Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.7, canale L-Z

4.5.2024

In alcuni esercizi si chiede di dimostrare alcune cose viste a lezione, a beneficio dei pochi assenti.

Esercizio 1. Dimostrare che il sottospazio $GL_n(\mathbb{C}) \subset M_{n,n}(\mathbb{C})$ delle matrici complesse $n \times n$ invertibili è connesso per archi. Vale lo stesso per l'intersezione di $GL_n(\mathbb{C})$ con l'iperpiano delle matrici a traccia nulla?

Esercizio 2. Si considerino applicazioni continue fra spazi topologici come segue:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D. \tag{0.1}$$

Dimostrare che se $g \circ f$ e $h \circ g$ sono omeomorfismi, allora f, g, h sono omeomorfismi. Inoltre, se invece A, B, C, D sono gruppi, dimostrare che se $g \circ f$ e $h \circ g$ sono isomorfismi, allora f, g, h sono isomorfismi.

Il prof. ha introdotto a lezione le applicazioni paperine tra spazi topologici ma nessuno ha capito la definizione. Quello che si è capito è che ogni identità è paperina, e che, dato un diagramma come in (0.1), se $g \circ f$ e $h \circ g$ sono paperine, allora anche f, g, h e $h \circ g \circ f$ sono paperine.

Dimostrare che ogni omeomorfismo è paperina e che composizone di paperine è paperina.

Esercizio 3. Dimostrare che $\mathbb{Z}$ non è un retratto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Sia X spazio topologico e $Y \subseteq X$ un retratto di X. Dimostrare che se X è di Hausdorff allora Y è chiuso in X.

Esercizio 5. Sia $X = \mathbb{R}$. Determinare, giustificando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi sono retratti per deformazione di X:

(1) $Y = \{0\}$,
(2) $Z = [0, 1]$,
(3) $W =]0, 1[$.

Esercizio 6. Dimostrare che S^1 è un retratto per deformazione del nastro di Möbius.

Esercizio 7. Sia $D^2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \leq 1\}$. Dimostrare che

$$Y = (D^2) \times \{0\}) \cup (S^1 \times [0, 1]),$$

cioè la superficie laterale di un cilindro unita a solo una delle due basi, è un retratto per deformazione di

$$X = D^2 \times [0, 1],$$

cioè il cilindro pieno.

Dato uno spazio topologico X, si può definire $\pi_0(X)$ come l'insieme delle sue componenti connesse per archi. Data inoltre un'applicazione continua $f : X \to Y$, si può definire $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ nel modo seguente: data una componente connessa per archi $C \subseteq X$, si pone $f_*(C) = D$ dove D è la componente connessa per archi di Y che contiene $f(C)$. Usare questa costruzione per svolgere l'esercizio seguente.

Esercizio 8 (difficile)**.** Siano a, b interi non negativi, sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di a elementi e sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di b elementi. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ e $\mathbb{R}^n \smallsetminus B$ non sono omeomorfi se $a \neq b$.

Esercizio 9. Sia

$$X = \{(t, ct) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1], c \in \mathbb{Q}\}.$$

(1) Dimostrare che $Y = \{(0,0)\}$ è un retratto per deformazione di X.
(2) Sia $Z = \{(1,0)\}$ e $p_n = (1, \frac{1}{n})$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Supponiamo Z sia un retratto per deformazione di X, sia $R\colon X \times [0,1] \to X$ una deformazione. Dimostrare che $R(p_n, t)$ al variare di $t \in [0,1]$ è un cammino da $(1,0)$ a p_n.
(3) Dimostrare che per ogni n esiste un valore t_n tale che $R(p_n, t_n) = (0,0)$.
(4) Considerando la successione $n \mapsto t_n$ e una sua sottosuccessione convergente, dimostrare che esiste $t_\infty \in [0,1]$ tale che $R((1,0), t_\infty) = (1,0)$.
(5) Dimostrare che Z non è retratto per deformazione di X.

Esercizio 10. Sia X spazio topologico e siano $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ aperti semplicemente connessi di X tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Dimostrare che X è semplicemente connesso.

Esercizio 11. Sia X spazio topologico e siano $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ aperti connessi per archi di X tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Dimostrare che se ogni $\pi_1(A_n)$ è un gruppo abeliano, allora anche $\pi_1(X)$ è abeliano.

Esercizio 12. (**da sapere**) Sia X spazio topologico semplicemente connesso, siano $p, q \in X$, e siano $\alpha, \beta \in \Omega(X, p, q)$. Dimostrare[1] che $\alpha \sim \beta$.

Esercizio 13. Sia $D^n = \overline{B(0,1)} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| \leq 1\}$. Dimostrare che

$$X = D^n \smallsetminus \{0\}$$

e

$$Y = \mathbb{R}^n \smallsetminus B(0,1)$$

hanno gruppo fondamentale isomorfo.

Esercizio 14. Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue e omotope fra spazi topologici, e sia $a \in X$. Supponiamo $f(a) = g(a)$. Dimostrare che allora i sottogruppi $H = f_*(\pi_1(X,a))$ e $K = g_*(\pi_1(X,a))$ sono sottogruppi di $G = \pi_1(Y, f(a))$ fra loro coniugati.

Esercizio 15. (**da sapere**) Sia n un intero positivo, consideriamo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, e dato $i \in \{0, \dots, n\}$ sia A_i il sottoinsieme dei punti $p = [x_0, \dots, x_n]$ tali che la coordinata omogenea x_i è diversa da 0. Sia inoltre $H_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \smallsetminus A_i$ il sottoinsieme dei punti la cui coordinata x_i è uguale a 0, e sia $B_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]\}$, dove la coordinata uguale a 1 è x_i. Svolgere i seguenti punti per qualsiasi $i \in \{0, \dots, n\}$.

(1) Dimostrare che A_i è aperto in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
(2) Dimostrare che H_i è chiuso in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$.
(3) Dimostrare che B_i è aperto in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = A_i \cup B_i$.
(4) Dimostrare che $A_i \cap B_i$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$.
(5) Dimostrare che H_i è retratto per deformazione di B_i.

[1] Si può usare naturalmente che $\alpha * \iota(\beta)$ è equivalente al cammino costante 1_p, ma attenzione: va dimostrato che esiste un'omotopia *di cammini* da α a β, quindi per ogni valore del parametro i cammini "intermedi" fra α a β devono tutti avere gli stessi punti iniziale e finale.

(6) Svolgere i punti precedenti con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ al posto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (e dappertutto $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$).
(7) Dedurre dal punto precedente (e per induzione su n) che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è semplicemente connesso per ogni $n \geq 0$.
(8) Perché non si può dedurre allo stesso modo che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è semplicemente connesso per ogni n?

Esercizio 16. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme finito, con $n \geq 3$. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus Y$ è semplicemente connesso.

Esercizio 17. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0\}.$$

1) Provare che la sfera S^2 è un retratto per deformazione di $X - \{0\}$ e che $\{0\}$ è un retratto per deformazione di $X \cap B(0, 1)$.

2) Calcolare il gruppo fondamentale di X.