ESERCIZI (TOSTI) DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 15 OTTOBRE 2008

Esercizio 1. Sia X varietà differenziabile e $p, q \in X$ punti distinti. Dimostrare che esiste $f \in C^\infty(X)$ tale che $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$.

Esercizio 2. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^n$ aperti e $F: U \to V$ differenziabile. Provare che se il differenziale di F è bigettivo in ogni punto, allora F è un'applicazione aperta.

Esercizio 3. Trovare un esempio di diffeomorfismo locale tra due aperti connessi di $\mathbb{R}^2$ che sia surgettivo ma non iniettivo.

Esercizio 4. Sia X una varietà differenziabile e sia $f: X \to Y$ un omeomorfismo. Allora esiste unica una struttura differenziabile su Y per la quale f risulta un diffeomorfismo.

Esercizio 5. Siano M, N due varietà differenziabili. Mostrare che esiste unica una struttura differenziabile sul prodotto $M \times N$ tale che:

(1) Le proiezioni $M \times N \to M$ e $M \times N \to N$ sono applicazioni differenziabili.
(2) Per ogni varietà differenziabile Z e per ogni coppia di applicazioni differenziabili $f: Z \to M$ e $g: Z \to N$, l'applicazione $(f, g): Z \to M \times N$ è differenziabile.

Dedurre che nella categoria delle varietà differenziabili esistono i prodotti.

Esercizio 6. Siano $X \subset M_{n,m}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici di rango k (con $k \leq \min(n, m)$) e $U \subset X$ lo spazio delle matrici (a_{ij}) di rango k il cui minore di ordine k in alto a sinistra (a_{ij}) $i, j = 1, \ldots, k$, è invertibile. Dimostrare che:

(1) U è aperto in X.
(2) U è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{k^2+k(n-k)+k(m-k)}$.
(3) X è una sottovarietà differenziabile di dimensione $k(n + m - k)$.
(4) X è connessa se e solo se $k < \max(n, m)$.

Esercizio 7 (Per chi conosce la teoria dei rivestimenti)**.** Sia X una varietà differenziabile connessa e $p: E \to X$ un rivestimento. Dimostrare che esiste unica una struttura differenziabile su E che rende p un diffeomorfismo locale.

Esercizio 8. Siano X, Z varietà differenziabili e $Y \subset X$ una sottovarietà. Dimostrare che un'applicazione $F: Z \to Y$ è differenziabile se e solo se la composizione $Z \to X$ di F con l'inclusione è differenziabile.

Esercizio 9. Dimostrare che la quadrica $X \subset \mathbb{R}^3$ di equazione $x^2+y^2 = tz^2$ è una sottovarietà se e solo se $t \neq 0$.

Esercizio 10. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme chiuso con la proprietà che se $p \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, allora $tp \in X$. Supponiamo inoltre che X non sia contenuto in alcun iperpiano. Dimostrare che X non è una sottovarietà.

Esercizio 11. Sia X una varietà differenziabile. Dimostrare:

(1) Se $p \in X$, allora $\mathfrak{m}_p = \{f \in C^\infty(X) \mid f(p) = 0\}$ è un ideale massimale di $C^\infty(X)$.
(2) Se X è compatta, ogni ideale massimale di $C^\infty(X)$ è della forma $\mathfrak{m}_p$ per qualche $p \in X$.
(3) $(*)$ Il punto precedente senza l'ipotesi di compattezza.