NOTE DEL CORSO DI GEOMETRIA 2 - SAPIENZA 2023/2024

FRANCESCO MEAZZINI

ABSTRACT. Queste note contengono parte degli argomenti trattati nel corso di Geometria 2 - A.A. 2023/24. Sono da considerarsi un supporto allo studio e non intendono in alcun modo sostituire il libro di testo [1].

CONTENTS

1. LEZIONE 1 - 13/05/2024

1.1. **Derivate direzionali.** Denotiamo con $u_1, \dots, u_n$ le funzioni coordinate in $\mathbb{R}^n$, dunque

$$u_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad u_i(a_1, \dots, a_n) = a_i \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n\}\,.$$

Definition 1.1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F : U \to \mathbb{R}$ una funzione. Siano $a \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo la composizione

$$t \mapsto a + tv \mapsto F(a + tv)$$

che è una funzione reale di variabile reale, ben definita in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$. La sua derivata in 0

$$v(F)_a = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t}$$

si dice (se esiste) *derivata direzionale di F in a rispetto a v*.

Notazione. Quando $v = e_j$ è un vettore della base canonica utilizzeremo le seguenti notazioni equivalenti per la derivata direzionale di una funzione F in un punto a:

$$e_j(F)_a = \frac{\partial F}{\partial u_j}(a) = \partial_j F(a)\,.$$

La derivata direzionale nella direzione e_j viene anche detta *j-esima derivata parziale*.

Definition 1.2. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F : U \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che F è:

- di classe C^0 se è continua,
- di classe C^k se è continua e tutte le sue derivate parziali (di ogni ordine minore o uguale a k) esistono in ogni punto di U e sono funzioni continue,
- di classe C^∞ se è di classe C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 1.3. Sia $F \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k, $k \geq 2$. Sia $a \in U$. Allora

$$\partial_i \partial_j F(a) = \partial_j \partial_i F(a) \text{ per ogni } i, j \in \{1, \dots, n\} .$$

Definition 1.4. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F \colon U \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Diremo che F è di classe C^k (risp. C^∞) se la composizione $u_j \circ F \colon U \to \mathbb{R}$ è di classe C^k (risp. C^∞) per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$.

Definition 1.5. Siano $U, V \subseteq R^n$ aperti. Una biezione $F \colon U \to V$ si dice *diffeomorfismo di classe C^k* (risp. *diffeomorfismo*) se le composizioni

$$U \xrightarrow{F} V \hookrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad V \xrightarrow{F^{-1}} U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

sono entrambe di classe C^k (risp. di classe C^∞).

Estendiamo le definizioni precedenti a sottoinsiemi arbitrari di $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.6. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $F \colon X \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Diremo che F è di classe C^k (risp. C^∞) se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x di x in $\mathbb{R}^n$ e una funzione $\tilde{F} \colon U_x \to \mathbb{R}^m$ di classe C^k (risp. C^∞) tale che

$$\tilde{F}|_{X \cap U_x} = F|_{X \cap U_x} .$$

Definition 1.7. Siano $X, Y \subseteq R^n$. Una funzione $F \colon X \to Y$ si dice *di classe C^k* (risp. *di classe C^∞*) se la composizione

$$X \xrightarrow{F} Y \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

è di classe C^k (risp. C^∞). Analogamente, una biezione $F \colon X \to Y$ si dice *diffeomorfismo di classe C^k* (risp. *didiffeomorfismo*) se le composizioni

$$X \xrightarrow{F} Y \hookrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad Y \xrightarrow{F^{-1}} X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

sono entrambe di classe C^k (risp. di classe C^∞).

1.2. **Varietà differenziabili.**

Definition 1.8. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una coppia (U, φ_U) dove $U \in \tau$ e $\varphi_U \colon U \to \varphi_U(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo si dice *n-carta locale*. Diremo che due n-carte locali (U, φ_U) e (V, φ_V) sono C^k-compatibili (risp. C^∞-compatibili) se $U \cap V =$ oppure $U \cap V \neq$ e la funzione

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} \colon \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$$

è un diffeomorfismo di classe C^k (risp. C^∞).

Osservazione 1.9. Due n-carte locali sono sempre C^0-compatibili.

Esercizio 1.10. Nello spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$, stabilire per quali valori di $k \geq 0$ le 1-carte locali

$$(\mathbb{R}, t \mapsto t) \qquad \text{e} \qquad (\mathbb{R}, t \mapsto t^3)$$

sono C^k-compatibili.

Definition 1.11. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un *n-atlante differenzialibile di classe C^k (risp. C^∞)* è una famiglia di n-carte locali $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che

- $\{U_\lambda\}$ sia un ricoprimento per X,
- ogni coppia di n-carte locali sia C^k-compatibile (risp. C^∞-compatibile).

Definition 1.12. Sia $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Una *varietà topologica di dimensione n* è uno spazio topologico (X, τ) tale che:

- (X, τ) è di Hausdorff,
- (X, τ) ammette una base numerabile,
- esiste un n-atlante differenziabile di classe C^0.

Definition 1.13. Sia $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Una *varietà differenziabile di classe C^k di dimensione n* è uno spazio topologico (X, τ) tale che:

- (X, τ) è di Hausdorff,
- (X, τ) ammette una base numerabile,
- esiste un n-atlante differenziabile di classe C^k.

1.3. **Esempi.**

Esercizio 1.14 (Prodotto di varietà differenziabili)**.** Dimostrare che se X e Y sono due varietà differenziabili di dimensioni n ed m, allora il prodotto $X \times Y$ dotato della topologia prodotto eredita una naturale struttura di varietà differenziabile di dimensione $m+n$.

Esempio 1.15. $\mathbb{R}^N$ è una varietà differenziabile di dimensione N; un atlante può essere definito come un'unica N-carta locale data dall'ideantità.

Esempio 1.16. $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ è una varietà differenziabile di dimensione 1. Un 1-atlante può essere realizzato considerando i due aperti

$$U = S^1 \setminus \{(0,1)\} \qquad \text{e} \qquad V = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$$

e le appropriate proiezioni stereografiche

$$\varphi_U : U \to \mathbb{R} \qquad\qquad \varphi_V : V \to \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 1.17. Esplicitare le 1-carte locali dell'Esempio 1.16 e verificarne la compatibilità.

Esempio 1.18. Il toro $T = S^1 \times S^1$ è una varietà differenziabile di dimensione 2 (segue dall'Esempio 1.16 e dall'Esercizio 1.14).

Esempio 1.19. Il cilindro $C = S^1 \times \mathbb{R}$ è una varietà differenziabile di dimensione 2 (segue dall'Esempio 1.16, dall'Esempio 1.15 e dall'Esercizio 1.14).

Esempio 1.20. Siano $0 < r \leq N$ interi fissati. La *Grassmanniana* $\mathrm{Gr}(r,N)$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione r in $\mathbb{R}^N$. Possiamo dotare $\mathrm{Gr}(r,N)$ di una topologia realizzandolo come quoziente. Definiamo

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R}) \setminus C &\longrightarrow \mathrm{Gr}(r,N) \\ M &\mapsto \mathsf{span}(M) \end{aligned}$$

dove $C = \{M \in \mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R}) \,|\, rk(M) \leq r-1\}$ e $\mathsf{span}(M)$ è il sottospazio vettoriale di R^N generato dalle righe della matrice M. Si noti che:

- C è chiuso in $\mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R})$
- π è suriettiva,
- $\pi(M) = \pi(M')$ se e solo se esiste una matrice invertibile $A \in \mathsf{GL}_r(\mathbb{R})$ tale che $AM = M'$,
- comunque scelti r indici $i_1 < \cdots < i_r \in \{1,\ldots,N\}$, per ogni $A \in \mathsf{GL}_r(\mathbb{R})$ ed ogni $M \in \mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R})$, si ha

  $$(AM)_{i_1,\ldots,i_r} = AM_{i_1,\ldots,i_r}$$

  dove $M_{i_1,\ldots,i_r} \in \mathsf{Mat}_{r\times r}(\mathbb{R})$ è il minore di M ottenuto selezionando le r colonne di posti $i_1,\ldots,i_r$,
- per ogni $M \in \mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R}) \setminus C$ esiste (almeno) una scelta di indici $i_1 < \cdots < i_r$ tale che $\det(M_{i_1,\ldots,i_r}) \neq 0$,
- per ogni $M \in \mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R})$ tale che $\det(M_{i_1,\ldots,i_r}) \neq 0$ esiste un'unica matrice $A \in \mathsf{GL}_r(\mathbb{R})$ tale che $(AM)_{i_1,\ldots,i_r} = \mathsf{id}_{r\times r}$ (è sufficiente scegliere che $A = (M_{i_1,\ldots,i_r})^{-1}$).

Dalle precedenti osservazioni deduciamo che:

- gli aperti saturi $U_{i_1,\ldots,i_r} = \{M \in \mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R}) \,|\, \det(M_{i_1,\ldots,i_r}) \neq 0\}$ formano un ricoprimento di $\mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R}) \setminus C$,
- $\mathrm{Gr}(r,N) = {}^{\mathsf{Mat}_{r\times N}(\mathbb{R})\setminus C}/_{\mathsf{GL}_r(\mathbb{R})}$ è uno spazio topologico dotato della topologia quoziente,
- gli aperti $V_{i_1,\ldots,i_r} = \pi(U_{i_1,\ldots,i_r})$ formano un ricoprimento di $\mathrm{Gr}(r,N)$,
- le applicazioni $\varphi_{i_1,\ldots,i_r} \colon V_{i_1,\ldots,i_r} \to \mathsf{Mat}_{r\times(N-r)}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{r(N-r)}$ definite da

  $$M \mapsto \left((M_{i_1,\ldots,i_r})^{-1}M\right)_{j_1,\ldots,j_{N-r}}$$

  forniscono delle $r(N-r)$ carte locali, dove $j_1 < \cdots < j_{N-r}$ sono indici tali che

  $$\{i_1,\ldots,i_r\} \cup \{j_1,\ldots,j_{N-r}\} = \{1,\ldots,N\}\,,$$

- $\{(V_{i_1,\ldots,i_r}, \phi_{i_1,\ldots,i_r})\}$ è un $r(N-r)$-atlante per $\mathrm{Gr}(r,N)$ di classe C^∞.

Dunque la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(r,N)$ è una varietà differenziabile di dimensione $r(N-r)$.

2. Lezione 2 - 16/05/2024

2.1. Curve differenziabili.

Definition 2.1. Sia X una varietà differenziabile. Una *curva differenziabile* (o, per brevità, *curva*) in X è un'applicazione di classe C^∞

$$\alpha \colon I \to X$$

tale che I sia un intervallo di $\mathbb{R}$.

Osservazione 2.2. Nella Definizione 2.1, se I non è un intervallo aperto, è sottointeso che l'applicazione α sia definita e di classe C^∞ su un intervallo aperto contentenente I.

Osservazione 2.3. Una curva è un'applicazione; due curve differenziabili diverse possono avere la stessa immagine.

Definition 2.4. Sia X una varietà differenziabile. Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli e sia $\alpha \colon I \to X$ una curva differenziabile. Se $\theta \colon J \to I$ è un diffeomorfismo, allora la curva $\beta \coloneqq \alpha \circ \theta \colon J \to X$ è una curva differenziabile e si dice *riparametrizzazione* di α.

La riparametrizzazione β nella Definizione 2.4 si dice *concorde* (risp. *discorde*) se $\theta'(s) > 0$ (risp. $\theta'(s) < 0$) per ogni $s \in J$.

Osserviamo che affinché $\theta \colon J \to I$ sia un diffeomorfismo è necessario e sufficiente che θ sia invertibile, di classe C^∞ e tale che $\theta'(s) \neq 0$ per ogni $s \in J$ (si pensi al Teorema della funzione implicita).

Definition 2.5. Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^N$ una curva differenziabile. Allora:

- $\alpha'(t)$ è il *vettore velocità in t di α*,
- $\|\alpha'(t)\|$ è la *velocità in t di α*,
- α si dice *regolare* se $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Osservazione 2.6. Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^N$ una curva differenziabile regolare. Sia $\beta = \alpha \circ \theta : J \to \mathbb{R}^N$ una riparametrizzazione. Allora β è una curva differenziabile regolare. Infatti:

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\theta(s))\| \cdot |\theta'(s)| \neq 0 \, .$$

Esempio 2.7. La curva $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\alpha(t) = (t, \sin(t))$ ha la stessa immagine della curva

$$\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \beta(s) = (s^5, \sin(s^5)) \, ,$$

ma le due curve non sono riparametrizzazioni l'una dell'altra (perché?).

Definition 2.8. Sia $\alpha \colon I \to X$ una curva differenziabile regolare in una varietà differenziabile X. Siano $a, b \in I$ con $a < b$. La lunghezza di α fra a e b è definita come

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \, .$$

Esempio 2.9. Fissiamo $p, v \in \mathbb{R}^2$. Consideriamo la curva

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto p + tv \, .$$

Allora $\alpha'(t) = v$ per ogni $t \in I$. La lunghezza della curva fra a e b è allora $\int_a^b \|v\| dt = \|v\|(b-a)$.

Esempio 2.10. Fissiamo $r > 0$. Consideriamo la curva

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t)) \, .$$

Allora $\alpha'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$ e dunque $\|\alpha'(t)\| = r$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. La lunghezza della curva fra a e b è allora $\int_a^b r\, dt = r(b-a)$.

Proposizione 2.11. *Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^N$ una curva differenziabile. Sia $\beta = \alpha \circ \theta : J \to \mathbb{R}^N$ una riparametrizzazione di α. Allora, dati $a < b$ in J, la lunghezza di β fra a e b coincide con la lunghezza di α fra $\theta(a)$ e $\theta(b)$.*

Proof. Assumiamo β concorde. Abbiamo:

$$\int_a^b \|\beta'(s)\| = \int_a^b \|\alpha'(\theta(s))\| \cdot |\underbrace{\theta'(s)}_{>0}| ds = \int_a^b \|\alpha'(\underbrace{\theta(s)}_{t})\| \underbrace{\theta'(s) ds}_{dt} = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} \|\alpha'(t)\| dt \, .$$

Esercizio: cosa accade se β è discorde? □

Proposizione 2.12. *Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^N$ una curva differenziabile regolare. Allora esiste una riparametrizzazione di α con velocità costante pari a 1.*

Proof. Fissiamo $t_0 \in I$. Definiamo la funzione

$$\lambda\colon I \to \mathbb{R} \qquad \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du \,.$$

λ è di classe C^∞ e soddisfa $\lambda'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ per ogni $t \in I$. Dunque λ definisce un diffeomorfismo sull'immagine $J \coloneqq \lambda(I) \subseteq \mathbb{R}$. Poniamo $\theta \coloneqq \lambda^{-1}$ e consideriamo la riparametrizzazione

$$\beta\colon J \to \mathbb{R}^N \qquad \beta(s) = \alpha\left(\lambda^{-1}(s)\right) .$$

Abbiamo $\theta'(s) = \frac{1}{\lambda'(\theta(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(\theta(s))\|} > 0$ per ogni $s \in J$, pertanto

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\theta(s))\theta'(s)\| = \|\alpha'(\theta(s))\| \cdot |\theta'(s)| = \|\alpha'(\theta(s))\| \cdot \frac{1}{\|\alpha'(\theta(s))\|} = 1 \,.$$

□

Esempio 2.13. Siano $r, h > 0$. La curva differenziabile

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t), ht)$$

ha per immagine un'elica circolare. La velocità di α è

$$\|\alpha'(t)\| = \|(-r\sin(t), r\cos(t), h)\| = \sqrt{r^2+h^2} \,.$$

Una riparametrizzazione di α a velocità unitaria è

$$\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto \left(r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right), r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right), h\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} \right),$$

dove si è scelto $\theta(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

3. Lezione 3 - 17/05/2024

3.1. **Base mobile di Frenet.** In questa sezione ci occuperemo di studiare curve differenziabili in $\mathbb{R}^N$. Data una curva differenziabile $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^N$, consideriamo i campi vettoriali di $\mathbb{R}^N$ definiti come

$$\alpha', \alpha'', \cdots, \alpha^{(N-1)} .$$

Possiamo allora costruire per ogni $t \in I$ una catena (o bandiera) di sottospazi di $\mathbb{R}^N$:

$$\Theta_1(t) = \langle \alpha'(t) \rangle \subseteq \qquad \dots \qquad \subseteq \Theta_{N-1}(t) = \langle \alpha'(t), \cdots, \alpha^{N-1}(t) \rangle .$$

Definition 3.1. Data una curva differenziabile $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^N$, il sottospazio $\Theta_k(t)$ si dice *k-esimo spazio osculatore di α in t.*

Proposizione 3.2 (Base mobile di Frenet)**.** *Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^N$ una curva differenziabile a velocità unitaria tale che per ogni $t \in I$ i vettori*

$$\alpha', \alpha'', \cdots, \alpha^{N-1}$$

siano linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^N$. Esistono campi vettoriali

$$b_1, \dots, b_n\colon I \to \mathbb{R}^n$$

tali che, per ogni $t \in I$, si abbia:

(1) $\{b_(t), \dots, b_n(t)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^N$ orientata positivamente,
(2) $\Theta_k(T) = \langle b_1(t), \dots, b_k(t) \rangle$ per ogni $k = 1, \dots, N-1$,
(3) $b_k(t) \cdot \alpha^{(k)}(t) > 0$ per ogni $k = 1, \dots, N-1$.

Proof. Fissiamo $t \in I$ e sfruttiamo il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

$$b_1(t) = \alpha'(t)$$

$$c_k(t) = \alpha^{(k)}(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \left(b_j(t) \cdot \alpha^{(k)}\right) b_j(t)$$

$$b_k(t) = \frac{c_k(t)}{\|c_k(t)\|}$$

Tale procedimento fornisce $N-1$ vettori ortonormali fra loro, tali che $\Theta_k(T) = \langle b_1(t), \ldots, b_k(t)\rangle$ come desiderato. $b_N(t)$ è allora univocamente determinato dalla condizione (1). Per verificare che $b_k(t)\cdot \alpha^{(k)}(t) > 0$ basta osservare che

$$\begin{aligned} c_k(t)\cdot \alpha^{(k)}(t) &= \|\alpha_k(t)\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1}\left(b_j(t)\cdot \alpha^{(k)}\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N}\left(b_j(t)\cdot \alpha^{(k)}\right)^2 - \sum_{j=1}^{k-1}\left(b_j(t)\cdot \alpha^{(k)}\right)^2 > 0\,. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3 (Relazioni di Frenet)**.** *Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^N$ una curva differenziabile a velocità unitaria tale che per ogni $t \in I$ i vettori*

$$\alpha', \alpha'', \cdots, \alpha^{N-1}$$

siano linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^N$. Sia

$$b_1, \ldots, b_N \colon I \to \mathbb{R}^n$$

la base mobilde di Frenet. Allora esistono funzioni $\kappa_1, \ldots \kappa_{N-1}\colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ con le proprietà seguenti:

- *$\kappa_i(t) > 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, N-2\}$,*
- *se $N \geq 3$ si ha*

$$b_i'(t) = -\kappa_{i-1} b_{i-1} + \kappa_i b_{i+1} \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, N$$

  dove $\kappa_0 = \kappa_N = 0$ e $b_0 = b_{N+1} = 0$.

Proof. Per $t \in I$ si ha

$$b_i'(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) b_j(t)$$

dove $a_{ij}(t) = b_i'(t)\cdot b_j(t)$ perché $\{b_1(t), \ldots, b_N(t)\}$ è una base ortonormale. In particolare sono funzioni C^∞. Derivando otteniamo

$$b_i(t)\cdot b_j(t) = \delta_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad a_{ij} = b_i'(t)\cdot b_j(t) = -b_i(t)\cdot b_j'(t) = -a_{ji}\,.$$

Dunque la matrice $(a_{ij})_{i,j}$ è antisimmetrica. Inoltre $b_i(t) \in \Theta_i(t)$ e dunque $b_i'(t) \in \Theta_{i+1}(t) = \langle b_1(t), \ldots, b_{i+1}(t)\rangle$ per ogni $t \in I$. Ne segue che

$$\begin{aligned} &a_{13}(t) = \cdots = a_{1N}(t) = 0 \\ &a_{24}(t) = \cdots = a_{2N}(t) = 0 \\ &\quad\vdots \\ &a_{N-2,N}(t) = 0\,. \end{aligned}$$

Dall'antisimmetria si deduce allora che

$$\begin{pmatrix} b_1'(t) \\ \\ \vdots \\ \\ b_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\kappa_1(t) & 0 & k_2(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{N-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{N-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \\ \vdots \\ \\ b_N(t) \end{pmatrix}$$

dove abbiamo definito $\kappa_i(t) = a_{i,i+1}(t)$. Infine, dalla relazione $b_i'(t) = -\kappa_{i-1} b_{i-1} + \kappa_i b_{i+1}$, deduciamo immediatamente che

$$\kappa_i(t) = b_i'(t)\cdot b_{i+1}(t)\,.$$

D'altra parte, derivando l'Equazione 3.2, otteniamo

$$b_i'(t) = \frac{\alpha^{(i+1)}(t)}{\|c_{i+1}(t)\|} + v(t)$$

dove $v(t)\colon I \to \mathbb{R}^N$ è un campo vettoriale tale che $v(t) \in \Theta_i(t)$ per ogni $t \in I$. Pertanto:

$$\kappa_i(t) = b_i'(t)\cdot b_{i+1}(t) = \left(\frac{\alpha^{(i+1)}(t)}{\|c_{i+1}(t)\|} + v(t)\right)\cdot b_{i+1}(t) = \frac{\alpha^{(i+1)}(t)}{\|c_{i+1}(t)\|}\cdot b_{i+1}(t) > 0\,.$$

□

Le relazioni dimostrate nel Teorema3.3 si dicono *formule di Frenet*, mentre le funzioni $\kappa_i(t)$ si chiamano *i-esima curvatura* di α. La base di Frenet insieme alle curvature costituiscono il cosiddetto *apparato di Frenet* di α. L'apparato di Frenet per curve regolari a velocità arbitraria verrà trattato nell'Esercizio 4.8.

3.2. **Proprietà metriche di curve in $\mathbb{R}^N$.** Ricordiamo che un'isometria Φ di $\mathbb{R}^N$ è un'applicazione

$$\Phi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \qquad \Phi(x) = Ax + c$$

dove $A \in \mathsf{Mat}_{N\times N}(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale $N \times N$ e $c \in \mathbb{R}^N$.

Definition 3.4. Diremo che due curve $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^N$ sono *congruenti* se esiste una isometria Φ di $\mathbb{R}^N$ tale che $\Phi(\alpha(t)) = \beta(t)$.

Si noti che la congruenza definisce una relazione di equivalenza. L'obiettivo di questa sezione è studiare *proprietà metriche* di una curva α, ovvero proprietà che l'immagine $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ ha in comune con l'immagine di tutte le curve ad essa congruenti. Un *invariante metrico* è una quantità associata ad $\alpha(I)$ che sia appunto invariante per isometrie.

Esercizio 3.5. Dimostrare che $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{N-1}(t)$ sono invarianti metrici per una curva differenziabile a velocità unitaria.

Teorema 3.6. *Siano $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^N$ e $\beta\colon I \to \mathbb{R}^N$ due curve a velocità unitaria che soddisfano le ipotesi del Teorema 3.3. Supponiamo che le curvature soddisfino $\kappa_{\alpha,i} = \kappa_{\beta,i}$ per ogni $i \in \{1, \dots, N-1\}$. Allora α e β sono congruenti.*

Proof. Fissiamo $t_0 \in I$ e sia $\Phi(x) = Ax + c$ l'isometria di $\mathbb{R}^N$ tale che

$$\Phi(\alpha(t_0)) = \beta(t_0) \qquad \text{e} \qquad Aa_i(t) = Ab_i(t) \tag{3.1}$$

dove $\{a_i(t_0)\}$ e $\{b_i(t_0)\}$ sono le basi di Frenet delle curve α e β rispettivamente. Dalle formule di Frenet (si veda il Teorema 3.3) deduciamo che i campi vettoriali $Aa_i(t)$ e $b_i(t)$ soddisfano lo stesso sistema di N equazioni differenziali lineari ordinarie con condizioni iniziali fissate dalle Equazioni (3.1). Pertanto $Aa_i(t) = b_i(t)$ per ogni $t \in I$. In particolare si ha $A\alpha'(t) = \beta'(t)$. Ne segue:

$$\Phi(\alpha(t)) - \Phi(\alpha(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{du}\Phi(\alpha(u))du = \int_{t_0}^{t} A\alpha'(u)du = \int_{t_0}^{t} \beta'(u)du = \beta(t) - \beta(t_0)\,.$$

Pertanto $\Phi(\alpha(t)) = \beta(t)$ per ogni $t \in I$ come desiderato. □

4. Lezione 4 - 20/05/2024

4.1. **Curve regolari in $\mathbb{R}^2$.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana a velocità unitaria. In particolare $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ e dunque le ipotesi della Proposizione 3.2 e del Teorema 3.3 sono soddisfatte. Inoltre, dato che $\|\alpha'(t)\| = 1$, derivando si ottiene $\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$. Dunque per le curve piane denoteremo la base mobile di Frenet con i simboli

$$T_\alpha(t) = b_1(t) = \alpha'(t) \qquad N_\alpha(t) = b_2(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}\,.$$

Le relazioni di Frenet del Teorema 3.3 diventano

$$T'_\alpha(t) = \kappa(t)N_\alpha(t) \qquad \text{e} \qquad N'_\alpha(t) = -\kappa(t)T_\alpha(t)\,.$$

Osservazione 4.1. Per curve piane, il segno dell'unica curvatura $\kappa(t)$ non è prescritto dal Teorema 3.3. In effetti, avremo $\kappa(t) > 0$ se $N_\alpha(t)$ applicato nel punto $\alpha(t)$ è diretto verso la concavità di $\alpha(I)$. Analogamente, avremo $\kappa(t) < 0$ se $N_\alpha(t)$ applicato nel punto $\alpha(t)$ è diretto verso la convessità di $\alpha(I)$. Infine, se $\kappa(t) = 0$ allora il corrispondente punto $\alpha(t)$ è un punto di flesso.

Definition 4.2 (Raggio di curvatura)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana a velocità unitaria. Il *raggio di curvatura* di α nel punto $\alpha(t)$ è definito come:

- $r_\alpha(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}$ se $\kappa(t) \neq 0$,
- $r_\alpha(t) = \infty$ se $\kappa(t) = 0$.

Definition 4.3 (Circonferenza osculatrice)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana a velocità unitaria. Il *centro di curvatura* di α nel punto $\alpha(t)$ è definito per ogni $t \in I$ tale che $\kappa(t) \neq 0$ come

$$C_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N_\alpha(t)\,.$$

La *circonferenza osculatrice* ad α nel punto $\alpha(t)$ è la curva $\gamma_t\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma_t(s)=C_\alpha(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\cos(s)T_\alpha(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\sin(s)N_\alpha(t).$$

4.2. **Curve regolari in** $\mathbb{R}^3$**.** Sia $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ una curva differenziabile a velocità unitaria. Dato che $\|\alpha'(t)\|=1$, derivando si ottiene $\alpha'(t)\cdot\alpha''(t)=0$. In particolare, le ipotesi della Proposizione 3.2 e del Teorema 3.3 sono soddisfatte se e solo se $\alpha''(t)\neq 0$ per ogni $t\in I$. Dunque per le curve in $\mathbb{R}^3$ denoteremo la base mobile di Frenet con i simboli

$$T_\alpha(t)=b_1(t)=\alpha'(t)\qquad N_\alpha(t)=b_2(t)=\frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}\qquad B_\alpha(t)=T_\alpha(t)\wedge N_\alpha(t).$$

I campi vettoriali $T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha$ si dicono campi di vettori *tangenti*, *normali* e *binormali* rispettivamente.

Indichiamo le due curvature fornite dal Teorema 3.3 con i simboli $\kappa(t)$ e $\tau(t)$, le chiameremo rispettivamente *curvatura* e *torsione*. Le relazioni di Frenet diventano allora

$$\begin{aligned} T_\alpha'(t)&=\kappa(t)N_\alpha(t)\\ N_\alpha'(t)&=-\kappa(t)T_\alpha(t)+\tau(t)B_\alpha(t)\\ B_\alpha'(t)&=-\tau(t)N_\alpha(t). \end{aligned}\tag{4.1}$$

Si noti che il Teorema 3.3 garantisce che $\kappa(t)>0$ per ogni $t\in I$, pertanto dalle relazioni precedenti otteniamo

$$\kappa(t)=\|T_\alpha'(t)\|.$$

Definition 4.4 (Raggio di curvatura)**.** Sia $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ una curva differenziabile a velocità unitaria. Il *raggio di curvatura* nel punto $\alpha(t)$ è $r_\alpha(t)=\frac{1}{\kappa(t)}$.

Definition 4.5 (Piano osculatore affine)**.** Sia $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ una curva differenziabile a velocità unitaria. Il *piano osculatore affine* di α nel punto $\alpha(t)$ è $\pi_\alpha(t)=\alpha(t)+\langle T_\alpha(t),N_\alpha(t)\rangle$.

Definition 4.6 (Circonferenza osculatrice)**.** Sia $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ una curva a velocità unitaria. Il *centro di curvatura* di α nel punto $\alpha(t)$ è definito come

$$C_\alpha(t)=\alpha(t)+\frac{1}{\kappa(t)}N_\alpha(t).$$

La *circonferenza osculatrice* ad α nel punto $\alpha(t)$ è la curva $\gamma_t\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_t(s)=C_\alpha(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\cos(s)T_\alpha(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\sin(s)N_\alpha(t).$$

Si noti che il piano osculatore affine di una curva in un punto contiene sempre la circonferenza osculatrice nel punto.

4.3. **Esercizi e (alcune) soluzioni.**

Esercizio 4.7 (Elica circolare)**.** Siano $r,h\in\mathbb{R}_{>0}$ tali che $r^2+h^2=1$. Si consideri la curva differenziale

$$\begin{aligned}\alpha\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}^3\\ t&\mapsto (r\cos(t), r\sin(t), ht)\end{aligned}$$

Si determini l'apparato di Frenet per α.

Esercizio 4.8 (Apparato di Frenet per curve regolari in $\mathbb{R}^3$)**.** Sia $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare e sia $\beta\colon J\to\mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione (concorde) di velocità unitaria. Sia $\theta\colon I\to J$ un diffeomorfismo tale che $\alpha(t)=\beta(\theta(t))$ per ogni $t\in I$. Assumiamo che $\beta''(s)\neq 0$ per ogni $s\in J$ e denotiamo con

$$T_\beta(s)=\beta'(s)\qquad N_\beta(s)=\frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|}\qquad B_\beta(s)=T_\beta(s)\wedge N_\beta(s)$$

la base mobile di Frenet della curva β.

(1) Dimostrare che $\|\alpha'(t)\|=\theta'(t)$ per ogni $t\in I$.
Soluzione. $\|\alpha'(t)\|=\|\beta'(\theta(t))\|\cdot|\theta'(t)|=\theta'(t)$.
(2) Definiamo $T_\alpha(t)=T_\beta(\theta(t))$. Dimostrare che

$$\begin{aligned}\alpha'(t)&=T_\alpha(t)\cdot\theta'(t)\\ \alpha''(t)&=T_\beta'(\theta(t))\cdot\theta'^2(t)+T_\alpha(t)\cdot\theta''(t).\end{aligned}$$

Soluzione. $\alpha''(t)=T_\alpha'(t)\cdot\theta'(t)+T_\alpha(t)\cdot\theta''(t)=T_\beta'(\theta(t))\theta'^2(t)+T_\alpha(t)\cdot\theta''(t)$.

(3) Dedurre dal punto precedente che l'ipotesi $\beta''(s) \neq 0$ per ogni $s \in J$ è equivalente a richiedere che $\alpha'(t), \alpha''(t)$ siano linearmente indipendenti per ogni $t \in I$.
Soluzione. $\beta''(s) \neq 0$ se e solo se $T'_\beta(s) \neq 0$, ovvero se e solo se $\alpha''(\theta^{-1}(s))$ non è proporzionale a $T_\alpha(\theta^{-1}(s))$ (e quindi ad $\alpha'(\theta^{-1}(s))$. Dall'arbitrarietà di s si ottiene la tesi.

Definiamo allora l'apparato di Frenet della curva α come

$$T_\alpha(t) = T_\beta(\theta(t)), \quad N_\alpha(t) = N_\beta(\theta(t)), \quad B_\alpha(t) = B_\beta(\theta(t)), \quad \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(\theta(t)), \quad \tau_\alpha(t) = \tau_\beta(\theta(t)) .$$

(4) Dimostrare che $\alpha''(t) = \theta''(t) T_\alpha(t) + \kappa_\alpha(t)\theta'^2(t) N_\alpha(t)$.
Soluzione. Basta sostituire la relazione $T'_\beta(\theta(t)) = \kappa_\beta(\theta(t)) N_\beta(\theta(t))$ in (2).

(5) Dedurre dal punto (4) che se un corpo materiale si muove con velocità costante in $\mathbb{R}^3$ allora la sua accelerazione ha direzione perpendicolare alla sua velocità ed è proporzionale alla curvatura e al quadrato della velocità stessa.

(6) Dimostrare le seguenti relazioni:

$$\begin{pmatrix} T'_\alpha(t) \\ N'_\alpha(t) \\ B'_\alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\alpha(t)\|\alpha'(t)\| & 0 \\ -\kappa_\alpha(t)\|\alpha'(t)\| & 0 & \tau_\alpha(t)\|\alpha'(t)\| \\ 0 & -\tau_\alpha(t)\|\alpha'(t)\| & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_\alpha(t) \\ N_\alpha(t) \\ B_\alpha(t) \end{pmatrix}$$

Soluzione. È sufficiente derivare le definizioni. Ad esempio:

$$T'_\alpha(t) = T'_\beta(\theta(t))\theta'(t) = [\text{Equazioni (4.1)}] = \kappa_\beta(\theta(t)) N_\beta(\theta(t))\theta'(t) = \kappa_\alpha(t) N_{\alpha(t)} .$$

(7) Dimostrare che

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \qquad N_\alpha(t) = B_\alpha(t) \wedge T_\alpha(t) \qquad B_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} .$$

Soluzione. Sfruttando il punto (4) si ha:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= \theta'(t) T_\alpha(t) \wedge \big(\theta''(t) T_\alpha(t) + \kappa_\alpha(t)\theta'^2(t) N_\alpha(t)\big) \\ &= \kappa_\alpha(t)\theta'^3(t) T_\alpha(t) \wedge N_\alpha(t) = \kappa_\alpha(t)\theta'^3(t) B_\alpha(t) . \end{aligned}$$

Ne segue che $\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = \kappa_\alpha(t)\theta'^3(t) = \kappa_\alpha(t)\|\alpha'(t)\|^3$.

(8) Dimostrare che

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \qquad \text{e} \qquad \tau_\alpha(t) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''\|^2} .$$

Soluzione. La prima uguaglianza deriva dalla soluzione precedente. Abbiamo inoltre dimostrato che $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$ è parallelo a $B_\alpha(t)$. Dal punto (4), tenendo conto delle relazioni del punto (6), abbiamo allora

$$\alpha'''(t) = \big(\theta''(t) T_\alpha(t) + \kappa_\alpha(t)\theta'^2(t) N_\alpha(t)\big)' = \kappa_\alpha(t)\tau_\alpha(t)\theta'^3(t) B_\alpha(t) + \underbrace{\ldots}_{\perp B_\alpha(t)}$$

da cui

$$\big(\alpha(t) \wedge \alpha'(t)\big) \cdot \alpha'''(t) = \kappa_\alpha^2(t)\tau_\alpha(t)\theta'^6(t) .$$

Dividendo per $\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2 = \kappa_\alpha^2(t)\theta'^6(t)$ si ottiene dunque la tesi.

Esercizio 4.9 (Cubica gobba)**.** Consideriamo la curva differenziabile regolare

$$\begin{aligned} \alpha \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

Con riferimento all'Esercizio 4.8, si determini l'apparato di Frenet di α.
Soluzione. Derivando otteniamo

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2) \qquad \alpha''(t) = (0, 2, 6t) \qquad \alpha'''(t) = (0, 0, 6).$$

Pertanto $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (6t^2, -6t, 2)$, da cui:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \qquad \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = 2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4} .$$

Dall'Esercizio 4.8 segue allora che

$$
\begin{aligned}
T_\alpha(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(1,2t,3t^2) \\
N_\alpha(t) &= \frac{1}{\sqrt{(1+4t^2+9t^4)(1+9t^2+9t^4)}}(-9t^3-2t,-9t^4+1,6t^3+3t) \\
B_\alpha(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}(3t^2,-3t,1)\,.
\end{aligned}
$$

Infine

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{\sqrt{(1+4t^2+9t^4)^3}} \qquad \text{e} \qquad \tau_\alpha(t) = \frac{3}{1+9t^2+9t^4}\,.$$

Esercizio 4.10. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva differenziabile regolare piana. Dimostrare che se $\kappa_\alpha(t)=0$ per ogni $t \in I$, allora l'immagine di α è contenuta in una retta.

Esercizio 4.11. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare tale che $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ siano linearmente indipendenti per ogni $t \in I$. Dimostrare che l'immagine di α è contenuta in un piano se e solo se $\tau_\alpha(t)=0$ per ogni $t \in I$.
Soluzione. Supponiamo $\tau_\alpha(t)=0$ per ogni $t \in I$. Allora dalle relazioni di Frenet (6) segue che $B_\alpha(t)$ è costante. Fissiamo $t_0 \in I$ e consideriamo

$$(\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot B_\alpha(t) \quad \xRightarrow{\text{derivando}} \quad \alpha'(t)\cdot B_\alpha(t)=0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha(t)-\alpha(t_0)) \in B_\alpha(t_0)^\perp \ \text{ per ogni } t \in I\,.$$

Dunque $\pi\colon \alpha(t_0)+B_\alpha(t_0)^\perp$ fornisce il piano cercato. Viceversa, supponiamo $\alpha(I) \subseteq \pi$ e sia $\vec{n} \in \pi^\perp$ un generatore dell'ortogonale al piano π. Allora

$$(\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot \vec{n} = 0 \quad \xRightarrow{\text{derivando}} \quad \alpha'(t)\cdot\vec{n} = \alpha''(t)\cdot\vec{n} = 0\,,$$

così che il piano osculatore $\Theta_2(t) = \langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle$ è costante. Pertanto $B_\alpha(t)$ è costante e dalle relazioni di Frenet (6) si ottiene $\tau_\alpha(t))=0$ per ogni $t \in I$ come desiderato.

Esercizio 4.12 (Elica su una curva piana)**.** Sia $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare:

$$\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))\,.$$

L'elica su β di passo $h>0$ è la curva regolare

$$\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad t \mapsto (\beta_1(t), \beta_2(t), ht)\,.$$

Determinare la curvatura e la torsione dell'elica di passo h sopra le seguenti curve piane:

- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\beta(t) = (2t, t^2)$,
- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\beta(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$.

Stabilire se le curve precedenti sono contenute in un piano di $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, determinare l'equazione di tale piano.

Esercizio 4.13. Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziale regolare tale che $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ siano linearmente indipendenti per ogni $t \in I$. Dimostrare che se $\tau_\alpha(t)=0$ per ogni $t \in I$ e $\kappa_\alpha(t)=\kappa$ è costante, allora l'immagine di α è contenuta in una circonferenza.
Soluzione. Dall'Esercizio 4.11 sappiamo che l'immagine di α è contenuta nel piano osculatore. Basta dunque verificare che il centro di curvatura (vedi Definizione 4.6) non varia per ottenere che l'immagine di α è contenuta nella circonferenza osculatrice. Abbiamo:

$$C'_\alpha(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{\kappa}N'_\alpha(t) = [\text{Esercizio } 4.8(6)] = \alpha'(t) - \frac{1}{\kappa}\kappa\|\alpha'(t)\|\,T_\alpha(t) = [\text{Esercizio } 4.8(7)] = \alpha'(t) - \|\alpha'(t)\|\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = 0\,.$$

Esercizio 4.14. Dimostrare che la curva $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin^3(t) \\ \cos^3(t) \\ 1+\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

è regolare. Calcolarne l'apparato di Frenet nel punto $\alpha(\pi/2)$.

Esercizio 4.15. [Esonero 31/05/2024] Sia $\alpha\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\alpha(t)=\begin{pmatrix} 1+\cos(t)+2\sin(t) \\ 2-2\cos(t)-\sin(t) \\ 3+2\cos(t)-2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

- Determinare una riparametrizzazione di α a velocità unitaria.
  Soluzione. Determiniamo la velocità di α:

  $$\alpha'(t)=\begin{pmatrix} -\sin(t)+2\cos(t) \\ 2\sin(t)-\cos(t) \\ -2\sin(t)-2\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \|\alpha'(t)\|=3\,.$$

  Allora consideriamo la funzione

  $$\lambda(t)=\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(s)\|ds=3t-3t_0\,,$$

  la cui inversa è dunque $\theta(s)=\frac{s}{3}+t_0$. La scelta di t_0 è libera, poniamo $t_0=0$ per comodità. Allora la riparametrizzazione cercata è:

  $$\beta(s)=\alpha(\theta(s))=\begin{pmatrix} 1+\cos\left(\frac{s}{3}\right)+2\sin\left(\frac{s}{3}\right) \\ 2-2\cos\left(\frac{s}{3}\right)-\sin\left(\frac{s}{3}\right) \\ 3+2\cos\left(\frac{s}{3}\right)-2\sin\left(\frac{s}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

- Dimostrare che l'immagine di α è una circonferenza e determinarne il raggio.
  Prima soluzione. Definiamo la curva

  $$\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \qquad \gamma(t)=\begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

  e osserviamo che la curva α si ottiene come

  $$\alpha(t)=\Phi(\gamma(t))=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+A\cdot\gamma(t)\,, \qquad \text{dove } A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Dal momento che $A\in\mathsf{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale, Φ è un'isometria e dunque l'immagine di α è una circonferenza di raggio 3 (poiché l'immagine di γ lo è).
  Seconda soluzione. Determiniamo l'apparato di Frenet sfruttando la parametrizzazione a velocità unitaria β.

  $$T_\beta(s)=\beta'(s)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{3}\right)+2\cos\left(\frac{s}{3}\right) \\ 2\sin\left(\frac{s}{3}\right)-\cos\left(\frac{s}{3}\right) \\ -2\sin\left(\frac{s}{3}\right)-2\cos\left(\frac{s}{3}\right) \end{pmatrix} \qquad \text{e dunque} \qquad N_\beta(s)=\frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{3}\right)-2\sin\left(\frac{s}{3}\right) \\ 2\cos\left(\frac{s}{3}\right)+\sin\left(\frac{s}{3}\right) \\ -2\cos\left(\frac{s}{3}\right)+2\sin\left(\frac{s}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

  Ne deduciamo immediatamente che la curvatura è $\kappa_\beta(s)=\|\beta''(s)\|=\frac{1}{3}$. Inoltre:

  $$B_\beta(s)=T_\beta(t)\wedge N_\beta(t)=\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{da cui } B'_\beta(s)=0 \text{ e dunque } \tau_\beta(s)\equiv 0\,.$$

  Allora $\alpha(\mathbb{R})=\beta(\mathbb{R})$ è contenuta in una circonferenza per l'Esercizio 4.13, avendo curvatura costante e torsione nulla. Concludiamo osservando che la curva regolare α è anche periodica (infatti $\alpha(t)=\alpha(t+2k\pi)$, per ogni $k\in\mathbb{Z}$); dunque l'immagine $\alpha(\mathbb{R})$ è l'intera circonferenza di raggio $r=\frac{1}{\kappa_\beta}=3$.

Attenzione. Nella conclusione dell'Esercizio 4.15 non è sufficiente dire che $\alpha'(t)\neq 0$ per ogni $t\in\mathbb{R}$ per concludere che l'immagine $\alpha(\mathbb{R})$ sia l'intera circonferenza. Come controesempio si pensi alla curva

$$\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \qquad \text{definita da} \qquad \alpha(t)=\begin{pmatrix} \cos(\arctan(t)) \\ \sin(\arctan(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

che soddisfa la condizione $\alpha'(t)\neq 0$ per ogni $t\in\mathbb{R}$, ma la sua immagine $\alpha(\mathbb{R})$ è solo un arco di circonferenza.

4.4. **Sottovarietà immerse in $\mathbb{R}^N$.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto e sia $F\colon A \to \mathbb{R}^N$ una funzione differenziabile. Per ogni $p \in A$ definiamo il *differenziale* di F in p come

$$dF_p\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N \qquad dF_p(v) = J(F)_p v\,,$$

dove $J(F)_p$ è la *matrice Jacobiana* di F nel punto p, ovvero $(J(F)_p)_{ij} = \big(\partial_j F_i(p)\big)$. Sostanzialmente la matrice Jacobiana ha come righe i gradienti delle N-componenti della funzione F. Pertanto $J(F)_p \in \mathsf{Mat}_{N\times m}(\mathbb{R})$.

Osservazione 4.16. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto e sia $F\colon A \to \mathbb{R}^N$ una funzione differenziabile. Fissiamo $p \in A$ e consideriamo una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^N$ tale che esiste $t_0 \in I$ che soddisfa

$$\alpha(t_0) = p \qquad \text{e} \qquad \alpha'(t_0) = w\,.$$

Allora $(F\circ\alpha)'(t_0) = J(F)_{\alpha(t_0)} \cdot \alpha'(t_0) = dF_p(w)$.

L'Osservazione 4.16 ci sarà utile nel seguito per calcolare alcuni differenziali.

Definition 4.17. Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *sottovarietà di dimensione m immersa in* $\mathbb{R}^N$ se per ogni punto $p \in X$ esistono

- un intorno aperto $V_p \subseteq \mathbb{R}^N$ di p in $\mathbb{R}^N$,
- un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
- una funzione $\psi\colon U \to V \cap X$

tali che:

1. ψ è un omeomorfismo,
2. la composizione $U \xrightarrow{\psi} V \cap X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ è differenziabile di classe C^∞,
3. il differenziale $d\psi$ ha rango massimo in ogni punto di U.

L'applicazione $\psi\colon U \to V_p \cap X$ si dice *parametrizzazione regolare* in un intorno del punto $p \in X$.

Definition 4.18. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^N$ una sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^N$. Dato $p \in X$, definiamo lo *spazio tangente* in p ad X come il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$ definito da

$$T_pX = \{w \in \mathbb{R}^N \,|\, \text{esiste una curva differenziabile } \alpha\colon I \to X \text{ tale che } \alpha(t_0) = p \text{ e } \alpha'(t_0) = w \text{ per qualche } t_0 \in I\}\,.$$

Osservazione 4.19. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^N$ una sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^N$. Fissiamo $p \in X$ con una parametrizzazione regolare $\psi\colon U \subseteq \mathbb{R}^m \to X \cap V_p$; dunque $p = \psi(p_1,\dots,p_m)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} d\psi_{p_1,\dots,p_m}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\psi\big(p_1 + a_1 t, \dots, p_m + a_m t\big)|_{t=0} = J(\psi)_{p_1,\dots,p_m} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \\ &= a_1 \partial_{u_1}\psi(p_1,\dots,p_m) + \dots + a_m \partial_m \psi(p_1,\dots,p_m) \end{aligned}$$

dove $\partial_{u_i}\psi(p_1,\dots,p_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_i}(p_1,\dots,p_m) \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_N}{\partial u_i}(p_1,\dots,p_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$. Pertanto $\{\partial_{u_i}\psi(p_1,\dots,p_m)\}_{i=1,\dots,m}$ sono una base di T_pX, che dunque risulta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$ di dimensione m.

Proposizione 4.20 (Ipersuperfici immerse)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e sia $F\colon A \to \mathbb{R}$ differenziabile. Supponiamo $0 \in F(A)$ e che $\nabla F_p \neq 0$ per ogni $p \in A$. L'insieme $X = \{x \in A \,|\, F(x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^N$ è una sottovarietà immersa di dimensione $N-1$.*

Proof. Fissato $p \in A$, supponiamo che $\partial_N F(p) \neq 0$ e consideriamo un aperto $V_p \subseteq A$ tale che

$$p \in V_p \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial u_N}(q) \neq 0 \text{ per ogni } q \in V_p\,.$$

Per il Teorema della funzione implicita, l'aperto $V_p \cap X$ è il grafico di una funzione $g\colon U \subseteq \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, dove U è la proiezione di $V_p \cap X$ sulle prime $N-1$ coordinate. Allora $\psi\colon U \to V_p \cap X$ definita da

$$(u_1,\dots,u_{N-1}) \mapsto (u_1,\dots,u_{N-1}, g(u_1,\dots,u_{N-1}))$$

fornisce una parametrizzazione regolare in un intorno di p. □

Osservazione 4.21. Le parametrizzazioni regolari come quella costruita nella dimostrazione della Proposizione 4.20 si dicono *parametrizzazioni di Monge*, si può dimostrare che ogni sottovarietà di dimensione m immersa in $\mathbb{R}^N$ è una varietà differenziabile di dimensione m (dove le m-carte locali si ottengono invertendo le parametrizzazioni di Monge, ovvero proiettando sulle prime m coordinate "libere").

Le parametrizzazioni regolari di una sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^N$ permettono di verificare che un'applicazione fra di esse sia differenziabile. Siano $X_1 \subseteq \mathbb{R}^{N_1}$ e $X_2 \subseteq \mathbb{R}^{N_2}$ sottovarietà immerse di dimensione m_1 e m_2 rispettivamente. Allora una funzione $F \colon X_1 \to X_2$ è differenziabile se e solo se la composizione

$$\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1 \colon U_1 \to U_2$$

è un'applicazione differenziabile fra aperti di $\mathbb{R}^{m_1}$ e $\mathbb{R}^{m_2}$, dove

$$\psi_i \colon U_i \to V_i \cap X_i \qquad i = 1,2$$

sono le parametrizzazioni regolari delle due varietà.

Esercizio 4.22. Sia $F \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile. Allora, data $X \subseteq \mathbb{R}^N$ una sottovarietà immersa si ha che $F|_X \colon X \to \mathbb{R}^k$ è una funzione differenziabile.

5. Lezione 5 - 24/05/2024

5.1. Esercizi.

Esercizio 5.1. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa e sia

$$F \colon S \to \mathbb{R} \qquad \text{definita da} \qquad x \mapsto \|x - u\|^2$$

con $u \in \mathbb{R}^3$ fissato. Allora F è una funzione differenziabile.

Esempio 5.2. Consideriamo le due superfici immerse in $\mathbb{R}^3$

$$S_1 = S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{e} \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

e sia $F \colon S_1 \to S_2$ definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \\ z \end{pmatrix}$$

Allora F è differenziabile.

Esercizio 5.3. Dimostrare l'affermazione dell'Esempio 5.2 sfruttando parametrizzazioni del tipo

$$\psi_1 \colon U_1 \to S_1 \qquad \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

e

$$\psi_2 \colon U_2 \to S_2 \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ t \end{pmatrix}.$$

5.2. Prima forma fondamentale.

In questa sezione ci limiteremo allo studio delle *superfici immerse* in $\mathbb{R}^3$, ovvero sottovarietà di dimensione 2 immerse in $\mathbb{R}^3$ (si veda la Definizione 4.17). Alcuni dei concetti e dei risultati che vedremo si generalizzano facilmente al caso delle varietà immerse in $\mathbb{R}^N$ di dimensione arbitraria.

Notazione. Nel caso di superfici immerse in $\mathbb{R}^3$ denoteremo con u, v le coordinate locali u_1, u_2.

Il risultato seguente giustifica la condizione (3) della Definizione 4.17.

Proposizione 5.4. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa e sia $\psi \colon U \to V \cap S$ una parametrizzazione regolare in un intorno del punto $p \in V \cap S$. Detto $q = \psi^{-1}(p)$ abbiamo $T_pS = \operatorname{Im}(d\psi_q)$. In particolare, T_pS è uno spazio vettoriale di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$.*

Proof. Sia $\alpha\colon I \to S$ una curva con $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v \in T_pS$. Allora definiamo $\beta = \psi^{-1} \circ \alpha\colon I \to U$ e otteniamo $d\psi_q(\beta'(t_0)) = v$, ovvero $T_pS \subseteq \mathrm{Im}(d\psi_q)$.

Viceversa, dato $w = d\psi_q(u)$ consideriamo un intorno aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ di 0 tale che

$$q + t\,u \in U \qquad \text{per ogni } t \in I\,.$$

Definiamo allora la curva

$$\alpha\colon I \to S \qquad \alpha(t) = \psi(q + t\,u)$$

e otteniamo $w = d\psi_q(u) = \alpha'(0)$. Dal momento che $\alpha(0) = \psi(q) = p$ deduciamo la tesi $\mathrm{Im}(d\psi_q) \subseteq T_pS$. □

Esercizio 5.5. Generalizzare la Proposizione 5.4 ad una varietà immersa di $\mathbb{R}^N$ di dimensione m.

La Proposizione 5.4 ci permette di pensare al differenziale dF_p di un'applicazione differenziabile $F\colon S_1 \to S_2$ fra superfici immerse come a un'applicazione lineare fra i rispettivi spazi tangenti.

Definition 5.6 (Differenziale fra spazi tangenti)**.** Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ due superfici immerse. Sia $F\colon S_1 \to S_2$ un'applicazione differenziabile. Il *differenziale* di F in un punto p è l'applicazione

$$dF_p\colon T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2 \qquad\qquad v \to (dF_p)(v) = (F \circ \alpha)'(t_0)$$

dove $\alpha\colon I \to S_1$ è una curva tale che $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$.

Si noti che la Definizione 5.6 è ben posta grazie alla Proposizione 5.4 e all'Osservazione 4.16.

Definition 5.7 (u-curva e v-curva)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa e sia $\psi\colon U \to V \cap S$ una parametrizzazione regolare. Sia $q = (u_0, v_0) \in U$ e denotiamo $p = \psi(q)$. La u*-curva* associata a ψ è la curva

$$\mu_\psi\colon I_u \to S \qquad\qquad t \mapsto \psi(t, v_0)\,,$$

dove I_u è la componente connessa contenente u_0 di $\{t \in \mathbb{R} \,|\, (t, v_0) \in U\}$.

Analogamente la v*-curva* associata a ψ è la curva

$$\nu_\psi\colon I_v \to S \qquad\qquad t \mapsto \psi(u_0, t)\,,$$

dove I_v è la componente connessa contenente v_0 di $\{t \in \mathbb{R} \,|\, (u_0, t) \in U\}$.

Notazione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa e sia $\psi\colon U \to V \cap S$ una parametrizzazione regolare. Sia $q = (u_0, v_0) \in U$ e denotiamo $p = \psi(q)$. Denoteremo con

$$X_u(q) = \partial_u \psi(q) \qquad \text{e} \qquad X_v(q) = \partial_v \psi(q)$$

che sono una base per T_pS grazie all'Osservazione 4.19.

Si noti che $X_u(q) = \mu'_\psi(u_0)$ e $X_v = \nu'_\psi(v_0)$, dove $q = (u_0, v_0)$.

Definition 5.8 (Prima forma fondamentale)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa e sia $p \in S$. La *prima forma fondamentale* è la forma bilineare

$$\mathbf{I}_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto v \cdot w\,,$$

dove $v \cdot w$ denota il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

Con un abuso di notazione ci si riferisce talvolta anche alla forma quadratica associata $I_p\colon T_pS \to \mathbb{R}$

$$I_p(v) = \mathbf{I}_p(v, v) \qquad v \in T_pS$$

con il nome di prima forma fondamentale.

Notazione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa e sia $\psi\colon U \to V \cap S$ una parametrizzazione regolare in un intorno di $p \in V \cap S$. La matrice associata alla prima forma fondamentale $\mathbf{I}_p$ rispetto alla base $X_u(q), X_v(q)$ è

$$\mathbf{I}_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u(q) \cdot X_u(q) & X_u(q) \cdot X_v(q) \\ X_u(q) \cdot X_v(q) & X_v(q) \cdot X_v(q) \end{pmatrix}.$$

Si noti che $E, G > 0$ e $EG - F^2 > 0$ (si pensi alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).

Osservazione 5.9. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa e sia $\psi\colon U \to V \cap S$ una parametrizzazione regolare in un intorno di $p \in V \cap S$. Denotando con $\theta(q)$ l'angolo fra i vettori $X_u(q)$ e $X_v(q)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \|X_u(q) \wedge X_v(q)\|^2 &= \|X_u(q)\|^2\, \|X_v(q)\|^2\, \sin^2(\theta(q)) = \|X_u(q)\|^2\, \|X_v(q)\|^2\, \left(1 - \cos^2(\theta(q))\right) \\ &= \underbrace{\|X_u(q)\|^2}_{E}\, \underbrace{\|X_v(q)\|^2}_{G} - \underbrace{\|X_u(q)\|^2\, \|X_v(q)\|^2\, \cos^2(\theta(q))}_{F^2} = \det(\mathbf{I}_p)\,. \end{aligned}$$

Esempio 5.10 (Prima forma fondamentale della sfera)**.** Consideriamo la superficie immersa $S = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e la sua parametrizzazione regolare

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u)\cos(v) \\ \sin(u)\sin(v) \end{pmatrix} \qquad \text{da cui} \qquad X_u = \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u)\cos(v) \\ \cos(u)\sin(v) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(u)\sin(v) \\ \sin(u)\cos(v) \end{pmatrix}.$$

Deduciamo che la matrice della prima forma fondamentale è data da $E = 1$, $F = 0$ e $G = \sin^2(u)$.

Esercizio 5.11. Adattare la parametrizzazione regolare di S^2 fornita nell'Esempio 5.10 al caso di una sfera di raggio $r > 0$ e determinarne la matrice della prima forma fondamentale.

Definition 5.12 (Isometrie fra superfici immerse)**.** Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superfici immerse. Sia $F: S_1 \to S_2$ una funzione differenziabile.

- F è un'*isometria locale* se per ogni $p \in S_1$ si ha che $dF_p: T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2$ è un'isometria di spazi Euclidei (con prodotti scalari dati dalle rispettive forme fondamentali).
- F è un'*isometria* se è un'isometria locale e un diffeomorfismo.

Proposizione 5.13. *Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superfici immerse. Sia $F: S_1 \to S_2$ un'isometria locale. Allora F preserva la lunghezza delle curve.*

Proof. Sia $\alpha: I \to S_1$ e fissiamo $t_0, t_1 \in I$. Calcoliamo la lunghezza di α fra t_0 e t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mathbf{I}^{S_1}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mathbf{I}^{S_2}_{\alpha(t)}((F\circ\alpha)'(t), (F\circ\alpha)'(t))}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \|(F\circ\alpha)'(t)\| dt\,.$$

□

Esercizio 5.14. Dimostrare il viceversa della Proposizione 5.13, ovvero che data una funzione differenziabile $F: S_1 \to S_2$ fra superfici immerse in $\mathbb{R}^3$ che preserva la lunghezza delle curve, allora F è un'isometria locale.

5.3. **Seconda forma fondamentale.**

Definition 5.15. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa. Un *campo vettoriale* su S è un'applicazione differenziabile $\mu: S \to \mathbb{R}^3$.

- μ si dice *tangente* a S se $\mu(p) \in T_pS$ per ogni $p \in S$.
- μ si dice *normale* a S se $\mu(p) \perp T_pS$ per ogni $p \in S$.

Definition 5.16 (Superficie orientabile)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa. Diremo che S è *orientabile* se esiste un campo vettoriale normale $\nu: S \to \mathbb{R}^3$ tale che $\nu(p) \neq 0$ per ogni $p \in S$.

Segue dalla Definizione 5.16 che una superficie immersa $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile se esiste un campo vettoriale normale $\nu: S \to \mathbb{R}^3$ tale che $\|\nu(p)\| = 1$ per ogni $p \in S$.

Esercizio 5.17. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e sia $F: A \to \mathbb{R}$ differenziabile. Supponiamo $0 \in F(A)$ e che $\nabla F_p \neq 0$ per ogni $p \in A$. L'insieme $S = \{x \in A \mid F(x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie immersa per la Proposizione 4.20. Dimostrare che S è orientabile. **Suggerimento.** Considerare il campo vettoriale

$$\nu: S \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{definito da} \qquad p \mapsto \nabla F_p\,.$$

Esempio 5.18. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa definita da una sola parametrizzazione $\psi: U \to S$. Allora S è orientabile perché ammette il campo vettoriale normale mai nullo

$$\nu: S \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{definito da} \qquad p \mapsto X_u(p) \wedge X_v(p)\,.$$

Esercizio 5.19. Dimostrare che il nastro di Möbius non è orientabile.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con campo vettoriale normale unitario $\nu: S \to \mathbb{R}^3$. È dunque chiaro che possiamo considerare l'*applicazione di Gauss*:

$$S \to S^2 \qquad p \mapsto \nu(p)\,.$$

Osserviamo che per ogni $p \in S$ si ha

$$\nu(p) \perp T_pS \qquad \text{e} \qquad \nu(p) \perp T_{\nu(p)}S^2 \,,$$

dove nel primo caso immaginiamo $\nu(p)$ applicato in p e nel secondo $\nu(p)$ applicato nell'origine. Pertanto $T_pS = T_{\nu(p)}S^2$. Questo permette di introdurre il seguente concetto fondamentale.

Definition 5.20 (Operatore forma)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia $p \in S$. L'*operatore forma* o *operatore di Weingarten* è definito come

$$L_p\colon T_pS \to T_pS \qquad\qquad w \mapsto -d\,\nu_p(w)\,.$$

Attenzione. La definizione di L_p dipende dal verso di $\nu(p)$.

Si noti che, detto $q = \psi^{-1}(p)$, con questa definizione si ha $\partial_u(\nu \circ \psi)(q) = -L_p(X_u(q))$.

Teorema 5.21. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Allora l'operatore forma L_p è autoaggiunto (rispetto alla prima forma fondamentale) per ogni $p \in S$, i.e.*

$$\mathbf{I}_p\left(L_p(w_1), w_2\right) = \mathbf{I}_p\left(w_1, L_p(w_2)\right) \qquad \textit{per ogni} \qquad w_1, w_2 \in T_pS\,.$$

Proof. Fissiamo una parametrizzazione regolare $\psi\colon U \to V \cap S$ in un intorno di $p = \psi(q)$ e consideriamo la base data da $\{X_u(q), X_v(q)\}$. Per linearità è dunque sufficiente dimostrare che

$$\mathbf{I}_p\left(L_p(X_u(q)), X_v(q)\right) = \mathbf{I}_p\left(X_u(q), L_p(X_v(q))\right)\,.$$

A tale scopo osserviamo che

$$\nu(p) \cdot X_u(q) = 0 = \nu(p) \cdot X_u(q) \qquad \text{ovvero} \qquad \nu(\psi(q)) \cdot X_u(q) = 0 = \nu(\psi(q)) \cdot X_u(q)$$

e che tale relazione vale anche in qualsiasi altro punto di U. Pertanto, derivando rispetto a v e u, segue

$$\begin{cases} 0 = \partial_v(\nu \circ \psi)(q) \cdot X_u(q) + \nu(p) \cdot \partial_v X_u(q) = -L_p(X_v(q)) \cdot X_u(q) + \nu(p) \cdot \partial_v X_u(q) \\ 0 = \partial_u(\nu \circ \psi)(q) \cdot X_v(q) + \nu(p) \cdot \partial_u X_v(q) = -L_p(X_u(q)) \cdot X_v(q) + \nu(p) \cdot \partial_u X_v(q) \end{cases} \tag{5.1}$$

e, ricordando che $\partial_u X_v(q) = \partial_v X_u(q)$, si ottiene:

$$\mathbf{I}_p\left(L_p(X_u(q)), X_v(q)\right) = L_p(X_u(q)) \cdot X_v(q) = L_p(X_v(q)) \cdot X_u(q) = \mathbf{I}_p\left(L_p(X_v(q)), X_u(q)\right) = \mathbf{I}_p\left(X_u(q), L_p(X_v(q))\right)\,.$$

□

Definition 5.22 (Seconda forma fondamentale)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia $p \in S$. La *seconda forma fondamentale* è la forma bilineare

$$\mathbf{II}_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto \mathbf{I}_p\left(L_p(v), w\right)\,.$$

Con un abuso di notazione ci si riferisce talvolta anche alla forma quadratica associata $II_p\colon T_pS \to \mathbb{R}$

$$II_p(v) = \mathbf{II}_p(v, v) \qquad v \in T_pS$$

con il nome di seconda forma fondamentale.

Attenzione. Si noti che L_p e $\mathbf{II}_p$ dipendono dal verso di $\nu(p)$.

Notazione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa e sia $\psi\colon U \to V \cap S$ una parametrizzazione regolare in un intorno di $p = \psi(q) \in V \cap S$. La matrice associata alla seconda forma fondamentale $\mathbf{II}_p$ rispetto alla base X_u, X_v è

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(p) \cdot X_{uu}(q) & \nu(p) \cdot X_{uv}(q) \\ \nu(p) \cdot X_{uv}(q) & \nu(p) \cdot X_{vv}(q) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

come si deduce immediatamente dalle Equazioni (5.1).

6. Lezione 6 - 27/05/2024

6.1. Curvatura Gaussiana e Teorema Egregium.

Definition 6.1 (Curvatura normale)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia $\alpha\colon I \to S$ una curva con $\alpha(t_0) = p$. La *curvatura normale* di α in p è

$$\kappa_\alpha^\nu(p) = \alpha''(t_0) \cdot \nu(p) = \kappa_\alpha(t_0)\|\alpha'(t_0)\|^2 N_\alpha(t_0) \cdot \nu(p)\,.$$

La seconda uguaglianza segue dal punto (4) dell'Esercizio 4.8.

Attenzione. Come già osservato per L_p e $\mathbf{II}_p$, anche la definizione precedente dipende dal verso di $\nu(p)$.

Teorema 6.2 (Teorema di Meusnier)**.** *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia $\alpha\colon I \to S$ una curva con $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$. Allora*

$$\mathbf{II}_p(v, v) = \kappa_\alpha^\nu(p)\,.$$

Proof. Dal momento che $\nu(\alpha(t)) \perp T_{\alpha(t)}S$, abbiamo

$$0 = \nu(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \qquad \text{da cui derivando} \qquad 0 = \underbrace{(\nu \circ \alpha)'(t)}_{-L_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} \cdot \alpha'(t) + (\nu \circ \alpha)(t) \cdot \alpha''(t)\,.$$

Pertanto si deduce

$$\mathbf{II}_p(v, v) = L_p(v) \cdot v = \nu(p) \cdot \alpha''(t_0) = \kappa_\alpha^\nu(p)\,.$$

□

Il Teorema di Meusnier afferma che $\mathbf{II}_p(v, v)$ è la curvatura di una sezione normale di S in p, cioè una curva ottenuta intersecando S con un piano affine in $\mathbb{R}^3$, parallelo a v, contenente p e ortogonale a T_pS.

Definition 6.3. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Dato $p \in S$, gli autovettori unitari di L_p si dicono *direzioni principali*, gli autovalori di L_p si dicono *curvature principali*.

Definition 6.4 (Curvatura Gaussiana)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Dato $p \in S$, la *curvatura Gaussiana* $\kappa(p)$ è il determinante di L_p, ovvero il prodotto delle due curvature principali. La *curvatura media* è definita come $H(p) = {}^{\mathrm{Tr}(L_p)}/_2$.

Attenzione. Si noti che la curvatura Gaussiana $\kappa(p)$ non dipende dal verso di $\nu(p)$.

Definition 6.5. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Un punto $p \in S$ si dice

- *ellittico* se $\kappa(p) > 0$,
- *iperbolico* se $\kappa(p) < 0$,
- *parabolico* se $\kappa(p) = 0$ e $L_p \neq 0$,
- *polare* se $L_p = 0$,
- *ombelicale* se L_p è un'omotetia, ovvero le due curvature principali sono uguali.

Definition 6.6 (Superficie minima)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Diremo che S è una *superficie minima* se $H(p) = 0$ per ogni $p \in S$.

Teorema 6.7 (Teorema di Rodriguez)**.** *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Gli autovalori $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$ di L_p sono la curvatura normale massima e minima.*

Proof. Si veda [1, Teorema 35.4]. □

Teorema 6.8 (Teorema Egregium - Gauss, 1828)**.** *La curvatura Gaussiana dipende solamente dalla prima forma fondamentale. In particolare, la curvatura Gaussiana è invariante per isometrie locali.*

Proof. Si veda [1, Teorema 37.4]. □

6.2. **Esercizi e (alcune) soluzioni.**

Esercizio 6.9 (Curvatura Gaussiana e curvatura media)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie immersa orientabile, con un campo vettoriale normale unitario $\nu\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Dato $p \in S$, dimostrare che:

$$\kappa(p) = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} \qquad\qquad H(p) = \frac{E\mathcal{N} + G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M}}{2(EG - F^2)}\,.$$

Soluzione. Sia $\psi\colon U \to V \cap S$ una parametrizzazione regolare in un intorno di $p = \psi(q)$. Sia A la matrice che rappresenta L_p rispetto alla base $\{X_u(q), X_v(q)\}$. Allora dalla Definizione 5.22 segue che per ogni $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{II}_p(w_1, w_2) = \mathbf{I}_p\big(L_p(w_1), w_2\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad w_1^t \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} w_2 = (Aw_1)^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} w_2\,,$$

dove w_1^t e $(Aw_1)^t$ indicano i trasposti dei vettori w_1 e Aw_1 rispettivamente. Allora

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

da cui segue immediatamente

$$\kappa(p) = \det(A) = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}\,.$$

Moltiplicando l'Equazione (6.1) a destra per l'inversa della prima forma fondamentale (e trasponendo) otteniamo

$$A = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

Calcolando la traccia del secondo membro si ottiene la formula desiderata per la curvatura media.

Esercizio 6.10 (Curvatura Gaussiana della sfera di raggio r)**.** Si consideri la superficie immersa $S \subseteq \mathbb{R}^3$ data dalla sfera di raggio $r > 0$ centrata nell'origine. Si determini la curvatura Gaussiana di S.
Soluzione. Consideriamo la sua parametrizzazione regolare

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos(u) \\ r\sin(u)\cos(v) \\ r\sin(u)\sin(v) \end{pmatrix} \qquad \text{da cui} \qquad X_u = \begin{pmatrix} -r\sin(u) \\ r\cos(u)\cos(v) \\ r\cos(u)\sin(v) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(u)\sin(v) \\ r\sin(u)\cos(v) \end{pmatrix}.$$

Deduciamo che la matrice della prima forma fondamentale è data da $E = r^2$, $F = 0$ e $G = r^2\sin^2(u)$. Osserviamo che l'applicazione di Gauss in questo caso è

$$S \to S^2 \qquad p \mapsto \frac{p}{\|p\|} = \frac{1}{r}p\,,$$

da cui

$$L_p \colon T_pS \to T_pS \qquad w \mapsto -\frac{1}{r}w\,.$$

Allora $\mathbf{II}_p = -\frac{1}{r}\mathbf{I}_p$. Pertanto, scegliendo una base ortonormale per T_pS, avremo che la matrice di $\mathbf{I}_p$ è l'identità e dunque la matrice di L_p coincide con quella di $\mathbf{II}_p$: $-\frac{1}{r}\mathrm{Id}$. Ne segue che $\kappa(p) = \frac{1}{r^2}$ per ogni $p \in S$ e dunque tutti i punti della sfera sono ellittici.

Esercizio 6.11 (Curvatura Gaussiana del toro)**.** Fissiamo $0 < r < a$ e consideriamo la parametrizzazione regolare

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} (a + r\cos(u))\cos(v) \\ (a + r\cos(u))\sin(v) \\ r\sin(u) \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad X_u = \begin{pmatrix} -r\sin(u)\cos(v) \\ -r\sin(u)\sin(v) \\ r\cos(u) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X_v = \begin{pmatrix} -(a + r\cos(u))\sin(v) \\ (a + r\cos(u))\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proseguendo con i calcoli si ottiene

$$\kappa(p) = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = \frac{\cos(u_0)}{r(a + r\cos(u_0))}\,.$$

Ne deduciamo che il toro contiene punti ellittici (per $u_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$), punti iperbolici (per $u_0 \in (\pi/2, 3\pi/2)$) e punti parabolici (per $u_0 \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$).

Esercizio 6.12 (Apparato di Frenet per curve piane regolari)**.** Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare e sia $\beta \colon J \to \mathbb{R}^2$ una riparametrizzazione (concorde) di velocità unitaria. Sia $\theta \colon I \to J$ un diffeomorfismo tale che $\alpha(t) = \beta(\theta(t))$ per ogni $t \in I$. Definiamo allora l'*apparato di Frenet* della curva α come:

$$T_\alpha(t) = T_\beta(\theta(t)), \quad N_\alpha(t) = N_\beta(\theta(t)), \quad \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(\theta(t))\,.$$

Dimostrare che

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \qquad \text{e} \qquad \kappa_\alpha(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3}\det\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha''(t) \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha''(t) \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ denota la matrice le cui righe sono i vettori $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$.
Soluzione. Consideriamo la curva $\gamma \colon I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^3$ dove ι è l'inclusione naturale $\iota(x,y) = (x,y,0)$. Dall'Esercizio 4.8 segue allora che

$$T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \qquad \text{e} \qquad \kappa_\gamma(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}\,.$$

Ricordando che l'ultima coordinata di $\beta'(t)$ è identicamente nulla otteniamo immediatamente

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}\,.$$

Inoltre il prodotto vettoriale $\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)$ ha un'unica componente non nulla (la terza), che pertanto coincide con la sua norma. Abbiamo allora:

$$\kappa_\alpha(t)=\kappa_\gamma(t)=\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3}\det\begin{pmatrix}\alpha'(t)\\ \alpha''(t)\end{pmatrix}.$$

Definition 6.13 (Evoluta di una curva)**.** Sia $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^2$ una curva piana regolare tale che $\kappa_\alpha(t)\neq 0$ per ogni $t\in I$. L'*evoluta* di α è la curva piana $C_\alpha\colon I\to\mathbb{R}^2$ data in ogni punto t dal centro della circonferenza osculatrice in $\alpha(t)$, ovvero:

$$C_\alpha(t)=\alpha(t)+\frac{1}{\kappa_\alpha(t)}N_\alpha(t).$$

Esercizio 6.14 (Spirale logaritmica)**.** Si consideri la *spirale logaritmica*, ovvero la curva piana

$$\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\qquad\text{definita da}\qquad\alpha(t)=\begin{pmatrix}e^{bt}\cos(t)\\ e^{bt}\sin(t)\end{pmatrix}\qquad\text{con } b>0.$$

- Si determini la curvatura di α in ogni suo punto.
  Soluzione. Derivando otteniamo
  $$\alpha'(t)=\begin{pmatrix}b\,e^{bt}\cos(t)-e^{bt}\sin(t)\\ b\,e^{bt}\sin(t)+e^{bt}\cos(t)\end{pmatrix}\qquad\text{e}\qquad\alpha''(t)=\begin{pmatrix}(b^2-1)e^{bt}\cos(t)-2b\,e^{bt}\sin(t)\\ (b^2-1)e^{bt}\sin(t)+2b\,e^{bt}\cos(t)\end{pmatrix}.$$
  Sfruttando l'Esercizio 6.12 si ottiene
  $$\det\begin{pmatrix}\alpha'(t)\\ \alpha''(t)\end{pmatrix}=e^{2bt}\left[(b^2+1)\cos^2(t)+(b^2+1)\sin^2(t)\right]=(b^2+1)e^{2bt},$$
  da cui $\kappa_\alpha(t)=\frac{(b^2+1)e^{2bt}}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{(b^2+1)e^{2bt}}{\left(e^{bt}\sqrt{b^2+1}\right)^3}=\frac{1}{e^{bt}\sqrt{b^2+1}}$.
- Si determino i limiti $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\kappa_\alpha(t)$.
  Soluzione. Data l'espressione esplicita ottenuta al punto precedente è immediato verificare che
  $$\lim_{t\to-\infty}\kappa_\alpha(t)=+\infty\qquad\text{e}\qquad\lim_{t\to+\infty}\kappa_\alpha(t)=0.$$
- Si determini una parametrizzazione dell'evoluta di α.
  Soluzione. Per calcolare l'evoluta di α determiniamo $N_\alpha(t)$, scegliendo il vettore ortonormale ad $\alpha'(t)$ in modo da ottenere una base positivamente orientata $T_\alpha(t), N_\alpha(t)$. Abbiamo
  $$T_{\alpha(t)}=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\begin{pmatrix}b\cos(t)-\sin(t)\\ b\sin(t)+\cos(t)\end{pmatrix}\qquad\text{e dunque}\qquad N_{\alpha(t)}=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\begin{pmatrix}-b\sin(t)-\cos(t)\\ b\cos(t)-\sin(t)\end{pmatrix}.$$
  Pertanto l'evoluta di α ha parametrizzazione $C_\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ data da
  $$C_\alpha(t)=\alpha(t)+\frac{1}{\kappa_\alpha(t)}N_\alpha(t)=e^{bt}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}+e^{bt}\begin{pmatrix}-b\sin(t)-\cos(t)\\ b\cos(t)-\sin(t)\end{pmatrix}=b\,e^{bt}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.15 (Catenaria)**.** Calcolare la curvatura di una *catenaria*, ovvero la curva piana di parametrizzazione

$$\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\qquad\text{definita da}\qquad\alpha(t)=\begin{pmatrix}t\\ a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\end{pmatrix}\qquad\text{con } a>0.$$

Esercizio 6.16 (Cilindro)**.** Sia $r>0$, si consideri la parametrizzazione del cilindro di raggio r

$$\psi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\qquad\psi\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(u)\\ r\sin(u)\\ v\end{pmatrix}.$$

- Determinare la prima forma fondamentale in ogni punto.
  Soluzione. Derivando le u-curve e le v-curve si ottiene
  $$X_u(u,v)=\begin{pmatrix}-r\sin(u)\\ r\cos(u)\\ 0\end{pmatrix}\qquad\text{e}\qquad X_v(u,v)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$
  Ne deduciamo immediatamente che $E=r^2$, $F=0$, $G=1$.

- Determinare la seconda forma fondamentale in ogni punto.
Soluzione. Abbiamo
$$X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)=\begin{pmatrix} r\cos(u)\\ r\sin(u)\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{da cui} \qquad \|X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)\|=r\,.$$
Quindi un campo vettoriale normale unitario sul cilindro è dato da
$$\nu(u,v)=\frac{X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)}{\|X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)\|}=\begin{pmatrix}\cos(u)\\ \sin(u)\\ 0\end{pmatrix}.$$
Inoltre
$$\partial_u X_u(u,v)=\begin{pmatrix}-r\cos(u)\\ -r\sin(u)\\ 0\end{pmatrix} \qquad \partial_v X_v(u,v)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \partial_u X_v(u,v)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
e dunque dall'Equazione (5.2) deduciamo
$$\mathcal{L}=-r, \qquad \mathcal{M}=0\,, \qquad \mathcal{N}=0\,.$$
- Determinare le curvature principali e la curvatura Gaussiana in ogni punto.
Soluzione. Denotiamo con A la matrice dell'operatore forma L; l'Equazione (6.1) diventa
$$\begin{pmatrix}-r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}r^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{da cui} \qquad A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{r} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$
Deduciamo che le curvature principali sono $-1/r$ e 0, pertanto $\kappa(u,v)\equiv 0$. Osserviamo che l'operatore forma L_p dipende dal verso di $\nu(p)$ e dunque il segno delle due curvature principali dipende da tale verso. Pertanto il risultato trovato è coerente con la curvatura di una circonferenza (che ha curvatura $1/r$) e di una retta (che ha curvatura nulla). Osserviamo infine che il cilindro è costituito da tutti punti parabolici (si veda la Definizione 6.5).

Esercizio 6.17 (Superfici di rotazione)**.** Sia $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una sottovarietà immersa di dimensione 1, con
$$\alpha(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\\ 0\end{pmatrix}$$
e $\alpha_2(t)>0$ per ogni $t\in I$. Consideriamo la superficie immersa $S\subseteq\mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando l'immagine della curva α attorno all'asse e_1, con parametrizzazione regolare
$$\psi\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \qquad \psi(u,v)=\begin{pmatrix}\alpha_1(u)\\ \alpha_2(u)\cos(v)\\ \alpha_2(u)\sin(v)\end{pmatrix}.$$

- Determinare la prima forma fondamentale di S in funzione di α.
Soluzione. Derivando le u-curve e v-curve si ottiene
$$X_u(u,v)=\begin{pmatrix}\alpha_1'(u)\\ \alpha_2'(u)\cos(v)\\ \alpha_2'(u)\sin(v)\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_v(u,v)=\begin{pmatrix}0\\ -\alpha_2(u)\sin(v)\\ \alpha_2(u)\cos(v)\end{pmatrix}.$$
Pertanto $E=\|\alpha'(u)\|^2$, $F=0$, $G=\alpha_2(u)^2$.
- Determinare la seconda forma fondamentale di S in funzione di α.
Soluzione. Abbiamo:
$$X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)=\begin{pmatrix}\alpha_2(u)\alpha_2'(u)\\ -\alpha_1'(u)\alpha_2(u)\cos(v)\\ -\alpha_1'(u)\alpha_2(u)\sin(v)\end{pmatrix} \qquad \text{da cui} \qquad \|X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)\|=\alpha_2(u)\|\alpha'(u)\|\,.$$
Quindi un campo vettoriale normale unitario su S è dato da
$$\nu(u,v)=\frac{X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)}{\|X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)\|}=\frac{1}{\|\alpha'(u)\|}\begin{pmatrix}\alpha_2'(u)\\ -\alpha_1'(u)\cos(v)\\ -\alpha_1'(u)\sin(v)\end{pmatrix}.$$

Inoltre

$$\partial_u X_u(u,v)=\begin{pmatrix}\alpha_1''(u)\\ \alpha_2''(u)\cos(v)\\ \alpha_2''(u)\sin(v)\end{pmatrix}\qquad \partial_v X_v(u,v)=\begin{pmatrix}0\\ -\alpha_2(u)\cos(v)\\ -\alpha_2(u)\sin(v)\end{pmatrix}\qquad \partial_u X_v(u,v)=\begin{pmatrix}0\\ -\alpha_2'(u)\sin(v)\\ \alpha_2'(u)\cos(v)\end{pmatrix}$$

e dunque dall'Equazione (5.2) deduciamo

$$\mathcal{L}=\frac{\alpha_1''(u)\alpha_2'(u)-\alpha_1'(u)\alpha_2''(u)}{\|\alpha'(u)\|}\,,\qquad \mathcal{M}=0\,,\qquad \mathcal{N}=\frac{\alpha_1'(u)\alpha_2(u)}{\|\alpha'(u)\|}\,.$$

- Determinare la curvatura Gaussiana di S in funzione di α.
  Soluzione. Sfruttando l'Esercizio 6.9 otteniamo:
  $$\kappa(u,v)=\frac{\alpha_1'(u)\big(\alpha_1''(u)\alpha_2'(u)-\alpha_1'(u)\alpha_2''(u)\big)}{\alpha_2(u)\|\alpha'(u)\|^4}\,.$$
  Si noti che $\kappa(u,v)$ è indipendente dal parametro v.

Esercizio 6.18 (Pseudosfera)**.** Consideriamo la sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 definita dalla parametrizzazione regolare

$$\alpha\colon\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}^3\qquad\text{definita da}\qquad \alpha(t)=\begin{pmatrix}\int_0^t\sqrt{1-e^{-2s}}\,ds\\ e^{-t}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Si consideri la superficie di rotazione associata S definita dall'Esercizio 6.17. Tale superficie S si chiama *pseudosfera*.

- Dimostrare che α è una curva a velocità unitaria.
  Soluzione.
  $$\alpha'(t)=\begin{pmatrix}\sqrt{1-e^{-2t}}\\ -e^{-t}\\ 0\end{pmatrix}\qquad\text{quindi}\qquad \|\alpha'(t)\|=1-e^{-2t}+e^{-2t}=1\,.$$
- Dimostrare che la curvatura Gaussiana di S è $\kappa=-1$.
  Soluzione. Per l'Esercizio 6.17 si ha
  $$\kappa(u,v)=\frac{\alpha_1'(u)\big(\alpha_1''(u)\alpha_2'(u)-\alpha_1'(u)\alpha_2''(u)\big)}{\alpha_2(u)\|\alpha'(u)\|^2}=\frac{\sqrt{1-e^{-2t}}\left(-e^{-t}\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}-e^{-t}\sqrt{1-e^{-2t}}\right)}{e^{-t}}=-1\,.$$

Esercizio 6.19 (Catenoide)**.** Si consideri la catenaria definita nell'Esercizio 6.15 e se ne costruisca la corrispondente superficie di rotazione S definita nell'Esercizio 6.17. Tale superficie prende il nome di *catenoide*.

- Dimostrare che S è una superficie minima (si veda la Definizione 6.6).
  Soluzione. Abbiamo definito la catenaria come la curva piana di parametrizzazione
  $$\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\qquad\text{definita da}\qquad\alpha(t)=\begin{pmatrix}t\\ a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\end{pmatrix}\qquad\text{con } a>0\,.$$
  Pertanto, seguendo l'Esercizio 6.17, la catenoide è parametrizzata da
  $$\psi\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\qquad \psi(u,v)=\begin{pmatrix}u\\ a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\cos(v)\\ a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\sin(v)\end{pmatrix}.$$
  La prima e la seconda forma fondamentale sono date da
  $$E(u,v)=1+\sinh^2\left(\frac{u}{a}\right)=\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\qquad F\equiv 0\qquad G(u,v)=a^2\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)$$
  e
  $$\mathcal{L}=-\frac{\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{a\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{u}{a}\right)}}=-\frac{1}{a}\qquad\mathcal{M}\equiv 0\qquad\mathcal{N}=a\cosh\left(\frac{u}{a}\right).$$
  Dall'Esercizio 6.9 deduciamo allora
  $$H(u,v)=\frac{E\mathcal{N}+G\mathcal{L}-2F\mathcal{M}}{2(EG-F^2)}=\frac{a\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)-a\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)}{2a^2\cosh^3\left(\frac{u}{a}\right)}=0\,.$$

- Si determini la curvatura Gaussiana del catenoide.
Soluzione. Dai calcoli appena svolti, ricordando la formula per la curvatura determinata nell'Esercizio 6.9, otteniamo
$$\kappa(u,v) = -\frac{\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{a^2\cosh^3\left(\frac{u}{a}\right)} = -\frac{1}{a^2\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)}\,.$$

Esercizio 6.20 (Esonero 31/05/2024)**.** Siano $a,b>0$ due numeri reali positivi. Si consideri la superficie immersa $S\subseteq\mathbb{R}^3$ definita dalla parametrizzazione
$$\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \qquad \psi(u,v) = \begin{pmatrix} a(u+v) \\ b(u-v) \\ 4uv \end{pmatrix}.$$

- Determinare la prima forma fondamentale.
Soluzione. Determiniamo dapprima la base del tangente
$$X_u(u,v) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 4v \end{pmatrix} \qquad X_v(u,v) = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 4u \end{pmatrix},$$
da cui segue immediatamente che:
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2+16v^2 & a^2-b^2+16uv \\ a^2-b^2+16uv & a^2+b^2+16u^2 \end{pmatrix}.$$
- Determinare la seconda forma fondamentale.
Soluzione. Calcoliamo le derivate parziali
$$\partial_u X_u(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \partial_u X_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \partial_v X_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Inoltre un campo vettoriale normale unitario su S è
$$\nu(\psi(u,v)) = \frac{X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)}{\|X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)\|} = \frac{1}{2\sqrt{4b^2(u+v)^2+4a^2(u-v)^2+a^2b^2}}\begin{pmatrix} 4b(u+v) \\ -4a(u-v) \\ -2ab \end{pmatrix}.$$
Ricaviamo ora la seconda forma fondamentale dalle Equazioni (5.2):
$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{4b^2(u+v)^2+4a^2(u-v)^2+a^2b^2}}\begin{pmatrix} 0 & -8ab \\ -8ab & 0 \end{pmatrix}.$$
- Determinare curvatura Gaussiana e curvatura media in ogni punto.
Soluzione. Si noti che, in accordo con l'Osservazione 5.9, abbiamo:
$$\begin{aligned}\det(\mathbf{I}) &= (a^2+b^2+16v^2)(a^2+b^2+16u^2)-(a^2-b^2+16uv)^2 \\ &= \underline{(a^2+b^2)^2}+\cancel{256u^2v^2}+16(a^2+b^2)(u^2+v^2)-\cancel{256u^2v^2}-\underline{(a^2-b^2)^2}-32(a^2-b^2)uv \\ &= \underline{4a^2b^2}+16a^2(u^2+v^2-2uv)+16b^2(u^2+v^2+2uv) \\ &= 4\left(a^2b^2+4a^2(u-v)^2+4b^2(u+v)^2\right) = \|X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)\|^2\,.\end{aligned}$$
Dall'Esercizio 6.9 segue immediatamente l'espressione della curvatura Gaussiana:
$$\kappa\left(\psi(u,v)\right) = \frac{\det(\mathbf{II})}{\det(\mathbf{I})} = \frac{-64a^2b^2}{\|X_u(u,v)\wedge X_v(u,v)\|^4} = \frac{-4a^2b^2}{(4b^2(u+v)^2+4a^2(u-v)^2+a^2b^2)^2} < 0\,.$$
In particolare tutti i punti di S sono iperbolici (si veda la Definizione 6.5); in effetti S si chiama *paraboloide iperbolico*. Grazie all'Esercizio 6.9 deduciamo inoltre la curvatura media:
$$H = \frac{-F\mathcal{M}}{\det(\mathbf{I})} = \frac{ab(a^2-b^2+16uv)}{(4b^2(u+v)^2+4a^2(u-v)^2+a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

- Dimostrare che la superficie S può essere descritta come unione di rette affini in $\mathbb{R}^3$, a due a due sghembe fra loro.
  Soluzione. Riscrivendo la parametrizzazione regolare come
  $$\psi(u,v)=\begin{pmatrix} a(u+v)\\ b(u-v)\\ 4uv \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} au\\ bu\\ 0 \end{pmatrix}+v\begin{pmatrix} a\\ -b\\ 4u \end{pmatrix}$$
  deduciamo che $S\subseteq\mathbb{R}^3$ si ottiene come unione della famiglia di rette $\{r_u\}_{u\in\mathbb{R}}$. Per dimostrare che tali rette sono sghembe consideriamo $u_1\neq u_2$ e osserviamo che i vettori direttori
  $$\begin{pmatrix} a\\ -b\\ 4u_1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} a\\ -b\\ 4u_2 \end{pmatrix}$$
  non sono proporzionali, dunque le rette r_{u_1} e r_{u_2} non sono parallele (né coincidenti). Inoltre tali rette non sono coincidenti poiché il sistema di tre equazioni nelle incognite v_1, v_2
  $$\begin{cases} au_1+v_1a=au_2+v_2a\\ bu_1-v_1b=bu_2-v_2b\\ 4u_1v_1=4u_2v_2 \end{cases}$$
  non ammette soluzioni (infatti dalle prime due equazioni seguirebbe $u_1=u_2$ che è escluso per ipotesi). Pertanto $\{r_u\}_{u\in\mathbb{R}}$ è una famiglia di rette a due a due sghembe fra loro.

Esercizio 6.21 (Paraboloide iperbolico)**.** Dimostrare che la superficie S dell'Esercizio 6.20 può essere descritta come il luogo geometrico:
$$S=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right\}.$$

References

1. Edoardo Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri editore s.r.l., 1994.

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PIAZZALE ALDO MORO 5, 00185 ROMA, ITALIA
Email address: `francesco.meazzini@uniroma1.it`