GEOMETRIA 2 - OTTAVO FOGLIO DI ESERCIZI

MARCO MANETTI - FRANCESCO MEAZZINI - GUIDO PEZZINI

Esercizio 0.1 (Elica circolare)**.** Siano $r, h \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che $r^2 + h^2 = 1$. Si consideri la curva differenziale

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (r\cos(t), r\sin(t), ht) \end{aligned}$$

Si determini l'apparato di Frenet per α.

Esercizio 0.2 (Apparato di Frenet per curve regolari in $\mathbb{R}^3$)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare e sia $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione (concorde) di velocità unitaria. Sia $\theta\colon I \to J$ un diffeomorfismo tale che $\alpha(t) = \beta(\theta(t))$ per ogni $t \in I$. Assumiamo che $\beta''(s) \neq 0$ per ogni $s \in J$ e denotiamo con

$$T_\beta(s) = \beta'(s) \qquad N_\beta(s) = \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|} \qquad B_\beta(s) = T_\beta(s) \wedge N_\beta(s)$$

la base mobile di Frenet della curva β.

(1) Dimostrare che $\|\alpha'(t)\| = \theta'(t)$ per ogni $t \in I$.
(2) Definiamo $T_\alpha(t) = T_\beta(\theta(t))$. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \theta'(t) T_\alpha(t) \\ \alpha''(t) &= \theta'^2(t) T'_\beta(\theta(t)) + \theta''(t) T_\alpha(t)\,. \end{aligned}$$

(3) Dedurre dal punto precedente che l'ipotesi $\beta''(s) \neq 0$ per ogni $s \in J$ è equivalente a richiedere che $\alpha'(t), \alpha''(t)$ siano linearmente indipendenti per ogni $t \in I$.

Definiamo allora l'apparato di Frenet della curva α come

$$T_\alpha(t) = T_\beta(\theta(t)), \quad N_\alpha(t) = N_\beta(\theta(t)), \quad B_\alpha(t) = B_\beta(\theta(t)), \quad \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(\theta(t)), \quad \tau_\alpha(t) = \tau_\beta(\theta(t))\,.$$

(4) Dimostrare che $\alpha''(t) = \theta''(t) T_\alpha(t) + \kappa_\alpha(t) \theta'^2(t) N_\alpha(t)$.
(5) Dedurre dal punto 4 che se un corpo materiale si muove con velocità costante in $\mathbb{R}^3$ allora la sua accelerazione ha direzione perpendicolare alla sua velocità ed è proporzionale alla curvatura e al quadrato della velocità stessa.
(6) Dimostrare le seguenti relazioni:

$$\begin{pmatrix} T'_\alpha(t) \\ N'_\alpha(t) \\ B'_\alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\alpha(t)\|\alpha'(t)\| & 0 \\ \kappa_\alpha(t)\|\alpha'(t)\| & 0 & \tau_\alpha(t)\|\alpha'(t)\| \\ 0 & \tau_\alpha(t)\|\alpha'(t)\| & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_\alpha(t) \\ N_\alpha(t) \\ B_\alpha(t) \end{pmatrix}$$

(7) Dimostrare che

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha(t)\|} \qquad N_\alpha(t) = B_\alpha(t) \wedge T_\alpha(t) \qquad N_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}\,.$$

(8) Dimostrare che

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \qquad \text{e} \qquad \tau_\alpha(t) = \frac{(\alpha(t) \wedge \alpha'(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''\|^2}\,.$$

Esercizio 0.3 (Cubica gobba)**.** Consideriamo la curva differenziabile regolare

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

Con riferimento all'Esercizio 0.2, si determini l'apparato di Frenet di α.

Esercizio 0.4. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva differenziabile regolare piana. Dimostrare che se $\kappa_\alpha(t) = 0$ per ogni $t \in I$, allora l'immagine di α è contenuta in una retta.

Esercizio 0.5 (Curve prive di torsione)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare tale che $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ siano linearmente indipendenti per ogni $t \in I$. Dimostrare che l'immagine di α è contenuta in un piano se e solo se $\tau_\alpha(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

Esercizio 0.6 (Elica su una curva piana)**.** Sia $\beta\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare:

$$\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))\,.$$

L'elica su β di passo $h > 0$ è la curva regolare

$$\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad t \mapsto (\beta_1(t), \beta_2(t), ht)\,.$$

Determinare la curvatura e la torsione dell'elica di passo h sopra le seguenti curve piane:

- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\beta(t) = (2t, t^2)$,
- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\beta(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$.

Esercizio 0.7. Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziale regolare tale che $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ siano linearmente indipendenti per ogni $t \in I$. Dimostrare che se $\tau_\alpha(t) = 0$ per ogni $t \in I$ e $\kappa_\alpha(t) = \kappa$ è costante, allora l'immagine di α è contenuta in una circonferenza.

Esercizio 0.8. Dimostrare che la curva $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\alpha(t) = \left(\sin^3(t), \cos^3(t), 1 + \sin(t)\cos(t)\right)$$

è regolare. Calcolarne l'apparato di Frenet nel punto $\alpha(\pi/2)$.