GEOMETRIA 2 - SECONDO ESONERO

A.A. 2023/24 - 31 MAGGIO 2024

MARCO MANETTI - FRANCESCO MEAZZINI - GUIDO PEZZINI

Esercizio 1. Sia $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, e consideriamo l'omeomorfismo da E in se stesso

$$\begin{array}{rccc} f\colon & E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & (-2x, 2y) \end{array}$$

Sia $G = \{\ldots, f^{-2}, f^{-1}, \mathrm{Id}_E, f, f^2, f^3, \ldots\}$ il sottogruppo di Omeo(X) generato da f.

(1) Dimostrare che il quoziente $p\colon E \to X = E/G$ è un rivestimento.
(2) Dimostrare che $\pi_1(X)$ è un gruppo infinito.

Soluzione. Sappiamo dalla teoria che p è un rivestimento se e solo se G agisce in modo propriamente discontinuo su E. Osserviamo che

$$G = \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}, \qquad f^n(x,y) = ((-2)^n x, 2^n y).$$

Fissiamo una norma qualunque $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^2$; allora $\|f^n v\| = 2^n\|v\|$ per ogni $v \in E$. Per ogni $r > 0$ consideriamo l'aperto

$$U(r) = \{v \in E \mid r < \|v\| < 2r\}$$

ed osserviamo che

$$U(r) \cap f^n U(r) = U(r) \cap U(2^n r) = \emptyset \text{ per ogni } n \neq 0.$$

Dato che, al variare di $r > 0$, gli aperti $U(r)$ ricoprono E, abbiamo dimostrato che G agisce in modo propriamente discontinuo.

Per dimostrare che $\pi_1(X)$ è un gruppo infinito basta osservare che $\pi_1(E) \cong \mathbb{Z}$ e ricordare che, siccome p è un rivestimento, l'omomorfismo $p_*\colon \pi_1(E) \to \pi_1(X)$ è iniettivo.

Nota aggiuntiva. Si dimostra facilmente che X è omeomorfo alla Bottiglia di Klein. Identificando E con $\mathbb{C} - \{0\}$ nella maniera $(x,y) \mapsto x + iy$, il gruppo G diventa quello generato da $f(z) = -2\bar{z}$. D'altra parte l'esponenziale complesso

$$e\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}, \qquad z \mapsto e^z,$$

è un rivestimento che coincide con la proiezione al quoziente $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/H$ dove H è il sottogruppo generato dalla traslazione $h(z) = z + 2\pi i$. L'omeomorfismo f si solleva ad un omeomorfismo di $\mathbb{C}$: per la precisione, se

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad g(z) = \bar{z} + \log(2) + \pi i,$$

allora $eg(z) = fe(z)$. Dunque X è il quoziente di $\mathbb{C}$ per il gruppo generato da g, h e si conclude guardando la restrizione della proiezione al quoziente al rettangolo

$$Q = \{x + iy \mid 0 \leq x \leq \log(2),\ -\pi/2 \leq y \leq 3\pi/2\}.$$

Esercizio 2. Si consideri il cammino:

$$\alpha\colon [0,1] \to X, \qquad \alpha(t) = e^{2\pi i t},$$

dove X è un sottospazio di $\mathbb{C}$ che contiene la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Per ciascuno dei seguenti X dire, motivando la risposta <u>in maniera chiara</u>, se la classe di α è banale o non banale in $\pi_1(X, 1)$:

(1) $X = \mathbb{C}$;
(2) $X = \mathbb{C} - \{z \mid |z| > 1\}$;
(3) $X = \mathbb{C} - \{(n+2)e^{in} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
(4) $X = \mathbb{C} - \{z \mid |z| < 1\}$;
(5) $X = \mathbb{C} - \{\text{tre numeri di modulo minore di } 1\}$.

Soluzione. Denotiamo

(1) $X_1 = \mathbb{C}$;

(2) $X_2 = \mathbb{C} - \{z \mid |z| > 1\} = \{z \mid |z| \leq 1\}$;
(3) $X_3 = \mathbb{C} - \{(n+2)e^{in} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
(4) $X_4 = \mathbb{C} - \{z \mid |z| < 1\}$;
(5) $X_5 = \mathbb{C} - \{\text{tre numeri di modulo minore di } 1\}$.

I sottospazi X_1, X_2 sono convessi e quindi ogni cammino chiuso è omotopicamante banale. Dato che $X_2 \subset X_3$ ed α è omotopicamente banale in X_2, a maggior ragione è omotopicamenta banale in X_3.

La circonferenza S^1 è un retratto di X_4 con retrazione $x \mapsto x/\|x\|$ (in realtà è un retratto per deformazione, ma questo non ci serve), quindi il morfismo $\pi_1(S^1) \to \pi_1(X_4)$ è iniettivo. Basta adesso ricordare dalla teoria che $\alpha \neq 0$ in $\pi_1(S^1)$.

Sia $X_5 = \mathbb{C} - \{p, q, r\}$. Allora X_4 è un retratto di X_5 (per i punti di norma < 1 proiettare su S^1 con centro p) e quindi $\pi_1(X_4) \to \pi_1(X_5)$ è iniettivo.

Nota aggiuntiva. Sia $p \in \mathbb{C}$ di norma < 1. L'applicazione continua

$$f\colon X_2 \to X_2, \qquad f(z) = \frac{p - z}{1 - \bar{p}z},$$

è una involuzione, ossia $f^2 = \mathrm{Id}$, e preserva il bordo, ossia $f(S^1) \subseteq S^1$ (esercizio: dimostrare che $f(X_2) \subseteq X_2$, $f(S^1) \subseteq S^1$ e $f^2 = \mathrm{Id}$). Ne segue che una retrazione di $X_2 - \{p\}$ su S^1 è data esplicitamente dalla formula $r(z) = f\left(f(z)/\|f(z)\|\right)$.

Esercizio 3. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^2$ le circonferenze di equazione

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \qquad \text{e} \qquad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1^2$$

rispettivamente e sia L la retta di equazione $y = 0$. Dimostrare che

$$X = (A \cup B \cup L) \cap \{(x, y) \mid y < 2\}$$

è connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale.

Soluzione. Sia $Y = \{(x, y) \in X \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$: si tratta di un triangolo (topologicamente parlando), quindi omeomorfo alla circonferenza S^1 e dunque con gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Adesso Y è un retratto per deformazione di X; infatti X è ottenuto da Y aggiungendo 6 "capelli" che possono essere singolarmente retratti alla radice in maniera continua. Ad esempio, uno dei sei capelli è l'arco semiaperto di circonferenza

$$\{(x, y) \in A \mid x \leq -1,\ y < 2\} = \{(-1 + \cos t, 1 + \sin t) \mid \pi/2 < t \leq 3\pi/2\}$$

che si retrae per deformazione al punto $(-1, 0)$. In conclusione, $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = \mathbb{Z}$.

Le soluzioni degli esercizi 4 e 5 si trovano nelle note delle lezioni di F. Meazzini.

Esercizio 4. Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) + 2\sin(t) \\ 2 - 2\cos(t) - \sin(t) \\ 3 + 2\cos(t) - 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare una riparametrizzazione di α a velocità unitaria.
(2) Dimostrare che l'immagine di α è una circonferenza e determinarne il raggio.

Esercizio 5. Siano $a, b > 0$ due numeri reali positivi. Si consideri la superficie immersa $S \subseteq \mathbb{R}^3$ definita dalla parametrizzazione

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad \psi(u, v) = \begin{pmatrix} a(u+v) \\ b(u-v) \\ 4uv \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la prima forma fondamentale.
(2) Determinare la seconda forma fondamentale.
(3) Determinare curvatura Gaussiana e curvatura media in ogni punto.
(4) Dimostrare che la superficie S può essere descritta come unione di rette affini in $\mathbb{R}^3$, a due a due sghembe fra loro.