SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

MARCO MANETTI (CON L'AIUTO DI SERENA MURRU)

1. Il prodotto vettoriale

Dati tre vettori in $\mathbb{R}^3$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

denoteremo

$$|a, b, c| = \det(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo la definizione del prodotto scalare

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}.$$

Il **prodotto vettoriale** $a \wedge b \in \mathbb{R}^3$ è univocamente determinato dalla proprietà

$$(a \wedge b) \cdot c = |a, b, c|, \qquad \forall c \in \mathbb{R}^3.$$

Notiamo che:

(1)
$$a \wedge b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

(2) $a \wedge b \neq 0$ se e solo se a, b sono linearmente indipendenti.
(3) $a \wedge b = -b \wedge a$
(4) $(a \wedge b) \cdot a = (a \wedge b) \cdot b = 0$.
(5) $(a \wedge b) \cdot c = (b \wedge c) \cdot a = (c \wedge a) \cdot b$.
(6) $\|a \wedge b\|^2 = |a, b, a \wedge b| = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2$.

Dunque $a \wedge b$ è un vettore perpendicolare ad a e b e di lunghezza uguale al prodotto delle norme di a e b per il seno dell'angolo compreso.

I prodotti scalare e vettoriale sono entrambi bilineari, simmetrico il primo, alternante il secondo. In particolare, se $\alpha, \beta \colon]r, s[\to \mathbb{R}^3$ sono due applicazioni differenziabili, allora vale

$$\frac{d}{dt}(a(t) \cdot b(t)) = \frac{da}{dt}(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot \frac{db}{dt}(t),$$

$$\frac{d}{dt}(a(t) \wedge b(t)) = \frac{da}{dt}(t) \wedge b(t) + a(t) \wedge \frac{db}{dt}(t).$$

Date: Versione preliminare, 7 gennaio 2009.

Esercizi.

1. Siano a, b due vettori di norma 1. Provare che $a \wedge b = c$ se e solo se la matrice (a, b, c) è speciale ortogonale.

2. Sia E una matrice ortogonale. Provare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}^3$ valgono le formule

$$(Ea) \cdot (Eb) = a \cdot b, \qquad (Ea) \wedge (Eb) = \det(E)E(a \wedge b).$$

2. Superfici in $\mathbb{R}^3$

2.1. **Definizione.** Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare se per ogni punto $p \in S$ esiste un intorno V di p in $\mathbb{R}^3$, un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$ ed una applicazione differenziabile $X : U \longrightarrow V \cap S$ tale che:

(1) X è un omeomorfismo;
(2) Il differenziale dX ha rango massimo in ogni punto di U.

L'applicazione X si dice una *parametrizzazione regolare* in un intorno del punto p. $V \cap S = X(U)$ di dice una *porzione di superficie parametrica regolare.*

Siano u, v coordinate su $U \subset \mathbb{R}^2$ e sia $p = X(u_0, v_0)$; allora lo spazio tangente T_pS ad S nel punto p è esattamente l'immagine di $\mathbb{R}^2$ tramite l'applicazione lineare $dX_{(u_0,v_0)}$. Dalla regola di derivazione della funzione composta segue che:

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \qquad dX_{(u_0,v_0)}(a, b) = \frac{d}{dt}X(u_0 + at, v_0 + bt)|_{\, t=0} = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

dove

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right),$$
$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right),$$

e dunque X_u e X_v sono una base per T_pS.

Figura da inserire

3. applicazioni isometriche

Consideriamo una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ ed un cammino differenziabile $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ contenuto in S. Siccome $\alpha(t) \in S \quad \forall t$, il vettore velocità $\alpha' = \dfrac{d\alpha}{dt}$ appartiene allo spazio tangente a S in $\alpha(t)$. La lunghezza del cammino è data dalla formula

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\alpha'(s) \cdot \alpha'(s)}\, ds$$

Consideriamo adesso una superficie regolare S' ed un'applicazione differenziabile $f : S \longrightarrow S'$.

3.1. **Definizione.** f si dice una *isometria* se è un omeomorfismo e per ogni cammino differenziabile $\alpha : [a, b] \longrightarrow S$ vale $l(\alpha) = l(f \circ \alpha)$.

3.2. **Proposizione.** *Un diffeomorfismo $f : S \longrightarrow S'$ è un'isometria se e soltanto se per ogni punto $p \in S$ l'applicazione $f_* : T_pS \longrightarrow T_{f(p)}S'$ è un'isometria rispetto ai prodotti scalari indotti dal prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$.*

Dimostrazione. Se f_* è un'isometria $\forall p \in S$ allora, se $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ è un cammino differenziabile, allora $(f \circ \alpha)' = f_* \alpha'$ e $\|f \circ \alpha'\| = \|\alpha'\|$ da cui,

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'\| dt = \int_a^b \|(f \circ \alpha)'\| dt = l(f \circ \alpha)$$

Viceversa, sia f isometria, $p \in S$, $v \in T_pS$, $v \neq 0$. Sia $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S$ tale che $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ e per $0 < t < \epsilon$ sia

$$\phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \|\alpha'(s)\| ds = \frac{1}{t} \int_0^t \|(f \circ \alpha)'(s)\| ds$$

Chiaramente,

$$\lim_{t \to 0} \phi(t) = \|v\| = \|\alpha'(0)\| = \|(f \circ \alpha)'(0)\| = \|f_* v\|$$

e dunque

$$\|f_* v\| = \|v\| \qquad \forall v \in T_pS,$$

cioè f_* conserva le norme. Siccome $u \cdot v = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ ne consegue che f_* conserva anche i prodotti scalari. □

3.3. **Corollario.** *$f : S \longrightarrow S'$ è un'isometria se e soltanto se è un diffeomorfismo e un'isometria locale.*

Dimostrazione. Evidente. □

Il nostro prossimo obiettivo è studiare quando due superfici sono localmente isometriche; a tal fine possiamo limitarci a considerare porzioni di superfici parametriche regolari e introdurre alcuni invarianti isometrici differenziali.

Consideriamo dunque una parametrizzazione regolare:

$$\mathbb{R}^2 \supset U \xrightarrow{X} S \subset \mathbb{R}^3$$

Siano u^1, u^2 le coordinate standard in $\mathbb{R}^2$ e sia

$$X_i = \frac{\partial X}{\partial u^i} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad i = 1, 2$$

$$X_{ij} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^i \partial u^j} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad i, j = 1, 2$$

3.4. **Definizione.** L'applicazione differenziabile $g : U \longrightarrow \mathrm{gl}(2, \mathbb{R})$ definita da $g(u) = (g_{ij}(u))$, dove

$$g_{ij}(u) = X_i(u) \cdot X_j(u)$$

è detta *prima forma fondamentale della parametrizzazione X.*

3.5. *Osservazione.* La prima forma fondamentale è simmetrica e definita positiva, infatti rappresenta il prodotto scalare in T_pS nella base X_1, X_2.

Consideriamo adesso una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S$. Tale curva si rappresenta in U con due funzioni $u^1(t), u^2(t)$, e cioè

$$\alpha(t) = X(u^1(t), u^2(t))$$

La velocità di α è:
$$\alpha' = \frac{d}{dt}X(u^1(t), u^2(t)) = X_1(u^1)' + X_2(u^2)'$$
e dunque
$$\|\alpha'\|^2 = g_{11}((u^1)')^2 + 2g_{12}(u^1)'(u^2)' + g_{22}((u^2)')^2.$$
Si noti che
$$\det(g) = \|X_1\|^2 \cdot \|X_2\|^2 - (X_1 \cdot X_2)^2 = \|X_1 \wedge X_2\|^2 > 0.$$
Il prodotto scalare negli spazi tangenti a S è dunque univocamente determinato dalla prima forma fondamentale. Sia $\tilde{X} : U \longrightarrow \tilde{S}$ un'altra parametrizzazione di superficie regolare e sia $f = \tilde{X} \circ X^{-1} : S \longrightarrow \tilde{S}$

3.6. **Teorema.** *Nelle notazioni precedenti, $f : S \longrightarrow \tilde{S}$ é una isometria se e soltanto se X e $\tilde{X}$ hanno la stessa prima forma fondamentale.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che f è una isometria se e soltanto se $f_* : T_{X(u)}S \longrightarrow T_{\tilde{X}(u)}\tilde{S}$ è una isometria per ogni $u \in U$. Siccome $f_*(X_i) = \tilde{X}_i$ ed i vettori X_i e $\tilde{X}_i$ sono basi dei rispettivi spazi tangenti, l'applicazione f_* è una isometria se e soltanto se $X_i \cdot X_j = \tilde{X}_i \cdot \tilde{X}_j$. □

3.7. **Esempio.** Il piano è localmente isometrico al cilindro: siano infatti
$$S = \{x^3 = 0\}, \qquad \tilde{S} = \{(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\};$$
consideriamo $U \subset \mathbb{R}^2$ un intorno sufficientemente piccolo di 0 e le due parametrizzazioni:
- $X : U \longrightarrow S$, $\quad X(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)$;
- $\tilde{X} : U \longrightarrow \tilde{S}$, $\quad \tilde{X}(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$.

Il calcolo delle prime forme fondamentali è immediato: $g_{11} = \tilde{g}_{11} = 1$, $g_{12} = \tilde{g}_{12} = 0$, $g_{22} = \tilde{g}_{22} = 1$.

3.8. **Esempio** (Superfici di rivoluzione)**.** Consideriamo la parametrizzazione
$$X(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \qquad 0 < u < 2\pi, \quad a < v < b, \quad f(v) > 0.$$
Calcoliamo la prima forma fondamentale:
$$X_1 = (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0), \qquad X_2 = (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)).$$
$$g_{11} = (f(v))^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.$$
In particolare la parametrizzazione è regolare se e solo se $(f')^2 + (g')^2 > 0$.

3.9. **Esempio.** La *catenaria* è la curva piana di parametrizzazione
$$v \mapsto (av, a\cosh v), \qquad a > 0, \quad -\infty < v < \infty.$$
La superficie ottenuta ruotando la catenaria attorno all'asse delle ordinate si chiama *catenoide*. Una parametrizzazione del catenoide è
$$X(u, v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av).$$
Calcoliamo la prima forma fondamentale:
$$X_u(u, v) = (-a\cosh v\sin u, a\cosh v\cos u, 0), \quad X_v(u, v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, a),$$
$$g_{11} = a^2(\cosh v)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2(1 + (\sinh v)^2) = a^2(\cosh v)^2.$$
L'*elicoide retto* è la superficie di parametrizzazione
$$\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{v}\cos(\tilde{u}), \tilde{v}\sin\tilde{u}, a\tilde{u}) \qquad 0 < \tilde{u} < 2\pi.$$

La prima forma fondamentale è:

$$\tilde{X}_{\tilde{u}} = (-\tilde{v}\sin\tilde{u}, \tilde{v}\cos\tilde{u}, a), \quad \tilde{X}_{\tilde{v}} = (\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, 0),$$
$$\tilde{g}_{11} = a^2 + \tilde{v}^2, \quad \tilde{g}_{12} = 0, \quad \tilde{g}_{22} = 1.$$

Consideriamo adesso il seguente cambio di parametro:

$$\tilde{u} = u, \qquad \tilde{v} = a \sinh v.$$

Si tratta di un diffeomorfismo locale fra aperti di $\mathbb{R}^2$, infatti il determinante Jacobiano è $\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} = a\cosh v > 0$.

$$\tilde{X}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au).$$

La prima forma fondamentale diventa:

$$\tilde{g}_{11} = a^2(\cosh v)^2, \quad \tilde{g}_{12} = 0, \quad \tilde{g}_{22} = a^2(\cosh v)^2.$$

Dunque il catenoide e l'elicoide retto sono localmente isometrici.

4. Il vettore normale e la seconda forma fondamentale

Consideriamo una porzione di superficie in $\mathbb{R}^3$:

$$X : U \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3.$$

I vettori X_1, X_2 sono linearmente indipendenti e generano lo spazio tangente a S. Dunque il vettore $X_1 \wedge X_2$ è non nullo e ortogonale al piano tangente.

Possiamo considerare il versore normale

$$N = \frac{X_1 \wedge X_2}{\|X_1 \wedge X_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}(X_1 \wedge X_2) \tag{1}$$

dove g è la prima forma fondamentale.

4.1. *Osservazione.* In ogni punto della superficie esistono esattamente due versori normali.

4.2. **Definizione.** L'applicazione $N : S \longrightarrow S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ che ad ogni punto della superficie associa il versore normale definito in (1) é differenziabile e viene detta *applicazione di Gauss*.

4.3. *Osservazione.* Se $\tilde{u}, \tilde{v}$ è un nuovo sistema di coordinate su U, vale:

$$X_{\tilde{u}} \wedge X_{\tilde{v}} = \det\left(\frac{\partial u, v}{\partial \tilde{u}, \tilde{v}}\right) X_u \wedge X_v.$$

e dunque N resta invariato o cambia segno a seconda se il determinante Jacobiano del cambio di coordinate è positivo o negativo.

4.4. *Osservazione.* Per ogni punto $q \in S$ i vettori $X_1(q), X_2(q), N(q)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

4.5. **Definizione.** Denotiamo $b_{ij} = X_{ij} \cdot N$, per $i, j = 1, 2$. L'applicazione $b : U \longrightarrow \mathrm{gl}(2, \mathbb{R})$, $b(u) = (b_{ij}(u))$ è detta *seconda forma fondamentale* della parametrizzazione X. Per il Teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione $X_{ij} = X_{ji}$ e dunque la seconda forma fondamentale è simmetrica.

4.6. **Esempio.** Consideriamo come superfice il grafico di un'applicazione differenziabile $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(0)=\dfrac{\partial f}{\partial u}(0)=\dfrac{\partial f}{\partial v}(0)=0$. Consideriamo la parametrizzazione $X:\mathbb{R}^2 \longrightarrow S\subset\mathbb{R}^3$, $\quad X(u,v)=(u,v,f(u,v))$.
La prima e la seconda forma fondamentale sono:

$$X_u=(1,0,f_u) \qquad X_v=(0,1,f_v)$$
$$N=\frac{1}{\sqrt{\det(g)}}(-f_u,-f_v,1)$$
$$g_{11}=1+(f_u)^2 \qquad g_{12}=f_u\cdot f_v \qquad g_{22}=1+(f_v)^2$$
$$X_{uu}=(0,0,f_{uu}),\quad X_{uv}=(0,0,f_{uv}),\quad X_{vv}=(0,0,f_{vv}).$$

Dunque:

$$b_{11}=\frac{f_{uu}}{\sqrt{\det(g)}} \qquad b_{12}=\frac{f_{uv}}{\sqrt{\det(g)}} \qquad b_{22}=\frac{f_{vv}}{\sqrt{\det(g)}} \qquad b=\frac{H(f)}{\sqrt{\det(g)}},$$

dove H è la matrice Hessiana. Nel punto $u=v=0$ vale $g=Id$, e $B=H(f)$.

Fissiamo una porzione di superficie $S\subset\mathbb{R}^3$ con applicazione di Gauss $N:S\longrightarrow S^2$ ed un punto $p\in S$. Vogliamo definire un'applicazione lineare $F:T_pS\longrightarrow T_pS$.

Consideriamo una curva $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow S$ tale che $\alpha(0)=p$. Per ogni $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ vale la relazione:

$$N(\alpha(t))\cdot N(\alpha(t))=1$$

Deriviamo rispetto a t nel punto 0.

$$0=\frac{dN\alpha}{dt}(0)\cdot N(\alpha(0))+N(\alpha(0))\cdot\frac{dN\alpha}{dt}(0)$$

Poniamo per definizione $\tilde{F}(\alpha)=-\dfrac{dN\alpha}{dt}(0)$. Dalla relazione precedente segue che $\tilde{F}(\alpha)\cdot N(p)=0$ e dunque $\tilde{F}(\alpha)\in T_pS$.

4.7. **Proposizione.** *$\tilde{F}(\alpha)$ dipende solo dalla mappa di Gauss e dalla velocità $\alpha'(0)\in T_pS$ di α nel punto 0.*

Dimostrazione. Siano u,v coordinate locali su S di centro p: $u(p)=v(p)=0$. Possiamo scrivere $\alpha(t)=X(u(t),v(t))$, dove $u(t),v(t)$ sono funzioni differenzabili tali che $v(0)=u(0)=0$. Possiamo esprimere l'applicazione di Gauss in termini delle coordinate u,v, dunque $N\alpha(t)=N(u(t),v(t))$, e derivando rispetto a t:

$$\tilde{F}(\alpha)=-\frac{dN(\alpha)}{dt}(0)=-\frac{\partial N}{\partial u}(p)\cdot\frac{du}{dt}(0)-\frac{\partial N}{\partial v}(p)\cdot\frac{dv}{dt}(0)$$

Siccome $\dfrac{du}{dt}(0),\dfrac{dv}{dt}(0)$ sono esattamente le coordinate di $\alpha'(0)$ nella base $\dfrac{\partial}{\partial u},\dfrac{\partial}{\partial v}$ di T_pS la dimostrazione é terminata. $\square$

Definiamo dunque $F(\alpha'(0))=\tilde{F}(\alpha)$. Segue dalla formula precedente che F è lineare e ben definita. Inoltre per ogni vettore tangente $\theta\in T_pS$ esiste una curva α tale che $\alpha'(0)=\theta$.

4.8. *Osservazione.* Se cambiamo applicazione di Gauss, anziché ottenere F otteniamo $-F$.

4.9. **Corollario.** *L'endomorfismo lineare F è, a meno del segno, un invariante della superficie $S\subset\mathbb{R}^3$.*

4.10. **Teorema.** *L'endomorfismo $F:T_pS\longrightarrow T_pS$ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare indotto da $\mathbb{R}^3$.*

Dimostrazione. Consideriamo una parametrizzazione $X : U \longrightarrow S$ tale che $X(0,0) = p$ e denotiamo con u^1, u^2 le coordinate su U. Siccome X_1, X_2 sono una base dello spazio vettoriale T_pS, per dimostrare che F è autoaggiunto basta dimostrare che $F(X_i) \cdot X_j = F(X_j) \cdot X_i$ per ogni $i, j = 1, 2$. Consideriamo la curva $\alpha(t) = X(t, 0)$: allora $\alpha'(0) = X_1 \in T_pS$, e derivando rispetto a t la relazione $X_j(t, 0) \cdot N(t, 0) = 0$ si ottiene

$$X_{j1} \cdot N - X_j \cdot F(X_1) = 0$$

E dunque

$$X_j \cdot F(X_1) = X_{j1} \cdot N = b_{j1}.$$

In modo analogo, considerando la curva $X(0, t)$ si dimostra

$$X_j \cdot F(X_2) = X_{j2} \cdot N = b_{j2}.$$

□

Dunque, in una base ortonormale di T_pS, l'operatore F é rappresentato da una matrice simmetrica ed è dunque diagonalizzabile con matrici ortogonali. Gli autovalori k_1, k_2 di F si dicono le *curvature principali* di S nel punto p.

Se rappresentiamo F nella base X_1, X_2 abbiamo:

$$F(X_i) = b_i^1 X_1 + b_i^2 X_2, \qquad i = 1, 2. \tag{2}$$

Sostituendo la relazione (2) nelle equazioni $b_{ij} = X_i \cdot F(X_j)$ si ottengono le *formule di Weingarten*:

$$\begin{cases} F(X_i) = \sum_k b_i^k X_k \\ \\ b_{ij} = \sum_k b_i^k g_{kj} \end{cases} \tag{3}$$

4.11. **Corollario.** *Vale la formula* $\det(F) = \dfrac{\det(b)}{\det(g)} = k_1 k_2$.

Dimostrazione. Le formule di Weingarten dicono esattamente che $b = (b_j^i)g$, dove (b_j^i) è la matrice di F nella base X_1, X_2. Dunque $\det(F) = \det(bg^{-1}) = \det(b)\det(g^{-1})$. □

4.12. **Definizione.** Le funzioni

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\operatorname{Traccia}(F), \qquad K = k_1 k_2 = \det(F),$$

si dicono rispettivamente *curvatura media* e *curvatura gaussiana.*

Siccome la matrice g è invertibile, i polinomi $\det(bg^{-1} - tI)$ e $\det(b - tg)$ differiscono per una costante moltiplicativa. Ne consegue che k_1, k_2 coincidono con le radici del polinomio di secondo grado $\det(b - tg)$.

4.13. *Osservazione.* La curvatura Gaussiana K dipende solamente da $S \subset \mathbb{R}^3$ e non dalla scelta dell'applicazione di Gauss. I movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ agiscono per coniugio su F e quindi le curvature principali k_1 e k_2 sono invarianti per movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$.

4.14. **Definizione.** Una superfice si dice *minimale* se ha curvatura media identicamente nulla.

Esercizi.

3. Verificare che il catenoide è una superfice minimale.

4. Calcolare prima e seconda forma fondamentale, curvatura media e Gaussiana delle seguenti superfici:

(1) $X(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$ rotazione;
(2) $X(u, v) = (a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v)$ ellissoide;

(3) Sfera di raggio R;
(4) Superfice di equazione $z = \log x - \log y$ in un intorno del punto (1,1,0);

5. Geografia dei punti in una superficie

Siano k_1, k_2 e $K = k_1k_2$ le curvature principali e Gaussiana di una superfice S in un suo punto p. Diremo che il punto p è:

(1) *planare* se $k_1 = k_2 = 0$;
(2) *ombelicale* se $k_1 = k_2 \neq 0$;
(3) *ellittico* se $k_1 \neq k_2$ e $K > 0$;
(4) *parabolico* se $k_1 \neq k_2$ e $K = 0$;
(5) *iperbolico* se $K < 0$.

Un vettore tangente $\theta \in T_pS$ si dice una *direzione principale* se è un autovettore di F. Siccome F è autoaggiunto esiste una base ortonormale di T_pS formata da direzioni principali.

Una curva $\alpha : (a, b) \longrightarrow S$ si dice una *linea di curvatura* se il vettore $\alpha'(t)$ è una direzione principale per ogni valore del parametro t.

5.1. **Teorema.** *Se $p \in S$ non è un punto ombelicale, allora esiste un sistema di coordinate locali u, v su S, definite in un intorno di p, tali che le curve $u =$costante e $v =$costante sono linee di curvatura.*

Dimostrazione. Omessa. □

5.2. **Esempio.** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la sfera di centro 0 e raggio R. Il versore normale interno a S é definito da

$$N(x) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Consideriamo un cammino $(-\epsilon, \epsilon) \ni t \longrightarrow x(t) \in S$. Allora

$$F(x'(0)) = -\frac{dNx}{dt}(0) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{3} x'_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{x'(0)}{R}$$

dunque, $\forall p \in S \quad F : T_pS \to T_pS$ è uguale a $\frac{1}{R}Id$. In particolare, tutti i punti sono ombelicali, le curvature principali sono uguali a $\frac{1}{R}$ e la curvatura Gaussiana è $K = \frac{1}{R^2}$.

Vale il Teorema Egregium di Gauss:

5.3. **Teorema** (Teorema Egregium)**.** *La curvatura Gaussiana di una superfice dipende solamente dalla prima forma fondamentale. In particolare, superfici localmente isometriche hanno la stessa curvatura Gaussiana.*

5.4. **Corollario.** *La sfera non è localmente isometrica al piano; due sfere sono localmente isometriche se e soltanto se hanno lo stesso raggio.*

5.5. *Osservazione.* Si può dimostrare con un esempio che se due superfici hanno la stessa curvatura Gaussiana esse non sono necessariamente localmente isometriche.

6. Studio qualitativo dei punti ellittici, parabolici ed iperbolici

Sia p un punto in una porzione di superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ e indichiamo con K la curvatura Gaussiana di S in p.

A meno di movimenti rigidi possiamo supporre $p = 0$ e $T_pS = \{x_3 = 0\}$.

Sullo spazio tangente T_pS esistono comunque due direzioni principali ortogonali. A meno di rotazioni attorno all'asse x_3 possiamo dunque supporre che $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ siano direzioni principali.

Per il teorema delle funzioni implicite, esiste una funzione differenziabile f, definita in un intorno di 0 in $\mathbb{R}^2$, tale che S è, in un intorno di p, la superficie di equazione $x_3 = f(x_1, x_2)$. Una parametrizzazione per S è data da

$$X(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

Siccome $T_pS = \{x_3 = 0\}$ deve essere $\dfrac{\partial f}{\partial u^i}(0) = 0$ per $i = 1, 2$, e dunque, nel punto p vale

$$X_1 = (1, 0, 0), \quad X_2 = (0, 1, 0), \quad N = (0, 0, 1),$$
$$X_{11} = (0, 0, f_{11}), \quad X_{12} = (0, 0, f_{12}), \quad X_{22} = (0, 0, f_{22}).$$

Dunque $F(X_i) \cdot X_j = b_{ij} = f_{ij}$. Siccome $X_1 \cdot X_2 = 0$ e X_1, X_2 sono autovalori per F, si ha $b_{12} = F(X_1) \cdot X_2 = 0$ e dunque $f_{12}(0) = 0$. Se $f_{11}(0) = a$, e $f_{22}(0) = b$, per Taylor possiamo scrivere

$$f(x_1, x_2) = \frac{a}{2}x_1^2 + \frac{b}{2}x_2^2 + o(2)$$

Dove $o(2)$ è un infinitesimo di ordine superiore a due. Chiaramente a e b sono le curvature principali e dunque $K = ab$. Supponiamo $a \geq 0$.

Se $K > 0$ deve essere $a > 0, b > 0$ e dunque f ha in 0 un punto di minimo locale. In un intorno di p, la superfice S è interamente contenuta in un semispazio definito dal piano tangente.

Se $K < 0$, allora $a > 0, b < 0$ e S non è contenuta né da una parte né dall'altra del piano tangente.

Riepilogando:

- *Se $K > 0$ allora S ha in p una forma a cucchiaio.*
- *Se $K < 0$ allora S ha in p una forma a sella.*

Se $b = a = 0$ allora S è approssimato a meno di infinitesimi di ordine 3 dal piano.

6.1. **Corollario.** *Se S è contenuta dentro una sfera $\tilde{S}$ di raggio R passante per p e con $T_pS = T_p\tilde{S}$, allora $K \geq \frac{1}{R^2}$.*

Dimostrazione. I punti della sfera sono tutti ombelicali e dunque i vettori $(1, 0, 0)e(0, 1, 0)$ sono direzioni principali per $\tilde{S}$. Se $x_3 = \tilde{f}(x_1, x_2)$ è l'equazione di $\tilde{S}$, deve essere a meno del segno

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{2R}x_1^2 + \frac{1}{2R}x_2^2 + o(2)$$

Infatti, le curvature principali di $\tilde{S}$ sono esattamente uguali a $\frac{1}{R}$. Se S è contenuta in $\tilde{S}$, deve essere $f \geq \tilde{f}$ in un intorno di p, dunque $a \geq \frac{1}{R}, b \geq \frac{1}{R}, K \geq \frac{1}{R^2}$. □

6.2. **Proposizione.** *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una porzione di superficie i cui punti sono tutti planari od ombelicali. Allora S è una porzione di piano o di sfera.*

Dimostrazione. Sia $X : U \longrightarrow S$ una parametrizzazione, fissiano un'applicazione di Gauss N e denotiamo con H la funzione che ad ogni punto associa il valore della curvatura media. Segue dalle ipotesi che in ogni punto vale la formula

$$HX_i = -N_i = -\frac{dN}{du^i}, \qquad i = 1, 2.$$

Se $H \equiv 0$, allora $N_1 = N_2 = 0$, ossia N è costante ed S è contenuta in un piano.

Se H non è identicamente nulla, esiste un aperto connesso $V \subset U$ dove $H \neq 0$. Consideriamo le funzioni $a\colon V \to \mathbb{R}$ e $Y\colon V \to \mathbb{R}^3$ definite dalle formule

$$a = \frac{1}{H}, \qquad Y = X + aN.$$

Adesso deriviamo!

$$Y_1 = X_1 + aN_1 + a_1N = a_1N, \qquad Y_2 = X_2 + aN_2 + a_2N = a_2N,$$
$$Y_{12} = \frac{\partial}{\partial u^1} Y_2 = a_{12}N + a_2N_1, \qquad Y_{21} = \frac{\partial}{\partial u^2} Y_1 = a_{12}N + a_1N_2.$$

Siccome $Y_{12} = Y_{21}$ ed i tre vettori N, N_1, N_2 sono linearmente indipendenti segue che $a_1 = a_2 = 0$, dunque $Y_1 = Y_2 = 0$ e $a = \mathit{costante}, Y = \mathit{costante}$ su V. Siccome U è per ipotesi connesso segue a posteriori che H è costante su U. Ma allora $\|X - Y\|^2 = a^2$ e S è contenuta nella sfera di centro Y e raggio $\|a\|$. □

Esercizi.

5 (Superfici di rotazione)**.** Sia $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), z(t))$, una curva piana regolare. Supponiamo che α sia iniettiva e che $x(t) > 0 \quad \forall t$. Possiamo allora considerare la superficie ottenuta ruotando la curva attorno all'asse z. Dimostrare:

(1) $X(t, \theta) = (x(t) \cos\theta, x(t) \sin\theta, z(t))$ è una parametrizzazione regolare.
(2) calcolare la prima e la seconda forma fondamentale, la curvatura principale e la curvatura Gaussiana.
(3) Dire quali punti sono ellittici, iperbolici, parabolici, ombelicali.

7. Dimostrazione del Teorema Egregium di Gauss

Notazioni e convenzioni:

- $X : U \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ porzione di superficie;
- $X_{i_1 \cdots i_k} = \dfrac{\partial^k X}{\partial u^{i_1} \cdots \partial u^{i_k}}$, con u^1, u^2 coordinate su U;
- $N = \dfrac{X_1 \wedge X_2}{\|X_1 \wedge X_2\|}$, $N_{i_1 \cdots i_k} = \dfrac{\partial^k N}{\partial u^{i_1} \cdots \partial u^{i_k}}$;
- $g_{ij} = X_i \cdot X_j$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$;
- $b_{ij} = X_{ij} \cdot N = -N_i \cdot X_j$.

Useremo la *notazione di Einstein*: se in una stessa formula compare lo stesso indice in alto ed in basso s'intende che bisogna sommare su quell'indice. Ad esempio, (g^{ij}) è la matrice inversa della prima forma fondamentale, e vale (in notazione di Einstein)

$$g^{ij} g_{jk} = \begin{cases} 1 & se \quad i = k; \\ 0 & se \quad i \neq k; \end{cases}$$

Per ogni punto $u \in U$, i vettori $X_1(u), X_2(u), N(u)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Quindi se $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è una qualsiasi funzione differenziabile sono unicamente definite tre funzioni $\xi^1, \xi^2, l : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$\phi = \xi^i X_i + lN$$

Le funzioni ξ^1, ξ^2 e l sono ancora differenziabili: infatti, per il teorema di Cramer $\xi^1 = \dfrac{\det(\phi, X_2, N)}{\det(X_1, X_2, N)}$ che è C^∞. In modo analogo si prova che ξ^2 e l sono C^∞. In particolare, se poniamo $\phi = X_{ij}$, si ha:

$$X_{ij} = \Gamma^p_{ij} X_p + l_{ij} N. \tag{4}$$

7.1. **Proposizione.** *Nelle notazioni precedenti vale $l_{ij} = b_{ij}$ e le funzioni Γ^p_{ij} dipendono solo dalla prima forma fondamentale.*

Dimostrazione. Per definizione della seconda forma fondamentale vale $b_{ij} = X_{ij} \cdot N = \Gamma^p_{ij} X_p \cdot N + l_{ij} N \cdot N = l_{ij}$.

Introduciamo le funzioni $\Gamma_{ijk} = X_{ij} \cdot X_k$. Siccome $X_{ij} = X_{ji}$ si ha chiaramente $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$. Vale inoltre

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial (X_i \cdot X_j)}{\partial u^k} = X_{ik} \cdot X_j + X_i \cdot X_{jk} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}.$$

Da un semplice calcolo segue che

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$$

e quindi le funzioni Γ_{ijk} dipendono solo dalla prima forma fondamentale.

Segue inoltre dalle formule (4) che

$$\Gamma_{ijk} = X_{ij} \cdot X_k = \Gamma^p_{ij} X_p \cdot X_k + l_{ij} N \cdot X_k = \Gamma^p_{ij} g_{pk},$$
$$\Gamma_{ijk} g^{kh} = \Gamma^p_{ij} g_{pk} g^{kh} = \Gamma^p_{ij} \delta^h_p = \Gamma^h_{ij}$$

dove δ^j_i indica il simbolo di Kronecher. Quindi anche le funzioni Γ^h_{ij} dipendono solo dalla prima forma fondamentale. $\square$

7.2. **Definizione.** Le funzioni Γ_{ijk} e Γ^k_{ij} si chiamano *simboli di Christoffel* rispettivamente di 1^a e 2^a specie.

Calcoliamo adesso X_{ijk}

$$X_{ijk} = \frac{\partial X_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \Gamma^p_{ij}}{\partial u^k} X_p + \Gamma^l_{ij} X_{lk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} N + b_{ij} N_k.$$

Usando le formule $N_k = -b^p_k X_p$ e $X_{lk} = \Gamma^p_{lk} X_p + b_{lk} N$ troviamo

$$X_{ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma^p_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^l_{ij}\Gamma^p_{lk} - b_{ij} b^p_k\right) X_p + \left(\Gamma^l_{ij} b_{lk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}\right) N.$$

Scambiando gli indici j e k

$$X_{ikj} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{lj} - b_{ik} b^p_j\right) X_p + \left(\Gamma^l_{ik} b_{lj} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_j}\right) N.$$

Facciamo la differenza e scriviamo

$$X_{ijk} - X_{ikj} = G^p_{ijk} X_p + C_{ijk} N.$$

Siccome $X_{ijk} = X_{ikj}$, mentre X_1, X_2 ed N sono linearmente indipendenti, si ha $G^p_{ijk} = C_{ijk} = 0$. Vogliamo adesso scrivere il termine G^p_{ijk} come somma di due addendi, il primo dei quali dipendente solo dalla prima forma fondamentale. Possiamo scrivere

$$G^p_{ijk} = R^p_{ijk} - (b_{i,j}b^p_k - b_{i,k}b^p_j) \quad \text{dove} \quad R^p_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^p_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^p_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^l_{ij}\Gamma^p_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{lj}$$

7.3. **Definizione.** La funzioni R^p_{ijk} si dicono *simboli di Riemann di* 2^a *specie.* Le funzioni

$$R_{ijkh} = R^p_{ijk} g_{ph}$$

si dicono *simboli di Riemann di* 1^a *specie.*

Dall'equazione $G^p_{ijk} = 0$ segue che

$$R_{ijkh} = R^p_{ijk} g_{ph} = (b_{ij}b^p_k - b_{ik}b^p_j) g_{ph}$$

e siccome

$$b^p_i g_{pj} = b_{i,j}$$

vale

$$R_{ijkh} = b_{ij}b_{kh} - b_{ik}b_{jh}.$$

In particolare

$$R_{1122} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = \det(b)$$

e dunque

$$K = \frac{\det(b)}{\det(g)} = \frac{R_{1122}}{\det(g)}$$

Abbiamo dunque provato che la curvatura Gaussiana dipende solo dalla prima forma fondamentale.