Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.2, canale L-Z

8.3.2024

In alcuni esercizi si chiede di dimostrare alcune cose viste a lezione, a beneficio dei pochi assenti.

Esercizio 1. (**da sapere**) Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione fra spazi topologici, e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di X. Dimostrare che f è continua se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Esercizio 2. (**da sapere**) Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione biiettiva fra due spazi topologici.

(1) Dimostrare che f è aperta se e solo se f^{-1} è continua.
(2) Dimostrare che f è un omeomorfismo se e solo se f è continua e aperta.
(3) Dimostrare che f è un omeomorfismo se e solo se f è continua e chiusa.

Esercizio 3. Siano X, Y spazi topologici, e $p \in Y$. Sia $f\colon X \to Y$ l'applicazione costante $f(x) = p$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è continua, qualsiasi siano le topologie su X e su Y.

Esercizio 4. Siano $X = \mathbb{C}^2$ e $Y = \mathbb{C}$, entrambi con topologia di Zariski. Sia $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ un polinomio in due variabili, considerato come applicazione $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$. Dimostrare che f è continua.

Esercizio 5. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione fra spazi topologici. Dimostrare che se f è aperta, allora l'immagine $f(X)$ è un aperto di Y, e che se f è chiusa allora l'immagine $f(X)$ è un chiuso di Y. Usare questi fatti per trovare esempi di applicazioni non aperte e non chiuse.

Esercizio 6. Sia $Y = \mathbb{R}$ con topologia cofinita, sia $X = \mathbb{R}^2$ e sia $\pi\colon X \to Y$ la proiezione sulla prima coordinata, cioè $\pi(x, y) = x$. Determinare se f è continua, nei casi seguenti:

(1) se X è totato della topologia cofinita;
(2) se X è dotato della topologia euclidea;
(3) se X è dotato della topologia di Zariski.

Esercizio 7. Sia X un insieme dotato della topologia banale, sia Y uno spazio topologico, e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. L'applicazione f è continua se e solo se anche Y ha topologia banale: vero o falso?

Esercizi sulla sezione **Spazi metrici**:

Esercizio 8. (1) Sia X uno spazio metrico, e siano p, q punti distinti di X. Dimostrare che esistono due aperti di X disgiunti, uno che contiene p e uno che contiene q.
(2) Dimostrare che uno spazio topologico con almeno due punti e topologia banale non è metrizzabile.

Esercizio 9. Sia (X, d) uno spazio metrico, siano $p \in X$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Consideriamo

$$C_\varepsilon(p) = \{x \in X \mid d(x, p) \le \varepsilon\}.$$

(1) Dimostrare che $C_\varepsilon(p)$ è chiuso in X rispetto alla topologia indotta da d.
(2) Supponiamo X abbia almento due punti, e che d sia una distanza per cui $\mathcal{T}_d$ è la topologia discreta, ad esempio poniamo $d(x, y) = 1$ per ogni coppia di punti distinti x, y. Dimostrare che in questo caso

$$B_1(p) = \{p\}$$

e che

$$\overline{B_1(p)} = \{p\}$$

per ogni $p \in X$. Dimostrare inoltre che

$$C_1(p) = X$$

e concludere che non sempre $C_\varepsilon(p)$ è uguale alla chiusura di $B_\varepsilon(p)$.

Esercizio 10. Sia (X,d) uno spazio metrico. Definiamo la *limitazione standard* $\overline{d}$ di d nel modo seguente:

$$\overline{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{se } d(x,y) < 1 \\ 1 & \text{se } d(x,y) \geq 1 \end{cases}$$

(1) Dimostrare che $\overline{d}$ è una distanza.
(2) Dimostrare che $B_\varepsilon^{\overline{d}}(p) \supseteq B_\varepsilon^{d}(p)$ per ogni $p \in X$ e ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.
(3) Dato $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, poniamo $\delta = \varepsilon$ se $\varepsilon < 1$ e invece $\delta = \frac{1}{2}$ se $\varepsilon \geq 1$. Dimostrare che $B_\delta^{\overline{d}}(p) \subseteq B_\varepsilon^{d}(p)$.
(4) Dedurre dai punti precedenti che d e $\overline{d}$ sono distanze equivalenti.

Esercizio 11. Sia $X = \mathbb{Q}$ e sia p un numero primo. Dati $x, y \in X$, scriviamo la differenza $z = x - y$ come

$$z = p^s \frac{a}{b}$$

dove $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ non sono divisibili per p, e $s \in \mathbb{Z}$. Poniamo allora

$$d(x,y) = p^{-s}.$$

se $x \neq y$, e poniamo invece $d(x,y) = 0$ se $x = y$. Questo definisce un'applicazione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$.

(1) Verificare che d è una distanza; è detta distanza *p-adica*.
(2) Dimostrare che per ogni $x \in X$ e ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, ci sono elementi in $B_\varepsilon(x)$ di valore assoluto[1] arbitrariamente grande.
(3) Dimostrare che la successione p, p^2, p^3, ..., $x_n = p^n$, ... è una successione di Cauchy, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ per ogni scelta di n, m interi $\geq N$.

Esercizio 12. (**da sapere**) Sia (X,d) uno spazio metrico, fissiamo un sottoinsieme non vuoto qualsiasi $A \subseteq X$, e per ogni $x \in X$ definiamo la "distanza fra x e A" nel modo seguente:

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} d(-,A)\colon & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x,A) \end{array}$$

è continua.

Esercizi sulla sezione **Sottospazi topologici**:

Esercizio 13. (**da sapere**) Sia X uno spazio topologico, siano $Y \subseteq X$ un sottoinsieme qualsiasi e sia $C \subseteq Y$. Dimostrare che C è chiuso in Y in topologia di sottospazio se e solo se esiste un chiuso $D \subseteq X$ di X tale che $D \cap Y = C$.

Esercizio 14. (**da sapere**) Siano X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia su X. Dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{B}' = \{D \cap Y \mid D \in \mathcal{B}\}$$

è una base della topologia di sottospazio su Y.

Esercizio 15. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea (=topologia classica), consideriamo il sottoinsieme $Y = [0,1[\cup[2,3]$ con topologia di sottospazio. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di Y sono chiusi oppure aperti oppure entrambi, in ciascun caso determinando sottoinsiemi chiusi o aperti di X che abbiano intersezione con Y uguale agli insiemi dati:

(1) $[0,1[$,
(2) $]2,3]$,
(3) $\left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup \{2\}$.

[1] Intendiamo il valore assoluto usuale dei numeri razionali.

Esercizio 16. (**da sapere**) Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici, e sia $Z \subseteq X$ con topologia di sottospazio. Dimostrare che $f|_Z\colon Z \to Y$ è continua.

Esercizio 17. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, e consideriamo il seguente sottoinsieme con topologia di sottospazio:

$$Y = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

Determinare se Y ha topologia discreta.

Esercizi sulla sezione **Prodotti topologici**:

Esercizio 18. (**da sapere**) Sia P uno spazio topologico con base $\mathcal{B}$, e sia Q uno spazio topologico con base $\mathcal{B}'$. Dimostrare che

$$\{U \times V \mid U \in \mathcal{B},\ V \in \mathcal{B}'\}$$

è una base della topologia prodotto su $P \times Q$.

Esercizio 19. Se P e Q hanno entrambi topologia banale, anche il prodotto $P \times Q$ ha topologia banale? E se invece P e Q hanno entrambi topologia discreta, anche il prodotto $P \times Q$ ha topologia discreta?

Esercizio 20. Siano P, Q spazi topologici entrambi con topologia cofinita e $P \times Q$ con topologia prodotto. Sia $C \subsetneq P \times Q$ un sottoinsieme proprio e chiuso, e sia $p\colon P \times Q \to P$ la proiezione sulla prima coordinata. Dimostrare che esiste un insieme finito di punti $F \subseteq Q$ tale che

$$p(C \smallsetminus (P \times F))$$

è un insieme finito. Consideriamo ora $\mathbb{R}$ con topologia di Zariski; usare la prima parte dell'esercizio per dimostrare che la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è diversa dalla topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 21. Sia P uno spazio topologico qualsiasi, e sia Q uno spazio topologico con solo un numero finito di elementi. Dimostrare che la proiezione $p\colon P \times Q \to P$ sulla prima componente è un'applicazione chiusa.

Esercizi sulla sezione **Spazi di Hausdorff**:

Esercizio 22. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey (quella con base gli intevalli semiaperti $[a, b)$). Dimostrare che X è di Hausdorff.

Esercizio 23. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e siano $x_1, \ldots, x_n$ punti distinti di X. Dimostrare che esistono intorni $U_i \in \mathcal{I}(x_i)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $U_i \cap U_j = \varnothing$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

Esercizio 24. (**da sapere**) Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue fra spazi topologici. Supponiamo che Y sia di Hausdorff, e che esista un sottoinsieme denso A in X tale che $f|_A = g|_A$. Dimostrare che $f = g$.