Corso di Geometria 2

Docenti: Marco Manetti, Francesco Meazzini, Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Esonero del 26 aprile 2024, con tracce di soluzioni

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico compatto e localmente connesso, ossia ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi. Provare che X possiede un numero finito di componenti connesse.

Traccia: in generale le componenti connesse sono disgiunte e formano un ricoprimento chiuso; se lo spazio è localmente connesso, allora le componenti connesse sono anche aperte. In uno spazio compatto ogni ricoprimento di aperti disgiunti è necessariamente finito.

Esercizio 2. Su $X = [0,1]$ definiamo la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure x e y sono entrambi in $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Poniamo $Y = X/\sim$ con topologia quoziente.

(1) Dimostrare che ogni applicazione continua $Y \to \mathbb{R}$ è chiusa.
(2) Determinare tutti i punti $p \in Y$ tali che $Y \setminus \{p\}$ è connesso.
(3) Trovare un'applicazione continua e suriettiva $Y \to X$.

Traccia: X è compatto, Y è quoziente di un compatto ed è quindi compatto. L'applicazione

$$f\colon X \to X, \qquad f(t) = \sin^2(2\pi t),$$

è continua e suriettiva; siccome $f(0) = f(1/2) = f(1)$ si fattorizza ad un'applicazione continua e surgettiva $Y \to [0,1]$. Se prima identifico solamente 0 e 1 ottengo la circonferenza S^1; quindi Y è ottenuto da S^1 identificando due punti distinti, e si ottiene l'unione di due circonferenze tangenti. Il punto di intersezione tra le due circonferenze è l'unico che sconnette.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{\,]a,b[\times]c,d[\mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a,b > 0\} \cup \{\mathbb{R}\times]c,d[\mid c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

(1) Dimostrare che esiste una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}^2$ tale che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$.
(2) Determinare se $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ è uno spazio di Hausdorff.
(3) Determinare se $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ è uno spazio connesso.

Traccia: che si tratta di una base segue dal fatto che $\mathcal{B}$ è chiusa per intersezioni finite. La topologia indotta sul sottospazio $Y = \{(x,0) \mid x \leq 0\}$ è quella che ha come base le intersezioni di Y con gli elementi di $\mathcal{B}$: dunque Y ha la topologia banale e dunque non è di Hausdorff. A maggior ragione la topologia $\mathcal{T}$ non è di Hausdorff. La topologia $\mathcal{T}$ è meno fine della topologia classica; siccome $\mathbb{R}^2$ è connesso a maggior ragione $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ è uno spazio connesso.

Esercizio 4. Su $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ si consideri la relazione di equivalenza: $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $y_i = \lambda^i x_i$ per $i = 1,2,3$. Denotiamo con X lo spazio topologico quoziente. Dimostrare:

(1) X è connesso,
(2) X è compatto,

(3) X è di Hausdorff,
(4) esistono applicazioni continue ed iniettive $X \to \mathbb{P}^6_{\mathbb{R}}$.

Traccia: Sia $\pi\colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to X$ proiezione al quoziente. Siccome $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ è connesso, anche X è connesso. Scriviamo $\lambda * (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda^2 x_2, \lambda^3 x_3)$; si tratta di un'azione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{R} - \{0\}$. Si consideri la funzione continua

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x_1^{12} + x_2^6 + x_3^4.$$

Allora $F(\lambda * x) = \lambda^{12} F(x)$. Il sottoinsieme $Q = F^{-1}(1)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^3$ ed è quindi compatto.

L'inclusione $Q \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3 - \{0\}$ e la retrazione $r\colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to Q$, $r(x) = \frac{1}{\sqrt[12]{F(x)}} * x$, sono applicazioni continue che preservano le relazioni di equivalenza. Ne segue che X è omeomorfo al quoziente di Q per la relazione indotta, ossia $X = Q/\pm 1$ (± 1 sono le radici 12-me reali di 1). In definitiva, X è il quoziente di uno spazio compatto di Hausdorff Q per l'azione di un gruppo finito; quindi X è compatto T2. L'applicazione continua

$$\mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{P}^4, \quad x \mapsto [x_1^6, x_1^4 x_2, x_1^3 x_3, x_2^3, x_3^2],$$

si fattorizza ad un'applicazione continua $X \to \mathbb{P}^4$ che si verifica facilmente essere iniettiva (trattare separatamente i casi $x_1 = 0$ e $x_1 \neq 0$.)

Esercizio 5. Si consideri il sottospazio topologico $E \subseteq \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ delle matrici che ammettono un autovalore $\lambda \in [0,1]$ la cui molteplicità algebrica valga $m_{alg}(\lambda) = n$.

(1) Si stabilisca se E è chiuso.
(2) Si stabilisca se E è compatto.

Traccia: per una matrice A vale $m_{alg}(\lambda) = n$ se e solo se $p_A(t) = (\lambda - t)^n$; per Cayley–Hamilton questo equivale a dire che $(A - \lambda I)^n = 0$. Allora E è la proiezione sul primo fattore del chiuso

$$\begin{aligned} &\{(A,\lambda) \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times [0,1] \mid (A - \lambda I)^n = 0\} \\ = &\{(A,\lambda) \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times [0,1] \mid P_A(t+\lambda) = (-t)^n\} \end{aligned}$$

ed è quindi chiuso. Se $n = 1$ allora $E = [0,1]$, mentre se $n > 1$ allora E contiene tutte le matrici nilpotenti e quindi non è un sottospazio limitato.