

Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.3, canale L-Z

16.3.2024

In alcuni esercizi si chiede di dimostrare alcune cose viste a lezione, a beneficio dei pochi assenti.

Esercizio 1. Consideriamo \mathbb{R} con topologia euclidea, e $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottospazio qualsiasi contenuto in \mathbb{Q} . Supponiamo che X abbia almeno due punti, dimostrare che X è sconnesso.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey (base di aperti gli intervalli $[a, b)$).

(1) Dimostrare che X è sconnesso.

(2) Sia Y un sottospazio di X , dimostrare che Y è sconnesso se ha almeno due punti.

Esercizio 3. (da sapere)

(1) Siano X e Y spazi topologici omeomorfi, e sia $x \in X$ un punto qualsiasi. Dimostrare che esiste un punto $y \in Y$ tale che $X \setminus \{x\}$ e $Y \setminus \{y\}$ sono omeomorfi (entrambi con topologia di sottospazio).

(2) Usare il punto precedente per dimostrare che $[0, 1[$ e $]0, 1[$ non sono omeomorfi.

Esercizio 4 (♣). Dimostrare che il “pettine con la pulce”

$$X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, t \right) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in [0, 1] \right\} \cup \{(0, 1)\}.$$

non è connesso per archi.

Esercizio 5. (da sapere) Sia X uno spazio topologico, supponiamo esistano due sottospazi Y, Z di X tali che $Y \cap Z \neq \emptyset$ e $X = Y \cup Z$.

(1) Dimostrare che X è connesso se Y e Z sono connessi.

(2) Dimostrare che X è connesso per archi se Y e Z sono connessi per archi.

Esercizio 6. Provare che un aperto di \mathbb{R}^2 è connesso se e solo se ogni coppia di punti è congiungibile da una poligonale continua formata dalla congiunzione di segmenti orizzontali e verticali.

Esercizio 7. Ho chiesto a ChatGPT 3.5 di scrivere in L^AT_EX la soluzione del precedente esercizio. Dire se la sua soluzione è corretta o allucinata.

Dimostrazione. Let $A \subset \mathbb{R}^2$ be an open connected set, and let $x, y \in A$ be two points in A . Since A is open, for any point $z \in A$, there exists an open ball $B(z, \epsilon)$ centered at z contained entirely within A .

Consider the set $S = \{z \in A : \text{there exists a polygonal path in } A \text{ from } x \text{ to } z\}$. We want to show that $y \in S$.

Since $x \in S$, S is non-empty. Let $\alpha = \inf\{\|y - z\| : z \in S\}$.

Suppose for contradiction that $y \notin S$. Then, for any $\epsilon > 0$, there exists a point $z \in A$ such that $\|y - z\| < \alpha + \epsilon$. Since α is the infimum of distances from y to points in S , there exists a sequence $\{z_k\}$ in S such that $\|y - z_k\| \rightarrow \alpha$ as $k \rightarrow \infty$.

Now, consider the open balls $B(y, \alpha)$ and $B(z_k, \epsilon)$. Since A is connected and $y, z_k \in A$, there exists a polygonal path in A from y to z_k . By continuity, as $k \rightarrow \infty$, this polygonal path must converge to a polygonal path from y to a point $z' \in \overline{B(y, \alpha)}$. Since $\overline{B(y, \alpha)}$ is closed, $z' \in \overline{B(y, \alpha)} \subset A$. Thus, $z' \in S$, contradicting the definition of α as the infimum.

Therefore, $y \in S$, and there exists a polygonal path in A from x to y , made up of horizontal and vertical line segments. \square

Esercizio 8. Per farvi immedesimare nel docente costretto a correggere gli elaborati scritti a coda di cane, provate a correggere e dare un voto a quest'altra 'opera' di ChatGPT:

Problem: Let $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ be a countable family of connected subspaces of X such that $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ for every n . Prove $A = \cup_n A_n$ is connected.

Dimostrazione. Let's prove this by contradiction. Suppose A is not connected. Then there exist two disjoint open sets U and V in X such that $A \subset U \cup V$ and $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$.

Since $A = \cup_n A_n$, there exists some m such that $A_m \cap U \neq \emptyset$ and $A_m \cap V \neq \emptyset$.

Since A_m is connected and $A_m \cap U \neq \emptyset \neq A_m \cap V$, it follows that $A_m \subset U \cup V$. Without loss of generality, assume $A_m \cap U \neq \emptyset$.

Since $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ for every n , and $A_m \cap U \neq \emptyset$, there exists $k \geq m$ such that $A_k \cap U \neq \emptyset$.

However, this implies that $A_k \subset U \cup V$, which contradicts the assumption that $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forms a partition of A . Therefore, A must be connected. \square