1 Esercizi di Geometria II, 16 maggio 2014

In tutti gli esercizi indicheremo con $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ il rivestimento $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Esercizio 1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e non semplicemente connesso. Dimostrare che esiste un aperto limitato $B \subset A$ che connesso e non è semplicemente connesso.

Esercizio 2. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un compatto non vuoto. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 - K$ contiene almeno una componente connessa il cui gruppo fondamentale è infinito.

Esercizio 3. Sia $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua tale che $f(x) - f(-x) \in \mathbb{Z}$ per ogni $x \in S^2$. Dimostrare che $f(x) = f(-x)$ per ogni x. Dedurre che ogni applicazione continua $h\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to S^1$ si solleva ad un'applicazione continua $k\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tale che $pk = h$.

Esercizio 4. Si consideri il rivestimento $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Dimostrare:

1. ogni rotazione $S^1 \to S^1$ è omotopa all'identità;
2. ogni applicazione continua $h\colon \mathbb{R} \to S^1$ si solleva ad un'applicazione continua $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $pk = h$;
3. per ogni applicazione continua $f\colon S^1 \to S^1$ esiste un'applicazione continua $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $p\tilde{f} = fp$ e tale che la funzione $g(x) = \tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x)$ è costante;
4. nelle notazione del punto precedente, che la classe di omotopia di f dipende solo da $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$.

Esercizio 5. Sia Y lo spazio formato da due sfere S^2 tangenti in un punto e sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Provare che ogni applicazione continua $f\colon Y \to X$ si solleva ad un'applicazione continua $g\colon Y \to E$.

Esercizio 6. Descrivere, o dimostrare che non esiste, un sottogruppo infinito G di omeomorfismi della sfera S^3 che agisce in modo propriamente discontinuo.

Esercizio 7. Consideriamo un insieme finito F dotato della topologia discreta e sia $X = \dfrac{D^2 \times F}{\sim}$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da

$$(x, a) \sim (y, b) \iff x = y \in S^1.$$

Dimostare che X è connesso e semplicemente connesso.

Esercizio 8. (non banale) Sia $X = D^2 - \{p, q\}$ con p, q punti interni (e quindi $S^1 = \partial D^2 \subset X$). Siano $x \in S^1$ e $i\colon S^1 \to X$ l'inclusione. Dimostrare che $i_*\colon \pi_1(S^1, x) \to \pi_1(X, x)$ non è surgettiva.

Esercizio 9. (non banale) Sia $q\colon E \to X$ un rivestimento connesso di spazi localmente connessi per archi. Siano inoltre $A, B \subset X$ due aperti connessi tali che $A \cup B = X$, $A \cap B$ è connesso e tali che per ogni $x \in A \cap B$ l'applicazione $\pi_1(A \cap B, x) \to \pi_1(B, x)$ è surgettiva. Dimostrare che $q^{-1}(A)$ è connesso.