

Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.4, canale L-Z

22.3.2024

In alcuni esercizi si chiede di dimostrare alcune cose viste a lezione, a beneficio dei pochi assenti.

Esercizio 1. (da sapere) Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea.

- (1) Dimostrare che $Y =]0, 1[$ con topologia di sottospazio non è compatto.
- (2) Dimostrare che $Z = [0, 1[$ con topologia di sottospazio non è compatto.
- (3) Dimostrare che $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ con topologia di sottospazio non è compatto.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey (base di aperti gli intervalli $[a, b)$), e sia $Y = [0, 1]$ con topologia di sottospazio.

- (1) Dimostrare che X non è compatto.
- (2) Dimostrare che $\{1\}$ è un sottoinsieme aperto in Y .
- (3) Dimostrare che Y non è compatto.

Esercizio 3 (Difficile, tentativo n. 2 dopo quello fallito a lezione). Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey. Dimostrare o confutare la seguente affermazione: un sottospazio $Y \subset X$ è compatto se e solo se è limitato e per ogni $a < b$ il sottoinsieme $Y \cap [a, b)$ o è vuoto oppure ammette massimo e minimo.

Esercizio 4. Dimostrare che se uno spazio topologico ha topologia cofinita è compatto.

Esercizio 5. (da sapere) Sia X spazio topologico uguale all'unione di un numero finito di sottospazi compatti. Dimostrare che X è compatto.

Esercizio 6. Diamo un controesempio a una proposizione vista a lezione, dove invece che f chiusa supponiamo f aperta. Sia $f: [0, 2[\rightarrow [0, 1]$ data da $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$, e $f(x) = 2 - x$ se $x \in]1, 2[$. Dimostrare che

- (1) f è continua e suriettiva,
- (2) il codominio di f è compatto,
- (3) $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in [0, 1]$,
- (4) f è aperta. (*Suggerimento:* dato $A \subseteq [0, 2[$ aperto nel dominio, decomporre A in un'unione di intervalli del tipo $[0, a[$ con $0 < a < 1$, oppure $]b, c[$ con $0 < b < c < 1$, oppure $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ con $0 < \varepsilon < 1$, oppure $]d, e[$ con $1 < d < e < 2$.)

Osservare che però il dominio di f non è compatto.

Esercizio 7. (da sapere) Siano X uno spazio topologico e \mathcal{B} una sua base. Supponiamo che ogni ricoprimento aperto di X fatto solo con elementi di \mathcal{B} ammetta un sottoricoprimento finito. Dimostrare che X è compatto.

Esercizio 8. (da sapere) Sia K un sottospazio topologico di \mathbb{R}^n (con topologia euclidea). Dimostrare che K è compatto se e solo se è limitato e chiuso in \mathbb{R}^n .

Esercizio 9. Consideriamo \mathbb{R} con la seguente topologia:

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}, \emptyset,]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}.$$

- (1) Dimostrare che \mathcal{T} è effettivamente una topologia¹.
- (2) Determinare se i seguenti sottospazi sono compatti:

$$Y = [0, 1], \quad Z = [0, 1[, \quad W =]0, 1].$$

Esercizio 10. (da sapere) In questo esercizio usiamo connessione e compattezza per dimostrare che $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R} \times [0, 1]$ non sono omeomorfi. Usiamo una costruzione chiamata *esaustione in compatti*; la definizione generale si può trovare sul libro di Manetti. Definiamo i seguenti sottoinsiemi di X :

$$K_n = [-n, n]^2$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Osserviamo che K_n è compatto per ogni n (ad esempio grazie all'esercizio n.5), che

$$K_n^\circ =]-n, n[^2$$

contiene K_{n-1} per ogni $n \geq 2$, e che vale

$$X = \bigcup_n K_n^\circ.$$

Supponiamo inoltre per assurdo che esista un omeomorfismo $f: X \rightarrow Y$.

- (1) Dimostrare che possiamo fissare un $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che

$$f(K_N^\circ) \supseteq \{0\} \times [0, 1].$$

- (2) Dimostrare che $X \setminus K_N$ è connesso.
- (3) Dimostrare che $Y \setminus f(K_N)$ è sconnesso.
- (4) Dedurre che f non può esistere, ottenendo l'assurdo desiderato e concludendo la dimostrazione che X e Y non sono omeomorfi.

Esercizio 11 (difficile). Con questo esercizio dimostriamo il “viceversa” di una proposizione vista a lezione: dato uno spazio topologico P , se la proiezione $q: P \times Q \rightarrow Q$ è chiusa per ogni spazio topologico Q , allora P è compatto. Procediamo per assurdo: supponiamo $q: P \times Q \rightarrow Q$ chiusa per ogni Q , ma P per assurdo non compatto. Sia \mathcal{R} un ricoprimento aperto di P tale che non esista alcun sottoricoprimento finito.

- (1) Denotiamo $A^c = P \setminus A$ per ogni $A \in \mathcal{R}$. Dimostrare che dati comunque un numero finito di elementi A_1, \dots, A_n di \mathcal{R} , abbiamo

$$A_1^c \cap \dots \cap A_n^c \neq \emptyset,$$

però vale

$$\bigcap_{A \in \mathcal{R}} A^c = \emptyset.$$

- (2) Sia ∞ un elemento non appartenente a P , consideriamo l'insieme $Q = P \cup \{\infty\}$, e consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di Q :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}(P) \cup \{A^c \cup \{\infty\} \mid A \in \mathcal{R}\}.$$

Cioè la famiglia \mathcal{S} è formata da tutti i sottoinsiemi di P , e poi anche i sottoinsiemi ottenuti prendendo un A^c con $A \in \mathcal{R}$ e aggiungendogli l'elemento ∞ . Sia

$$\mathcal{B} = \{\text{intersezioni di un numero finito di elementi di } \mathcal{S}\}.$$

Dimostrare che \mathcal{B} è base di una topologia su Q .

¹Questa è detta talvolta la *topologia della semicontinuità inferiore*. Perché?

- (3) Visto che P è contenuto in Q , possiamo definire il sottoinsieme $D = \{(x, x) \in P \times Q \mid x \in P\}$ del prodotto $P \times Q$. Sia \overline{D} la chiusura di D in $P \times Q$. Dimostrare che $q(\overline{D})$ è chiuso in Q e contiene P (come sottoinsieme di Q).
- (4) Dimostrare che $\{\infty\}$ non è aperto in Q , usando il punto (1).
- (5) Usare il punto precedente per dimostrare che $q(\overline{D})$ contiene ∞ , e che \overline{D} contiene un punto del tipo (x, ∞) per qualche $x \in P$.
- (6) Dimostrare che $U \times (A^c \cup \{\infty\})$ interseca D per ogni U intorno di x in P e per ogni $A \in \mathcal{R}$.
- (7) Usando il punto precedente e una scelta opportuna di U , dimostrare che $x \in A^c$ per ogni $A \in \mathcal{R}$. Si ottiene così una contraddizione col punto (1), completando la dimostrazione che P è compatto.