Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.1, canale L-Z

1.3.2024

In alcuni esercizi si chiede di dimostrare alcune cose viste a lezione, a beneficio dei pochi assenti.

Esercizio 1. Elencare tutte le topologie possibili su un insieme di cardinalità 3.

Esercizio 2. (**da sapere**) Per ogni intero positivo n sia $\mathcal{B}_n$ la famiglia degli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ di ampiezza minore o uguale a $1/n$. Dimostrare che ogni $\mathcal{B}_n$ è una base della topologia classica.

Esercizio 3. Poniamo

$$Z = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\},$$

e definiamo la famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ nel modo seguente: $A \in \mathcal{B}$ se e solo se A è un intervallo aperto, oppure esiste un intervallo aperto $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A = B \smallsetminus Z$. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$, e trovare un aperto di $\mathcal{T}$ che non è aperto in topologia euclidea.

Esercizio 4. (**da sapere**) Sia X un insieme qualsiasi, e consideriamo la famiglia $\mathcal{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subseteq X$ è in $\mathcal{T}$ se e solo se $A = \emptyset$ oppure $X \smallsetminus A$ è un insieme finito. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia, è detta topologia *cofinita*. Per quali insiemi X la topologia $\mathcal{T}$ coincide con la topologia discreta?

Esercizio 5. Consideriamo la topologia cofinita su $\mathbb{R}$.

(1) Dato $A \subseteq X$ aperto in questa topologia, dimostrare che A è aperto anche in topologia euclidea.
(2) Dati $p, q \in \mathbb{R}$ qualsiasi con $p \neq q$, dimostrare che non esistono due aperti (in topologia cofinita) disgiunti A, B tali che $p \in A$ e $q \in B$.
(3) Dimostrare che invece in topologia euclidea due aperti del genere esistono per qualsiasi scelta di p e q.

Esercizio 6. Sia X un insieme dotato della topologia discreta, e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia. Dimostrare che $\{x\} \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 7. (**da sapere**) Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo

$$\mathcal{B} = \{[a, b[\mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

(1) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, detta *topologia di Sorgenfrey*.
(2) Dimostrare che un qualsiasi intervallo aperto $]a, b[$ con $a < b$ (entrambi numeri reali) è aperto anche in topologia di Sorgenfrey.
(3) Dimostrare che la topologia di Sorgenfrey è strettamente più fine della topologia euclidea.
(4) Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, l'intervallo $[a, b[$ è aperto e anche chiuso in topologia di Sorgenfrey.

Esercizio 8. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato, e per ogni $a \in X$ si consideri

$$M_a = \{x \in X \mid a \leq x\}.$$

Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi

$$\{M_a \mid a \in X\}$$

è base di una topologia.

Esercizio 9. (**da sapere**) Siano X spazio topologico e $D \subseteq X$. Dimostrare che D è denso se e solo se D interseca ogni aperto non vuoto di X.

Esercizio 10. Siano $X = \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Z},\ a < b\}.$$

(1) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia su X.

(2) Determinare parte interna e chiusura dei sottoinsiemi $[0,1[$ e $]1/2, 5/2[$ rispetto a questa topologia.

Esercizio 11. Consideriamo $X = \mathbb{R}$ con topologia cofinita. Determinare la chiusura di $[0,1]$ rispetto a questa topologia.

Esercizio 12. In topologia cofinita, ogni sottoinsieme dello spazio topologico è denso: vero o falso?

Esercizio 13. (**da sapere**) Dimostrare che, in uno spazio topologico, un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Esercizio 14. Sia X uno spazio topologico, sia $x \in X$, e sia $U \subseteq X$ un intorno di x.

(1) Dato V un sottoinsieme di X contenente U, dimostrare che anche V è un intorno di x.
(2) Dato U' un altro intorno di x, dimostrare che $U \cup U'$ e $U \cap U'$ sono anch'essi intorni di x.

Esercizio 15. Sia ∞ un punto non appartenente ad $\mathbb{R}$, e consideriamo la famiglia $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ di sottoinsiemi di $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dove $\mathcal{T}_1$ sono tutti gli aperti di $\mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{T}_2$ se e solo se $\infty \in A$ e $\mathbb{R} - A$ è un chiuso limitato.

Dire se $\mathcal{T}$ è una topologia su X.