GEOMETRIA 2 - DECIMO FOGLIO DI ESERCIZI

MARCO MANETTI - FRANCESCO MEAZZINI - GUIDO PEZZINI

Esercizio 0.1 (Curvatura Gaussiana e curvatura media)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu \colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Dato $p \in S$, dimostrare che:

$$\kappa(p) = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} \qquad\qquad H(p) = \frac{E\mathcal{N} + G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M}}{2(EG - F^2)}\,.$$

Esercizio 0.2 (Curvatura Gaussiana della sfera di raggio r)**.** Si consideri la superficie immersa $S \subseteq \mathbb{R}^3$ data dalla sfera di raggio $r > 0$ centrata nell'origine. Si determini la curvatura Gaussiana di S.

Esercizio 0.3 (Curvatura Gaussiana del toro)**.** Fissiamo $0 < r < a$ e consideriamo la parametrizzazione regolare

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} (a + r\cos(u))\cos(v) \\ (a + r\cos(u))\sin(v) \\ r\sin(u) \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad X_u = \begin{pmatrix} -r\sin(u)\cos(v) \\ -r\sin(u)\sin(v) \\ r\cos(u) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X_v = \begin{pmatrix} -(a + r\cos(u))\sin(v) \\ (a + r\cos(u))\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Dimostrare che
$$\kappa(p) = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = \frac{\cos(u_0)}{r(a + r\cos(u_0))}\,.$$
- Dimostrare che il toro contiene punti ellittici, punti iperbolici e punti parabolici.

Esercizio 0.4 (Apparato di Frenet per curve piane regolari)**.** Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare e sia $\beta \colon J \to \mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione (concorde) di velocità unitaria. Sia $\theta \colon I \to J$ un diffeomorfismo tale che $\alpha(t) = \beta(\theta(t))$ per ogni $t \in I$. Definiamo allora l'*apparato di Frenet* della curva α come:

$$T_\alpha(t) = T_\beta(\theta(t)), \quad N_\alpha(t) = N_\beta(\theta(t)), \quad \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(\theta(t))\,.$$

Dimostrare che

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \qquad \text{e} \qquad \kappa_\alpha(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3}\det\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha''(t) \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha''(t) \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ denota la matrice le cui righe sono i vettori $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$.

Definition 0.5 (Evoluta di una curva)**.** Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare tale che $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. L'*evoluta* di α è la curva piana $C_\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2$ data in ogni punto t dal centro della circonferenza osculatrice in $\alpha(t)$, ovvero:

$$C_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa_\alpha(t)} N_\alpha(t)\,.$$

Esercizio 0.6 (Spirale logaritmica)**.** Si consideri la *spirale logaritmica*, ovvero la curva piana

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{definita da} \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} e^{bt}\cos(t) \\ e^{bt}\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{con } b > 0\,.$$

- Si determini la curvatura di α in ogni suo punto.
- Si determino i limiti $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \kappa_\alpha(t)$.
- Si determini una parametrizzazione dell'evoluta di α.

Esercizio 0.7 (Catenaria)**.** Calcolare la curvatura di una *catenaria*, ovvero la curva piana di parametrizzazione

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{definita da} \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ a\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{pmatrix} \qquad \text{con } a > 0\,.$$

Esercizio 0.8 (Cilindro)**.** Sia $r > 0$, si consideri la parametrizzazione del cilindro di raggio r

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \psi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(u) \\ r\sin(u) \\ v \end{pmatrix}.$$

- Determinare la prima forma fondamentale in ogni punto.
- Determinare la seconda forma fondamentale in ogni punto.
- Determinare le curvature principali e la curvatura Gaussiana in ogni punto.

Esercizio 0.9 (Superfici di rotazione)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una sottovarietà immersa di dimensione 1, con

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\alpha_2(t) > 0$ per ogni $t \in I$. Consideriamo la superficie immersa $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando l'immagine della curva α attorno all'asse e_1, con parametrizzazione regolare

$$\psi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \psi(u,v) = \begin{pmatrix} \alpha_1(u) \\ \alpha_2(u)\cos(v) \\ \alpha_2(u)\sin(v) \end{pmatrix}.$$

- Determinare la prima forma fondamentale di S in funzione di α.
- Determinare la seconda forma fondamentale di S in funzione di α.
- Determinare la curvatura Gaussiana di S in funzione di α.

Esercizio 0.10 (Pseudosfera)**.** Consideriamo la sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 definita dalla parametrizzazione regolare

$$\alpha\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{definita da} \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \sqrt{1-e^{-2s}}\,ds \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri la superficie di rotazione associata S definita dall'Esercizio 0.9. Tale superficie S si chiama *pseudosfera*.

- Dimostrare che α è una curva a velocità unitaria.
- Dimostrare che la curvatura Gaussiana di S è costante e vale $\kappa = -1$.