u_1), \ldots, (U_n, u_n)$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{m-k}$ tali che $x \in u_1^{-1}(V_1 \times \{a_1\})$, $y \in u_n^{-1}(V_n \times \{a_n\})$ e tali che, per ogni $i$,

$$u_i^{-1}(V_i \times \{a_i\}) \cap u_{i+1}^{-1}(V_{i+1} \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset. \tag{4.2}$$

Dati $u_i$ $u_{i+1}$ e $a_i$, facciamo vedere che c'è solo un insieme numerabile di punti $a_{i+1}$ per i quali vale 4.2: supponiamo per assurdo che esista un ricoprimento della sottovarietà separabile $u_i^{-1}(V_1 \times \{a_i\}) \cap U_{i+1}$ fatto da una famiglia non numerabile di coppie disgiunte di insiemi aperti della forma data in 4.2: ma è assurdo, perché contraddirrebbe la separabilità.

Infine, dal momento che, per come abbiamo definito le varietà, ogni ricoprimento aperto di una componente di $M$ ammette un sottoricoprimento numerabile, ogni atlante distinguibile contiene un sottoatlante numerabile. Così ogni foglia è l'unione di una famiglia al più numerabile di placche. $\square$

# Bibliografia

[1] Peter W. Michor.*Topics in Differential Geometry.* Institut für Mathematische Physik, Wien, 2004.

[2] W.M.Boothby.*An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2nd Ed. Academic Press, New York, 1986.

[3] Charles Ehresmann.*Sur les espaces fibrés differentiables*, C. R. Acad. Sci., Paris, 224, (1947).(pp.1611-1612).

[4] Stefano Marchiafava.*Appunti di Geometria Differenziale, parte 1*, Ed. Nuova Cultura, Roma, 2005.

[5] Kunihiko Kodaira.*Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[6] Bjørn Ian Dundas.*Differential Topology*, 2002, note disponibili in rete all'indirizzo *www.INTLPRESS.COM/JDG/p/2000/56-1-2.pdf.*

[7] Georg Frobenius.*Über das Pfaffsche probleme.* J. für Reine und Agnew. Math., 82 (1877).(pp. 230-315).