Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.5, canale L-Z

6.4.2024

In alcuni esercizi si chiede di dimostrare alcune cose viste a lezione, a beneficio dei pochi assenti.

Esercizio 1. Costruire un esempio di spazio metrico non 2°-numerabile.

Esercizio 2. (**da sapere**)

(1) Dimostrare che sottospazi e prodotti[1] di spazi 1°-numerabili sono 1°-numerabili.
(2) Dimostrare che sottospazi e prodotti di spazi 2°-numerabili sono 2°-numerabili.
(3) Dimostrare che prodotti di spazi separabili sono separabili.

Esercizio 3. (**da sapere**) Non sempre sottospazi di spazi separabili sono separabili, vediamo un esempio. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey.

(1) Dimostrare che $X \times X$ con topologia prodotto è separabile.
(2) Provare che l'antidiagonale in $X \times X$ non è separabile.

Esercizio 4 (difficile)**.** Sia X spazio metrico non compatto. Dimostrare che esiste $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua non limitata.

Esercizi vari di topologia generale, fra cui esercizi di esami passati:

Nota: prima di risolvere l'esercizio difficile e quello molto difficile di questo foglio, consiglio di risolvere tutti questi esercizi vari: assomigliano molto agli esercizi che dò di solito agli esami scritti.

Esercizio 5 (molto difficile)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, limitato e convesso, con $n \geq 1$. Dimostrare che A è omeomorfo a una palla aperta, es. $B_1(0)$.

Esercizio 6. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x+1, y+2) = f(x-1, y+1) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare che f possiede massimo e minimo.

Esercizio 7. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to D^2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \leq 1\}$ l'applicazione continua definita nel modo seguente:

(1) $f(p) = p$ se $\|p\| \leq 1$,
(2) $f(p) = \frac{p}{\|p\|}$ se $\|p\| \geq 1$.

Determinare, motivando la risposta, se f è aperta, se è chiusa e se è un'identificazione.

Esercizio 8. Siano X e Y spazi topologici, e si considerino sottoinsiemi $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Dimostrare che

$$A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$$

Esercizio 9. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottospazio compatto e sia $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ il sottospazio ottenuto unendo i segmenti che uniscono tutte le coppie di punti $p, q \in X$ tali che $\|p\| = \|q\|$. Dimostrare che Y è compatto.

[1] In questo esercizio per "prodotti" intendiamo i prodotti di due spazi topologici, entrambi del tipo indicato.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia seguente di sottoinsiemi di $X = \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \{[a, b[\ \mid \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

(1) Dimostrare che esiste una topologia $\mathcal{T}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base.
(2) Determinare la parte interna e la chiusura di $A =]\frac{1}{2}, 2[$ nella topologia $\mathcal{T}$.
(3) Determinare se $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff, motivando la risposta.

Esercizio 11. Si consideri $X = ([0, +\infty[\times [0, 1]) \ \cup \ ( ] - \infty, 0] \times \{0\})$ come sottospazio di $\mathbb{R}^2$, e la proiezione $p \colon X \to \mathbb{R}$ sulla prima coordinata. Si dimostri che

(1) p è un'identificazione,
(2) p non è un'applicazione aperta,
(3) p è un'applicazione chiusa.

Esercizio 12. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f^{-1}([-a, a])$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^4$ per ogni $a > 0$. Dimostrare che f è un'applicazione chiusa.

Esercizio 13. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo X uguale all'unione di due circonferenze che si toccano in un punto e non sono una "dentro" l'altra, ad esempio

$$X = \{p \mid \|p - (1, 0)\| = 1\} \cup \{q \mid \|q + (1, 0)\| = 1\}.$$

(1) Dimostrare che X non è omeomorfo a S^1.
(2) Dimostrare che X non è omeomorfo a $[0, 1]$.

Esercizio 14. Sia n intero ≥ 2 e sia $X \subseteq M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ che possiedono almeno un autovalore $\lambda \in [0, 1]$.

(1) Dimostrare che X è chiuso;
(2) Dimostrare che X non è compatto.