

Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.5, canale L-Z

6.4.2024

In alcuni esercizi si chiede di dimostrare alcune cose viste a lezione, a beneficio dei pochi assenti.

Esercizio 1. (da sapere) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'identificazione fra spazi topologici. Dimostrare che Y è di Hausdorff se e solo se dati $x, x' \in X$ tali che $f(x) \neq f(x')$ esistono due aperti di X disgiunti e saturi rispetto a f , uno contenente x e l'altro contenente x' .

Esercizio 2. Siano $X = \mathbb{R}^2$ e \sim la relazione d'equivalenza su X data da $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $a = a'$ e $b - b' \in \mathbb{Z}$. Sia poi \approx la relazione d'equivalenza su X data da $p \approx q$ se e solo se $p = q$ oppure $\|p\| = \|q\| > 1$, oppure $\|p\| \geq 2$ e $\|q\| \geq 2$.

- (1) Determinare se i quozienti X/\sim e X/\approx sono compatti e se sono connessi.
- (2) Determinare se i quozienti X/\sim e X/\approx sono di Hausdorff.

Esercizio 3. Dimostrare che $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/G$ dove G è il gruppo delle traslazioni per numeri interi

$$G = \{x \mapsto x + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

è aperta ma non chiusa.

Esercizio 4. Sia $G = \{\text{Id}_{\mathbb{C}}, \sigma\}$ il sottogruppo di omeomorfismi del disco unitario chiuso

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

in se stesso, dove $\sigma: D \rightarrow D$ è definita come $\sigma(z) = -z$ per ogni $z \in D$. Si dimostri che il quoziente D/G è omeomorfo a D . (*Suggerimento:* usare un'applicazione ben nota $f: D \rightarrow D$ tale che $f(z) = f(-z)$.)

Esercizio 5. Siano X uno spazio topologico di Hausdorff, e $K \subseteq X$ un sottospazio compatto. Consideriamo la relazione d'equivalenza \sim_K che identifica fra loro tutti i punti di K . Dimostrare che X/\sim_K è di Hausdorff.

Esercizio 6. (da sapere) Sia $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con topologia euclidea. Definiamo le seguenti relazioni d'equivalenza:

- (1) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ (cioè uno è 0 e l'altro è 1) e $b = b'$;
- (2) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ e $b + b' = 1$;
- (3) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ e $b = b'$, oppure $\{b, b'\} = \{0, 1\}$ e $a = a'$;
- (4) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ e $b + b' = 1$, oppure $\{b, b'\} = \{0, 1\}$ e $a + a' = 1$;
- (5) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ e $b = b'$, oppure $\{b, b'\} = \{0, 1\}$ e $a + a' = 1$;

Intuitivamente, i quozienti X/\sim sono ottenuti incollando alcuni dei lati del quadrato fra loro, certe volte nello stesso verso e certe volte "al contrario". Si possono visualizzare come le seguenti figure:

- il nastro di Möbius,
- la bottiglia di Klein,
- la superficie laterale di un cilindro,
- un toro bidimensionale (cioè $S^1 \times S^1$, cioè è la superficie di una ciambella).

L'esercizio consiste nel ricercare immagini di questi oggetti (se non li conoscete già), e riconoscere quale relazione d'equivalenza corrisponde a quale figura, immaginando come sono incollati i lati del quadrato fra loro. Notare che manca una figura: cercate di immaginare com'è fatta, la vedremo meglio più avanti durante il corso.

Esercizio 7. (da sapere) Ricordiamo la definizione degli spazi proiettivi reali e complessi (con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$):

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

dove

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0} \mid q = \lambda p$$

e

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

dove

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}_{\neq 0} \mid q = \lambda p.$$

Su questi spazi proiettivi mettiamo la topologia quoziente indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ rispettivamente.

- (1) Dimostrare che tutti questi spazi proiettivi sono connessi.
- (2) Consideriamo la proiezione $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ e la sua restrizione $\pi|_{S^n}$ alla sfera unitaria $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dimostrare che la restrizione $\pi|_{S^n}: S^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ è suriettiva.
- (3) Dimostrare che $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ è compatto.
- (4) Svolgere il punti precedenti con \mathbb{C} al posto di \mathbb{R} .
- (5) Trovare un gruppo G di omeomorfismi di $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tale che $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = X/G$, e analogamente con \mathbb{C} al posto di \mathbb{R} .
- (6) Consideriamo

$$D = \{(p, \lambda p) \in X \times X \mid p \in X, \lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}\}.$$

Dimostrare che D è chiuso in $X \times X$, e analogamente con \mathbb{C} al posto di \mathbb{R} .

- (7) Dimostrare che $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ e $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ sono di Hausdorff.

Esercizio 8. Questo esercizio è tratto dal libro di Manetti, e mostra che il prodotto di identificazioni non è sempre un'identificazione. Siano $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}/\sim$, dove $a \sim b$ se e solo se $a = b$ oppure $a, b \in \mathbb{Z}$. Sia $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ l'unione di tutte le rette di equazione

$$x + y = n + \frac{\sqrt{2}}{n}$$

al variare di $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dimostrare che

- (1) la proiezione naturale $\pi: X \rightarrow Y$, $x \mapsto [x]$ è un'identificazione chiusa;
- (2) il sottoinsieme C è chiuso in $X \times \mathbb{Q}$, e saturo rispetto all'applicazione

$$\begin{aligned} \pi \times \text{Id}_{\mathbb{Q}}: \quad X \times \mathbb{Q} &\rightarrow Y \times \mathbb{Q} \\ (x, q) &\mapsto ([x], q) \end{aligned}$$

- (3) l'immagine $D = (\pi \times \text{Id}_{\mathbb{Q}})(C)$ non è chiusa in $Y \times \mathbb{Q}$, in particolare $(\pi(0), 0)$ è aderente a D ma non è in D ;
- (4) l'applicazione $\pi \times \text{Id}_{\mathbb{Q}}$ non è un'identificazione.

Esercizio 9. Siano $Y \subset \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$ due sottospazi chiusi non vuoti e si consideri l'insieme di matrici

$$W = \{A \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \text{esiste } x \in X \text{ tale che } Ax \in Y\}.$$

Dimostrare che se X è limitato allora W è chiuso.

Nel caso $n = m = 2$ e $X = Y = \{(x, y) \mid xy = 1\}$, dire se W è ancora chiuso.