1 Esercizi di Geometria II, 14 aprile 2014

1.1 Topologia generale

Esercizio 1. Siano $K \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio compatto non vuoto ed $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto che contiene K. Dimostrare che $U \cap (\mathbb{R}^n - K) \neq \emptyset$.

Esercizio 2. Sia $X \subset M_{3,3}(\mathbb{R})$ il sottospazio topologico formato dalle matrici A tali che $A^3 = I$. Dimostrare che: X è chiuso in $M_{3,3}(\mathbb{R})$, l'insieme formato dalla matrice identità è aperto in X, X non è connesso, l'insieme delle matrici coniugate ad una rotazione di 120 gradi attorno ad una retta non è limitato, X non è compatto.

Esercizio 3. Una formica torre si muove nel piano solamente lungo le rette di equazione $x = a$ e $y = b$. Siano p, q due punti di un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$. Dimostrare che una formica torre può muoversi da p in q senza uscire da A.

Esercizio 4. Sia X spazio di Hausdorff connesso. Mostrare che se X contiene almeno due punti, allora la diagonale è un chiuso raro nel prodotto $X \times X$.

Esercizio 5. Abbiamo dimostrato che l'applicazione $\sigma\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ data dalle funzioni simmetriche elementari è una identificazione aperta e chiusa. Per definizione vale $\sigma(z_1, \ldots, z_n) = a = (a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $-z_1, \ldots, -z_n$ sono le radici, contate con molteplicità del polinomio $p_a(t) := t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$. Dimostrare:

1. la restrizione $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è chiusa ma, per $n > 1$ non è né aperta né surgettiva.
2. Provare che l'insieme $R_k = \{a \in \mathbb{R}^n \mid p_a(t) \text{ possiede almeno } k \text{ radici reali}\}$ è chiuso.
3. Provare che gli insiemi $R_k^+ = \{a \in \mathbb{R}^n \mid p_a(t) \text{ possiede almeno } k \text{ radici reali} \geq 0\}$, $R_k^- = \{a \in \mathbb{R}^n \mid p_a(t) \text{ possiede almeno } k \text{ radici reali} \leq 0\}$ sono chiusi.
4. Sia $U = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_i \neq 0 \quad \forall i\} = (\mathbb{R} - \{0\})^n$. Dimostrare che $\sigma(U)$ contiene esattamente $n + 1$ componenti connesse. Ogni componente connessa è anche connessa per archi e corrisponde ai polinomi con un numero fissato di radici positive.

Esercizio 6. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione limitata (ossia $\sup \|f(x)\| < +\infty$). Dimostrare che f è continua se e solo se il grafico $\gamma = \{(x, f(x))\}$ è chiuso nel prodotto. Trovare un esempio di applicazione illimitata e non continua il cui grafico è chiuso. (Nota: i più audaci possono rendere l'esercizio più difficile sostituendo la limitatezza di f con la locale limitatezza).

1.2 Omotopia e Categorie

Esercizio 7. Dimostrare che ogni retrazione è una identificazione.

Esercizio 8. Provare che $\mathbb{R}^2 - (-1, 1)^2$ è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Esercizio 9. Provare che per ogni $r > 0$ gli spazi $Y = \mathbb{R}^n - \overline{B(0, r)}$ e $X = \mathbb{R}^n - B(0, r)$ hanno lo stesso tipo di omotopia e che Y non è un retratto di X.

Esercizio 10. Provare che lo spazio $X = \mathbb{C} - Z$ è contrattile, dove:

$$Z = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \geq 0,\ Im(z) = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) = 0,\ -1 < Im(z) < 1\}.$$

Esercizio 11. Dato un diagramma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ in una categoria (A, B, C, D oggetti, f, g, h morfismi), provare che se gf e hg sono isomorfismi, allora anche f, g, h sono isomorfismi.

Esercizio 12. Un morfismo $f\colon A \to B$ in una categoria si dice un **epimorfismo** se per ogni coppia di morfismi distinti $h, k\colon B \to C$ si ha $hf \neq kf$. Descrivere gli epimorfismi nelle categorie degli insiemi, degli spazi vettoriali e degli spazi topologici compatti di Hausdorff.

Esercizio 13. Calcolare il gruppo fondamentale di $X = S^2 \cup \{(0, t\cos(t), t\sin(t)) \mid t \geq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizio 14. Usando il fatto che $\pi_1(S^1) \neq 0$, dimostrare che l'insieme $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ dei punti con almeno una coordinata intera non è semplicemente connesso.