Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.9, canale L-Z

23.5.2024

In alcuni esercizi si chiede di dimostrare alcune cose viste a lezione, a beneficio dei pochi assenti.

Esercizio 1. Definire un rivestimento $p\colon E \to S^1$ non banale, in modo tale che esista una sezione globale continua $s\colon S^1 \to E$.

Esercizio 2. (<u>**da sapere**</u>) Si consideri l'applicazione naturale $p\colon S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ data associando a un punto $x \in S^n$ la sua classe $[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che p è un rivestimento, dato da un'azione propriamente discontinua di un gruppo di omeomorfismi $G \subseteq \mathrm{Omeo}(S^n)$.

Esercizio 3. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, con X connesso ed E non vuoto. Dimostrare che p è suriettiva.

Esercizio 4. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Dimostrare che se X è di Hausdorff allora anche E è di Hausdorff.

Esercizio 5. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, con X connesso e di Hausdorff. Dimostrare che

(1) se X è compatto e p ha grado finito allora anche E è compatto;

(2) se E è compatto allora p ha grado finito.

Esercizio 6. Sia $E = \mathbb{R}^2$ e $G \subseteq \mathrm{Omeo}(E)$ il sottogruppo generato dai seguenti omeomorfismi:

$$a\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1, 1-y) \end{array}, \qquad b\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y+1) \end{array}.$$

Dimostrare che G agisce in modo propriamente discontinuo su E. A quale spazio topologico noto è omeomorfo il quoziente E/G?

Esercizio 7. Sia $p\colon E \to X$ rivestimento con E connesso per archi, e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio connesso per archi. Fissato $y_0 \in Y$ e data l'inclusione $\iota\colon Y \to X$, supponiamo che $\iota_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, y_0)$ sia suriettiva. Dimostrare che $p^{-1}(Y)$ è connesso per archi.

Esercizio 8. Sia (E, d) uno spazio metrico e $G \subseteq \mathrm{Omeo}(E)$ un sottogruppo di omeomorfismi tale che $d(x, g(x)) \geq 1$ per ogni $x \in E$ ed ogni $g \in G$, $g \neq \mathrm{Id}$. Sia $U \subseteq E$ una palla aperta di raggio $1/2$. Provare che $g(U) \cap h(U) = \emptyset$ per ogni $h, g \in G$, $h \neq g$; dunque G agisce in maniera propriamente discontinua e la proiezione $E \to E/G$ è un rivestimento.

Esercizio 9. Siano $G \subset E \subset GL_n(\mathbb{R})$ due sottogruppi con G topologicamente chiuso in E. Definiamo la relazione di equivalenza $\sim$ in E ponendo $A \sim B$ se esiste $C \in G$ tale che $B = CA$ (ossia stiamo considerando l'azione di G su E data dalla moltiplicazione a sinistra). Determinare un'applicazione continua $F\colon E \times E \to E$ tale che

$$K = \{(A, B) \in E \times E \mid A \sim B\} = F^{-1}(G)$$

e motivare come da questo segue che il quoziente $X = E/G = E/\sim$ è di Hausdorff.

Esercizio 10 (Varietà di Iwasawa reali (così dette in onore di Kenkichi Iwasawa, 1917–1998))**.** Siano $E \subset GL_3(\mathbb{R})$ il sottogruppo delle matrici triangolari superiori unipotenti, ossia con coefficienti uguali ad 1 sulla diagonale, e $G = E \cap M_{3,3}(\mathbb{Z})$.

1) Provare che l'azione di G su E per moltiplicazione a sinistra è propriamente discontinua e che il quoziente $X = E/G$ è connesso e di Hausdorff.

2) Sia $K \subset E$ il sottoinsieme formato dalle matrici con coefficienti di norma ≤ 1, provare che E/G è compatto (e dire perché il nonsenso di questa domanda è solo apparente).

2 (Difficile) dimostrare che non esiste alcun rivestimento $Y \to X$ con Y compatto, connesso per archi, e $\pi_1(Y)$ abeliano.

Esercizio 11 (Varietà di Iwasawa complesse)**.** Siano $E \subset GL_3(\mathbb{C})$ il sottogruppo delle matrici triangolari superiori unipotenti, ossia con coefficienti uguali ad 1 sulla diagonale, e $G = E \cap M_{3,3}(\mathbb{Z}[i])$ (ossia a coefficienti interi di Gauss).

Provare che l'azione di G su E per moltiplicazione a sinistra è propriamente discontinua e che il quoziente $X = E/G$ è compatto, connesso e di Hausdorff.

Nota a futura memoria per chi studierà geometria: quasta varietà è particolarmente celebre perché alla base di tanti controesempi in geometria complessa.