SOTTOGRUPPI CHIUSI DI $(\mathbb{R}^n, +)$

MARCO MANETTI PER GEOMETRIA 2, A.A. 2023–24

Vogliamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 0.1. *Sia $G \subset \mathbb{R}^n$ un sottogruppo (rispetto alla somma) chiuso (nella topologia classica). Allora esistono vettori $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ ed un intero $0 \leq q \leq p$ tali che*

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{p} a_i v_i \mid a_1, \dots, a_q \in \mathbb{R},\, a_{q+1}, \dots, a_p \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{1}$$

Prima di procedere alla dimostrazione osserviamo che ogni sottogruppo come in (1) è topologicamemte chiuso; infatti se estendiamo i vettori v_i ad una base $v_1, \dots, v_n$ e $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ è la corrispondente base duale si ha

$$G = \varphi_{q+1}^{-1}(\mathbb{Z}) \cap \cdots \cap \varphi_p^{-1}(\mathbb{Z}) \cap \varphi_{p+1}^{-1}(0) \cap \cdots \cap \varphi_n^{-1}(0).$$

Iniziamo a dimostrare il teorema con ipotesi aggiuntive, che poi saranno gradualmente rimosse.

Lemma 0.2. *Sia $G \subset \mathbb{R}^n$ un sottogruppo chiuso tale che* $\operatorname{Span}(G) = \mathbb{R}^n$ *e si assuma che esista una base $v_1, \dots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ (come spazio vettoriale) tale che*

$$G \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} v_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Allora esistono $u_1, \dots, u_n \in G$ tali che

$$G = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} u_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Proof. Sia $\delta = \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, allora per ogni successione $u_1, \dots, u_n \in G$ il determinante $\det(u_1, \dots, u_n)$ è un multiplo intero di δ. Scegliamo $u_1, \dots, u_n \in G$ tali che $|\det(u_1, \dots, u_n)|$ sia diverso da 0 ed abbia valore minimo; questo segue dal principio del buon ordinamento dato che $|\det(u_1, \dots, u_n)/\delta| \in \mathbb{N}$.

Dimostriamo che $G = \{\sum_{i=1}^n a_i u_i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$: sia $g \in G$, sicccome $\det(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che $g = \sum a_i u_i$. Se $\lfloor a_i \rfloor$ denota la parte intera di a_i vogliamo dimostrare che $a_i = \lfloor a_i \rfloor$ per ogni i.

Per simmetria ci basta provare $a_1 = \lfloor a_1 \rfloor$; se per assurdo $0 < a_1 - \lfloor a_1 \rfloor < 1$ allora, denotando $r = g - \lfloor a_1 \rfloor u_1 \in G$ si avrebbe

$$0 < |\det(r, u_2, \dots, u_n)| < |\det(u_1, u_2, \dots, u_n)|$$

in contraddizione con la scelta di $u_1, \dots, u_n$. □

Lemma 0.3. *Sia $G \subset \mathbb{R}^n$ un sottogruppo e si assuma che esista $r > 0$ tale che*

$$G \cap B(0, r) = \{g \in G \mid \|g\| < r\} = \{0\}.$$

Allora G è un sottogruppo chiuso e discreto ed esistono $u_1, \ldots, u_p \in G$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ e tali che

$$G = \{\sum_{i=1}^{p} a_i u_i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Proof. Non è restittivo supporre che G contenga una base di $\mathbb{R}^n$; in caso contrario si può sostituire $\mathbb{R}^n$ con il sottospazio vettoriale generato da G.

Dato che la distanza pitagorica è invariante per traslazioni, per ogni $h, g \in G$ con $h \neq g$ si ha $\|g - h\| \geq r$ e quindi ogni palla aperta di raggio $r/2$ interseca G in al più un punto. Dato che la famiglia di tutte le palle aperte di raggio $r/2$ è un ricoprimento fondamentale, ne segue che G è chiuso e discreto.

Sia $v_1, \ldots, v_n \in G$ una base di $\mathbb{R}^n$ e riconduciamoci al lemma precedente dimostrando che esiste un intero positivo N tale che

$$G \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{v_i}{N} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ il compatto immagine dell'applicazione continua

$$[0,1]^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \sum t_i v_i.$$

Allora $G \cap K$ è un sottospazio di G e quindi discreto, è un sottospazio chiuso di K e quindi compatto; compatto e discreto implica finito. Proviamo adesso che ogni $g \in G \cap K$ è una combinazione lineare a coefficienti razionali di $v_1, \ldots, v_n$. A priori sappiamo che $g = \sum_i a_i v_i$ con $a_i \in [0,1]$. Per ogni intero $k > 0$ sia

$$g_k = \sum_i (ka_i - \lfloor ka_i \rfloor) v_i \in K \cap G;$$

datto che $G \cap K$ è finito esistono $h \neq k$ tali che $g_h = g_k$, ossia $ha_i - \lfloor ha_i \rfloor = ka_i - \lfloor ka_i \rfloor$ per ogni i e quindi

$$a_i = \frac{\lfloor ha_i \rfloor - \lfloor ka_i \rfloor}{h - k} \in \mathbb{Q}.$$

Prendendo un denominatore comune a tutti gli a_i, per tutti gli elementi di $G \cap K$, si ottiene che esiste un intero $N > 0$ tale che

$$G \cap K \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{v_i}{N} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Per finire, per ogni $g = \sum_i a_i v_i \in G$ si ha

$$\sum_i (a_i - \lfloor a_i \rfloor) v_i \in K \cap G$$

da cui segue

$$G \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{v_i}{N} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

□

Corollario 0.4. *Ogni sottogruppo di $\mathbb{Z}^n$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^p$ per qualche $p \leq n$.*

Proof. Basta considerare $\mathbb{Z}^n$ dentro $\mathbb{R}^n$ ed applicare il lemma precedente. □

Lemma 0.5. *Sia* $G \subset \mathbb{R}^n$ *un sottogruppo chiuso e si consideri il sottospazio vettoriale*

$$G_0 = \bigcap_{r>0} \operatorname{Span}(G \cap B(0, r)).$$

Allora esiste $\delta > 0$ *tale che* $G_0 = \operatorname{Span}(G \cap B(0, r))$ *per ogni* $0 < r \leq \delta$ *e* $G_0 \subset G$.

Proof. Il primo punto segue dal fatto che ogni $\operatorname{Span}(G \cap B(0, r))$ ha dimensione $\leq n$, che se $r < s$ allora $\operatorname{Span}(G \cap B(0, r)) \subseteq \operatorname{Span}(G \cap B(0, s))$ e facendo tendere r a 0 la dimensione di $\operatorname{Span}(G \cap B(0, r))$ deve pertanto stabilizzarsi ad un valore minimo $q = \dim G_0$.

Per dimostrare che $G_0 \subseteq G$, dato che G è chiuso basta dimostrare che per ogni $h \in G_0$ ed ogni $r > 0$ esiste $h_r \in G$ tale che $\|h - h_r\| \leq qr$. Scegliamo $g_1, \ldots, g_q \in G \cap B(0, r)$ che generano G_0 come spazio vettoriale. Allora $h = \sum_i a_i g_i$ con $a_i \in \mathbb{R}$ e definiamo $h_r = \sum_i \lfloor a_i \rfloor g_i \in G$. Per la disuguaglianza triangolare

$$\|h - h_r\| \leq \sum_i (a_i - \lfloor a_i \rfloor) \|g_i\| \leq qr.$$

□

Siamo adesso in grado di dimostrare il teorema. Sia $W = G_0^{\perp}$ l'ortogonale al sottospazio G_0. Allora $\mathbb{R}^n = G_0 \oplus W$ e dato che $G_0 \subset G$ si ha anche $G = G_0 \oplus (W \cap G)$.

Se $r > 0$ è sufficientemente piccolo si ha $B(0, r) \cap G \subset G_0$, quindi $B(0, r) \cap G \cap W = 0$ ed il sottogruppo $G \cap W$ ricade nelle condizioni del secondo lemma.