1. Esercizi del 6 ottobre 2008

Esercizio 1. Sia $f \in C^\infty(U)$ tale le cui derivate parziali si annullano tutte in un punto $p \in U$ e quindi $X(f)(p) = 0$ per ogni campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(U)$.

Dimostrare che l'applicazione

$$T_pU \times T_pU \to \mathbb{R}, \qquad (v_1, v_2) \mapsto X_1(X_2 f)(p),$$

dove $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(U)$ estendono i vettori tangenti v_1, v_2, è ben definita, bilineare e simmetrica.

Esercizio 2. Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ un'applicazione C^∞ tale che $\gamma(0) = I$ e

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma(t)E(t),$$

dove $E(t)$ è una matrice a traccia nulla. Dimostrare che $\det \gamma(t) = 1$ per ogni t.

Esercizio 3. Mostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'applicazione C^∞

$$f\colon [0,1] \to [0,1]$$

tale che $|f(x) - x| < \epsilon$ per ogni x e

$$\frac{d^n f}{dx^n}(0) = \frac{d^n f}{dx^n}(1) = 0, \qquad \forall n > 0.$$

Esercizio 4. Mostrare che esiste un'applicazione iniettiva e di classe C^∞ $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ la cui immagine è il quadrato $Q = \{(x_1, x_2) \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$.

Esercizio 5. Provare che esiste un'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ la cui immagine contiene tutti i punti a coordinate razionali.

Ricordiamo il seguente teorema di calcolo differenziale.

Teorema 1.1. *Sia f_n una successione di funzioni C^1 su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se le funzioni f_n e $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ sono tutte limitate in U e se*

$$\sum_n \sup_{x \in U} \left(|f_n(x)| + \sum_i |\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)| \right) < \infty$$

allora la serie $f = \sum_n f_n$ è definita ed è di classe C^1.

Esercizio 6. Sia $f_n\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ una successione di funzioni C^∞. Dimostrare che esiste una successione di numeri reali positivi a_n tale che $\sum_n a_n f_n$ è di classe C^∞ du $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 7. Dimostrare che ogni chiuso di $\mathbb{R}^n$ è il luogo di zeri di una funzione C^∞.

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ di classe C^∞ a supporto compatto che vale 1 in un intorno di 0. Dimostrare che esiste una successione di numeri reali positivi c_n tali che $\sum_n f_n(c_n t)t^n$ è di classe C^∞.

Esercizio 9. Dimostrare che per ogni successione $a_n \in \mathbb{R}$ esiste una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\frac{d^n f}{dx^n}(0) = a_n, \qquad \forall n \geq 0.$$

Geometria differenziale 2008-09, M.M.