

Istituzioni di Algebra e Geometria 2022-23
Parte I
Introduzione all'omologia simpliciale e persistente

Marco Manetti

*Versione preliminare del 20 novembre 2022:
l'autore ringrazia tutti coloro che segnalano ed hanno segnalato errori ed imprecisioni*

Avvertenza: Queste dispense sono ancora nella fase work in progress e contengono inevitabilmente molte lacune, imprecisioni ed errori di stampa. Sono distribuite, senza alcuna garanzia, esclusivamente per gli usi relativi all'insegnamento di Istituzioni di Algebra e Geometria 2022-23, Corso di laurea Magistrale in Matematica Applicata, Sapienza Università di Roma.

Indice

Capitolo 1. Complessi simpliciali	1
1.1. Convessi in \mathbb{R}^n	1
1.2. Complessi simpliciali astratti	5
1.3. Realizzazioni geometriche	10
1.4. Grafi semplici e complessi di cricche	12
Capitolo 2. Elementi di algebra omologica	17
2.1. Preliminari di teoria dei gruppi	17
2.2. Gruppi abeliani finiti	19
2.3. Gruppi abeliani liberi	20
2.4. Successioni esatte	23
2.5. Gruppi abeliani finitamente generati	26
2.6. Additività del rango	28
2.7. Complessi di catene e omologia	35
Capitolo 3. Omologia simpliciale	41
3.1. Omologia dei complessi simpliciali astratti	41
3.2. Morfismi e classi di contiguità	44
3.3. La successione esatta di Mayer–Vietoris	48
3.4. Il sottocomplesso delle catene ordinate	52
3.5. Numeri di Betti e caratteristica di Eulero-Poincaré	58
3.6. Omologia a coefficienti \mathbb{F}_2 e semplici positivi	60
Capitolo 4. Insiemi simpliciali e omologia singolare	65
4.1. Insiemi simpliciali	65
4.2. Omologia degli insiemi simpliciali	69
4.3. Complementi: catene degeneri e complesso di Moore	72
4.4. Introduzione all'omologia singolare	75
4.5. Omologia con coefficienti	81
Capitolo 5. Spazi pseudometrici	83
5.1. Proprietà ed esempi basilari	83
5.2. Le distanze di Hausdorff e del collo di bottiglia	85
5.3. La distanza di contiguità	87
5.4. Distanza di interfoglia	90
Capitolo 6. Omologia Persistente	95
6.1. L'incredibile ubiquità della topologia persistente	95
6.2. Allarga i punti e sfoca le immagini	96
6.3. Complessi filtrati	97
6.4. Moduli di persistenza	101
6.5. Barcode e diagramma di persistenza	106
6.6. Basi cicliche e basi di persistenza	110
6.7. Stabilità del diagramma di persistenza	115
Bibliografia	121

Complessi simpliciali

1.1. Convessi in \mathbb{R}^n

Ricordiamo che un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se per ogni $x, y \in C$ ed ogni $t \in [0, 1]$ vale $tx + (1-t)y \in C$, ossia se C contiene il segmento di estremi x e y .

ESEMPIO 1.1.1. Il vuoto, \mathbb{R}^n e ogni sottospazio vettoriale sono sottoinsiemi convessi.

ESEMPIO 1.1.2. Per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, la palla chiusa

$$U_p(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| \leq r\}$$

è un sottoinsieme convesso. Infatti per ogni $x, y \in U_p(r)$ ed ogni $t \in [0, 1]$ per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\|tx + (1-t)y - p\| = \|(t(x-p) + (1-t)(y-p))\| \leq \|t(x-p)\| + \|(1-t)(y-p)\|,$$

e siccome $t, 1-t$ sono entrambi non negativi

$$\|t(x-p)\| + \|(1-t)(y-p)\| = t\|x-p\| + (1-t)\|y-p\| \leq tr + (1-t)r = r.$$

ESEMPIO 1.1.3. Per ogni coppia di punti $p, q \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| \leq \|x - q\|\}$$

è convesso. Denotando con \cdot il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n , ossia $x \cdot y = \sum_i x_i y_i$, si ha

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\|^2 \leq \|x - q\|^2\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 2x \cdot (q - p) \leq \|q\|^2 - \|p\|^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (2x - p - q) \cdot (q - p) \leq 0\} \end{aligned}$$

da cui segue che C è un semispazio chiuso ed anche convesso.

Per **combinazione convessa** di un insieme finito di vettori $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ si intende una qualunque combinazione lineare del tipo

$$\sum_{i=0}^s t_i x_i, \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^s t_i = 1 \quad \text{e} \quad t_i \geq 0 \quad \text{per ogni } i.$$

Si noti che l'unica combinazione convessa di un vettore x è $1x = x$ e che le combinazioni convesse di due vettori x, y sono tutte e sole quelle del tipo $tx + (1-t)y$ al variare di t nell'intervallo chiuso $[0, 1]$.

Per ogni successione finita $x_0, \dots, x_p \subset \mathbb{R}^n$ indichiamo con $\langle x_0, \dots, x_p \rangle \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme di tutte le sue combinazioni convesse, ossia:

$$\langle x_0, \dots, x_p \rangle = \left\{ \sum t_i x_i \in \mathbb{R}^n \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}.$$

Si pone inoltre per convenzione $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$.

Si vede facilmente che $\langle x_0, \dots, x_p \rangle$ è convesso, infatti per ogni $y = \sum \mu_i x_i, z = \sum \lambda_i x_i \in \langle x_0, \dots, x_p \rangle$ ed ogni $t \in [0, 1]$ si ha

$$ty + (1-t)z = \sum_{i=0}^p (t\mu_i + (1-t)\lambda_i)x_i \in \langle x_0, \dots, x_p \rangle.$$

LEMMA 1.1.4. Siano $M \subset \mathbb{R}^n$ e

$$v: \{0, \dots, m\} \rightarrow M, \quad i \mapsto v_i, \quad x: \{0, \dots, p\} \rightarrow M, \quad j \mapsto x_j,$$

due applicazioni surgettive. Allora

$$\langle v_0, \dots, v_m \rangle = \langle x_0, \dots, x_p \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Per simmetria basta provare che $\langle v_0, \dots, v_m \rangle \subseteq \langle x_0, \dots, x_p \rangle$. Scriviamo $\{0, \dots, m\} = \cup_{j=0}^p S_j$, con $S_j = \{i \mid v_i = x_j\}$. Sia $y = \sum_i t_i v_i \in \langle v_0, \dots, v_m \rangle$, allora

$$y = \sum_j \sum_{i \in S_j} t_i v_i = \sum_j \left(\sum_{i \in S_j} t_i \right) x_j = \sum_j \lambda_j x_j,$$

dove $\lambda_j = \sum_{i \in S_j} t_i$. \square

Dunque per ogni sottoinsieme finito $M \subset \mathbb{R}^n$ ha senso definire $\langle M \rangle$: presa una qualunque indicizzazione $M = \{x_0, \dots, x_p\}$ si pone $\langle M \rangle = \langle x_0, \dots, x_p \rangle$.

LEMMA 1.1.5. *Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se e solo se è chiuso per combinazioni convesse, ossia se per ogni sottoinsieme finito $M \subset C$ vale $\langle M \rangle \subset C$.*

DIMOSTRAZIONE. Una implicazione è ovvia in quanto la definizione di convessità è del tutto equivalente al fatto che $\langle x, y \rangle \subset C$ per ogni $x, y \in C$.

Viceversa, supponiamo C convesso e dimostriamo per induzione su m che ogni combinazione convessa di m elementi di C appartiene ancora a C . Si consideri una combinazione convessa

$$y = \sum_{i=0}^m t_i x_i, \quad \sum_{i=0}^s t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \quad x_i \in C.$$

Se $t_0 = 1$ allora $t_i = 0$ per ogni $i > 0$ e $y = x_0 \in C$. Se $t_0 < 1$ possiamo scrivere

$$y = t_0 x_0 + (1 - t_0) z, \quad z = \sum_{i=1}^m \frac{t_i}{1 - t_0} x_i.$$

Siccome $\sum_{i=1}^m \frac{t_i}{1 - t_0} = 1$ per induzione si ha $z \in C$ e quindi $y \in C$ per convessità. \square

Più in generale, per ogni sottoinsieme $M \subset \mathbb{R}^n$ definiamo il suo **inviluppo convesso** $\langle M \rangle$ come l'insieme di tutte le combinazioni convesse di successioni finite in M :

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^p t_i x_i \mid p \geq 0, x_i \in M, t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}.$$

PROPOSIZIONE 1.1.6. *Per ogni $M \subset \mathbb{R}^n$ il suo inviluppo convesso $\langle M \rangle$ è il più piccolo insieme convesso contenente M .*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla definizione che ogni intersezione di insiemi convessi è ancora convessa. Denotiamo provvisoriamente con $C(M)$ l'intersezione di tutti i convessi che contengono M . Siccome \mathbb{R}^n è convesso ne segue che $M \subset C(M)$.

Dobbiamo dimostrare che $\langle M \rangle = C(M)$. L'inclusione $\langle M \rangle \subseteq C(M)$ è facile: infatti $C(M)$ è convesso e quindi chiuso per combinazioni convesse, per ogni $x_0, \dots, x_p \in M \subset C(M)$ si ha quindi $\langle x_0, \dots, x_p \rangle \subset C(M)$.

Viceversa, siccome $M \subset \langle M \rangle$, per dimostrare che $C(M) \subseteq \langle M \rangle$ è sufficiente provare che $\langle M \rangle$ è convesso.

Siano $x = \sum_{i=0}^p \mu_i x_i, y = \sum_{j=0}^q \lambda_j y_j \in \langle M \rangle$ e $t \in [0, 1]$. Allora

$$tx + (1 - t)y = \sum_i t \mu_i x_i + \sum_j (1 - t) \lambda_j y_j \in \langle x_0, \dots, x_p, y_0, \dots, y_q \rangle \subset \langle M \rangle$$

in quanto $\sum_i t \mu_i x_i + \sum_j (1 - t) \lambda_j y_j = t(\sum \mu_i) + (1 - t)(\sum \lambda_j) = t + (1 - t) = 1$. \square

Denotiamo con $\Delta_{\mathbb{R}}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il simpleso topologico standard di dimensione n , definito come l'inviluppo convesso della base canonica, o equivalentemente come

$$\Delta_{\mathbb{R}}^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}.$$

PROPOSIZIONE 1.1.7. *Per ogni sottoinsieme finito $M \subset \mathbb{R}^n$, il suo inviluppo convesso $\langle M \rangle$ è un sottoinsieme compatto e convesso di \mathbb{R}^n e coincide con l'intersezione di tutti i convessi che contengono M .*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già visto che $\langle M \rangle$ è convesso e coincide con l'intersezione dei convessi che contengono M . Rimane solo da dimostrare la compattezza. Il simpleso topologico standard $\Delta_{\mathbb{R}}^n$ è chiuso (intersezione dei chiusi $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$) e limitato (è contenuto nell'ipercubo $[0, 1]^{n+1}$). Quindi $\Delta_{\mathbb{R}}^n$ è compatto.

Se $M = \{x_0, \dots, x_p\}$, per definizione di inviluppo convesso, l'applicazione $f: \Delta_{\mathbb{R}}^p \rightarrow \langle M \rangle$, $f(t) = \sum t_i x_i$ è continua e surgettiva. \square

DEFINIZIONE 1.1.8. Diremo che $p+1$ vettori $v_0, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ sono **affinemente dipendenti** se esistono $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$, non tutti nulli, e tali che:

$$a_0 v_0 + \dots + a_p v_p = 0, \quad a_0 + \dots + a_p = 0.$$

I medesimi vettori si dicono **affinemente indipendenti** se non sono affinemente dipendenti.

Ad esempio, ogni vettore (anche nullo) è affinemente indipendente; due vettori sono affinemente indipendenti se e solo se sono distinti.

È chiaro che se v_0, \dots, v_p sono affinemente dipendenti, allora sono anche linearmente dipendenti. Il viceversa non è vero in generale, ad esempio due vettori distinti di \mathbb{R} sono sempre linearmente dipendenti ed affinemente indipendenti.

LEMMA 1.1.9. *Dati $v_0, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) *i $p+1$ vettori v_0, \dots, v_p sono affinemente dipendenti;*
- (2) *esiste un indice $i = 0, \dots, p$ tale che i p vettori $v_j - v_i$, $j \neq i$, sono linearmente dipendenti;*
- (3) *per ogni $i = 0, \dots, p$ i p vettori $v_j - v_i$, $j \neq i$, sono linearmente dipendenti.*

DIMOSTRAZIONE. È ovvio che (3) implica (2). Mostriamo che (2) implica (1); per semplicità supponiamo $i = 0$ (per $i \neq 0$ la dimostrazione è sostanzialmente identica). Siano $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ non tutti nulli e tali che $\sum_{j=1}^p a_j (v_j - v_0) = 0$. Se poniamo $a_0 = -\sum_{j=1}^p a_j$ si ha

$$\sum_{j=0}^p a_j v_j = \sum_{j=1}^p a_j v_j - \sum_{j=1}^p a_j v_0 = \sum_{j=1}^p a_j (v_j - v_0) = 0.$$

Mostriamo adesso che (1) implica (3). Sia i un indice fissato e siano $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ non tutti nulli e tali che $\sum a_j v_j = 0$ e $\sum a_j = 0$. Siccome $a_i = -\sum_{j \neq i} a_j$ esiste almeno un indice $j \neq i$ tale che $a_j \neq 0$ e si ha la relazione di dipendenza lineare

$$\sum_{j \neq i} a_j (v_j - v_i) = \sum_{j \neq i} a_j v_j - \left(\sum_{j \neq i} a_j \right) v_i = \sum_{j=0}^p a_j v_j = 0.$$

\square

Notiamo che il massimo numero di vettori affinemente indipendenti in \mathbb{R}^n è $n+1$.

TEOREMA 1.1.10 (Teorema di Carathéodory). *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$. Allora ogni elemento $x \in \langle M \rangle$ si può scrivere come combinazione convessa*

$$x = \sum_{i=0}^p t_i x_i, \quad t_i \geq 0, \quad \sum t_i = 1,$$

con i vettori $x_0, x_1, \dots, x_p \in M$ affinemente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Per induzione su p basta dimostrare che se in una combinazione convessa $x = \sum_{i=0}^p t_i x_i$, con i vettori x_0, \dots, x_p affinemente dipendenti, allora a meno di permutazioni degli indici possiamo scrivere x come combinazione convessa di x_1, \dots, x_p . Supponiamo quindi che esistano $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=0}^p t_i x_i = x, \quad \sum_{i=0}^p a_i x_i = 0, \quad \sum_{i=0}^p a_i = 0.$$

Dunque, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sum_{i=0}^p (t_i - \lambda a_i) x_i = x, \quad \sum_{i=0}^p (t_i - \lambda a_i) = 1.$$

Siccome gli a_i non sono tutti nulli esiste almeno un indice j tale che $a_j > 0$. A meno di permutare gli indici possiamo supporre che esista $0 \leq r < p$ tale che:

- (1) $a_i > 0$ per $i \leq r$ e $a_i \leq 0$ per $i > r$;
- (2) $0 \leq \frac{t_0}{a_0} \leq \frac{t_1}{a_1} \leq \dots \leq \frac{t_r}{a_r}$.

Se prendiamo $\lambda = \frac{t_0}{a_0}$ allora

$$t_0 - \lambda a_0 = 0, \quad t_i - \lambda a_i \geq 0 \quad \forall i > 0,$$

e quindi $\sum_{i=1}^p (t_i - \lambda a_i)x_i = x$ rappresenta x come combinazione convessa di x_1, \dots, x_p . \square

TEOREMA 1.1.11. *Per una successione di vettori $x_0, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) *i vettori x_0, \dots, x_p sono affinementemente indipendenti;*
- (2) *i vettori x_0, \dots, x_p sono distinti e per ogni coppia di sottoinsiemi disgiunti $s, t \subset \{x_0, \dots, x_p\}$ vale $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \emptyset$.*

Se le precedenti condizioni sono soddisfatte, allora l'applicazione

$$f: \Delta_{\mathbb{R}}^p \rightarrow \langle x_0, \dots, x_p \rangle, \quad f(t_0, \dots, t_p) = \sum_{i=0}^p t_i x_i,$$

è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Se esistono due sottoinsiemi disgiunti $s, t \subset \{x_0, \dots, x_p\}$ tali che $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle \neq \emptyset$ allora esiste un'uguaglianza di combinazioni convesse

$$\sum_{x_i \in s} \lambda_i x_i = \sum_{x_j \in t} \mu_j x_j, \quad \sum \lambda_i = \sum \mu_j = 1.$$

Facendo le differenze troviamo

$$\sum_{x_i \in s} \lambda_i x_i - \sum_{x_j \in t} \mu_j x_j = 0, \quad \sum \lambda_i - \sum \mu_j = 0$$

che è una relazione di dipendenza affine.

Viceversa, supponiamo che i vettori x_i siano distinti ma affinementemente dipendenti, ossia che $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$ e che esiste una relazione lineare

$$\sum_{i=0}^p a_i x_i = 0, \quad \sum_{i=0}^p a_i = 0, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ non tutti nulli.}$$

A meno di permutazione degli indici possiamo supporre che esista $0 \leq r \leq p$ tale che:

- (1) $a_i > 0$ se $0 \leq i \leq r$,
- (2) $a_i \leq 0$ se $r+1 \leq i \leq p$.

Inoltre, a meno di dividere tutti gli scalari a_i per $\sum_{i=1}^r a_i$ possiamo supporre $\sum_{i=1}^r a_i = 1$ e di conseguenza $\sum_{i=r+1}^p a_i = -1$.

Ma allora il punto

$$y = \sum_{i=0}^r a_i x_i = \sum_{i=r+1}^p (-a_i) x_i$$

appartiene all'intersezione degli involuppi convessi $\langle x_0, \dots, x_r \rangle \cap \langle x_{r+1}, \dots, x_p \rangle$.

Se le due condizioni equivalenti sono soddisfatte, allora l'applicazione f è surgettiva per definizione di involuppo convesso. Possiamo scrivere

$$f(t_0, \dots, t_p) = \sum_{i=0}^p t_i x_i = x_0 + \sum_{i=1}^p t_i (x_i - x_0),$$

e dato che i vettori $x_i - x_0$ sono linearmente indipendenti ne segue che f è anche iniettiva. Dal punto di vista topologico, l'applicazione f è continua e bigettiva da un compatto in un Hausdorff e quindi un omeomorfismo. \square

COROLLARIO 1.1.12 (Teorema di Radon). *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme contenente almeno $n + 2$ vettori distinti. Esiste allora una scomposizione in unione disgiunta $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, tale che $\langle M_1 \rangle \cap \langle M_2 \rangle \neq \emptyset$.*

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo $n + 2$ elementi distinti $x_0, \dots, x_{n+1} \in M$, che quindi sono affinemente dioendenti. Per il Teorema 1.1.11 esistono due sottoinsiemi disgiunti $s, t \subset \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ tali che $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle \neq \emptyset$. Basta allora considerare $M_1 = s$ e $M_2 = M - s$. \square

COROLLARIO 1.1.13 (Teorema di Helly). *Sia \mathcal{U} una famiglia di sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n . Si assuma che per ogni $X_0, \dots, X_d \in \mathcal{U}$ con $d \leq n$ si abbia $X_0 \cap X_1 \cap \dots \cap X_d \neq \emptyset$. Allora ogni intersezione finita di elementi di \mathcal{U} è non vuota.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esistano sottofamiglie finite con intersezione vuota. Sia $X_0, \dots, X_m \in \mathcal{U}$ una di queste con m minimo, ossia:

- (1) $X_0 \cap X_1 \cap \dots \cap X_m = \emptyset$;
- (2) $X_0 \cap \dots \cap \widehat{X_i} \cap \dots \cap X_m \neq \emptyset$ per ogni $i = 0, \dots, m$.

Abbiamo usato la notazione sottrattiva standard, nella quale la parte sottostante al segno del “cappello” $\widehat{}$ viene omessa.

Per ipotesi $m > n$; scegliendo per ogni $i = 0, \dots, m$ un elemento

$$x_i \in X_0 \cap \dots \cap \widehat{X_i} \cap \dots \cap X_m,$$

per il Corollario 1.1.12, a meno di permutazioni degli indici esiste k tale che

$$\langle x_0, \dots, x_k \rangle \cap \langle x_{k+1}, \dots, x_m \rangle \neq \emptyset.$$

Poiché ciascun X_i è convesso, si ha

$$\langle x_0, \dots, x_k \rangle \subset X_{k+1} \cap \dots \cap X_m, \quad \langle x_{k+1}, \dots, x_m \rangle \subset X_1 \cap \dots \cap X_k,$$

in contraddizione con il fatto che $X_0 \cap X_1 \cap \dots \cap X_m = \emptyset$. \square

Si noti che, senza ulteriori ipotesi, il teorema di Helly non vale per la intersezioni infinite: si consideri ad esempio la famiglia delle semirette limitate dal basso di \mathbb{R} .

Esercizi.

ESERCIZIO 1. Provare che per ogni $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \geq 0$ l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i \|x - p_i\| \leq r\}$$

è convesso.

ESERCIZIO 2. Siano C, D sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n . Dimostrare che il sottoinsieme

$$C + D = \{x + y \in \mathbb{R}^n \mid x \in C, y \in D\}$$

è ancora convesso.

ESERCIZIO 3. Dedurre dal Teorema di Carathéodory che l'involuppo convesso di un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^n è ancora compatto.

1.2. Complessi simpliciali astratti

Iniziamo con il fissare alcune notazioni: se I è un insieme scriveremo Δ^I per indicare la famiglia di tutti i sottoinsiemi **finiti e non vuoti** di I . Nel caso in cui $I = \{0, 1, \dots, n\}$ scriveremo più semplicemente Δ^n in luogo di $\Delta^{\{0,1,\dots,n\}}$. È chiaro che $\Delta^\emptyset = \emptyset$.

Per ogni insieme finito X denotiamo con $|X|$ la sua cardinalità.

DEFINIZIONE 1.2.1. Un **complesso simpliciale astratto** è una coppia (K, I) , dove I è un insieme, i cui elementi sono detti **vertici**, e K è un sottoinsieme di Δ^I per cui valgono le seguenti condizioni:

- (1) $\{x\} \in K$ per ogni $x \in I$;
- (2) se $s \in K$, $t \in \Delta^I$ e $t \subseteq s$, allora $t \in K$.

Giova osservare che la precedente condizione (2) equivale a dire che se $s \in K$, allora $\Delta^s \subseteq K$.

Se (K, I) è un complesso simpliciale astratto, chiameremo **simplessi** gli elementi di K .

La **dimensione** di un simpleso $s \in K$ è definita come il numero di elementi di s diminuito di 1: $\dim s = |s| - 1$. Ogni vertice ha dimensione 0. Chiameremo anche p -simpleso un simpleso di dimensione p .

Se $s \in K$ e $t \subset s$ diremo che t è una **faccia** di s , se $t \subset s$ e $t \neq s$ diremo che t è una **faccia propria** di s . Un simpleso $s \in K$ si dice **massimale** se non è faccia propria di alcun simpleso in K .

DEFINIZIONE 1.2.2. Un isomorfismo tra due complessi simpliciali astratti (K, I) e (H, J) è un'applicazione bigettiva $f: I \xrightarrow{\cong} J$ con la proprietà che $s \in K$ se e solo se $f(s) \in H$.

È opportuno precisare che in queste note siamo *interessati esclusivamente alle proprietà dei complessi simpliciali astratti a meno di isomorfismo*, ossia siamo interessati solamente alle relazioni che intercorrono tra i simplessi e non alla loro natura reale.

Se (K, I) è un complesso simpliciale astratto e $f: I \xrightarrow{\cong} J$ è un'applicazione bigettiva, allora ponendo $H = \{f(s) \in \Delta^J \mid s \in K\}$ si ha che (H, J) è un complesso simpliciale astratto isomorfo a (K, I) , con l'isomorfismo dato da f .

Segue dalla definizione che esiste una bigezione tautologica tra l'insieme dei vertici di un complesso simpliciale astratto (K, I) e l'insieme degli 0-simplessi. Dunque K determina univocamente I e nel seguito useremo la notazione semplificata $K = (K, I)$ quando non è necessario esplicitare l'insieme dei vertici.

Nella Definizione 1.2.1 l'aggettivo “astratto” serve per differenziare il concetto dai complessi simpliciali topologici [18]. Per semplicità diremo semplicemente “complesso simpliciale” quando la natura astratta o topologica è chiara dal contesto.

ESEMPIO 1.2.3. Per ogni insieme I , la coppia (Δ^I, I) è un complesso simpliciale astratto che viene detto **completo**.

DEFINIZIONE 1.2.4. Dato un complesso simpliciale astratto K , chiamiamo p -**scheletro** di K , denotato con $K^{(p)}$, la sottofamiglia di tutti i simplessi di K di dimensione minore o uguale a p , ossia la famiglia dei simplessi di K con al più $p + 1$ elementi.

Un complesso simpliciale astratto (K, I) si dice finito se I è un insieme finito ($\iff K$ è finito). La **dimensione** $\dim K$ di un complesso simpliciale astratto K è l'estremo superiore delle dimensioni dei suoi simplessi. In particolare: $K = K^{(p)}$ se e solo se $\dim K \leq p$, Δ^I ha dimensione $|I| - 1$ e, coerentemente, definiamo uguale a -1 la dimensione del complesso simpliciale vuoto $\emptyset = \Delta^\emptyset$.

Ogni complesso simpliciale astratto finito ha dimensione finita, mentre il viceversa è generalmente falso.

Prima di sviluppare la teoria dei complessi simpliciali astratti, illustriamo alcuni esempi significativi.

ESEMPIO 1.2.5. Se K è un complesso simpliciale astratto, allora lo è anche $K^{(p)}$ per ogni $p \geq 0$ (con gli stessi vertici di K).

ESEMPIO 1.2.6. Dati due complessi simpliciali astratti (K, I) e (H, J) , la loro unione $(K \cup H, I \cup J)$ e la loro intersezione $(K \cap H, I \cap J)$ sono ancora complessi simpliciali astratti.

ESEMPIO 1.2.7. Per ogni complesso simpliciale astratto K si ha $K = \bigcup_{s \in K} \Delta^s$. Se K ha dimensione finita ogni simpleso è contenuto in un simpleso massimale e quindi

$$K = \bigcup_{s \in K, s \text{ massimale}} \Delta^s.$$

ESEMPIO 1.2.8. Dati due complessi simpliciali astratti (K, I) e (H, J) la loro **giunzione** è il complesso simpliciale astratto $(K * H, I \cup J)$, dove

$$K * H = K \cup H \cup \{s \cup t \mid s \in K, t \in H\}.$$

DEFINIZIONE 1.2.9. Dato un complesso simpliciale astratto K e un sottoinsieme $L \subseteq K$, diremo che L è un **sottocomplesso** di K se L è a sua volta un complesso simpliciale astratto (i cui vertici sono contenuti nei vertici di K).

Ad esempio, gli scheletri sono sottocomplessi. Ogni complesso simpliciale astratto (K, I) è un sottocomplesso di Δ^I e per ogni $s \in K$ si ha che Δ^s è un sottocomplesso di K .

DEFINIZIONE 1.2.10. Un complesso simpliciale astratto si dice **connesso** se non è unione di due sottocomplessi simpliciali non vuoti e disgiunti.

LEMMA 1.2.11. *Un complesso simpliciale astratto K è connesso se e solo se ogni coppia di vertici v, w è collegata da una successione finita di 1-simplessi*

$$\{v, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \dots, \{u_n, w\} \in K.$$

In particolare K è connesso se e solo se il suo 1-scheletro $K^{(1)}$ è connesso.

DIMOSTRAZIONE. Se $K = \emptyset$ non c'è nulla da dimostrare. Se K è sconnesso e $K = L \cup P$ con L, P complessi simpliciali astratti non vuoti e disgiunti, allora $\{l, p\} \notin K$ per ogni $l \in L^{(0)}, p \in P^{(0)}$: infatti, se per assurdo fosse $\{l, p\} \in K$ e, tanto per fissare le idee $\{l, p\} \in L$, allora $p \in L$ che è assurdo. In particolare nessun vertice di L è collegato ad un vertice di P .

Viceversa, sia (K, I) connesso e non vuoto, fissiamo un vertice $v \in I$ e scriviamo $I = J \cup (I - J)$ dove J è l'insieme dei vertici collegati a v mediante un numero finito di 1-simplessi; vogliamo dimostrare che $J = I$. Se fosse $J \neq I$, siccome $v \in J \neq \emptyset$, si avrebbe

$$L := \Delta^J \cap K \neq \emptyset, \quad P := \Delta^{I-J} \cap K \neq \emptyset, \quad L \cap P = \emptyset.$$

Per ipotesi K è connesso e quindi $K \neq L \cup P$. Preso un semplice $\{x_0, \dots, x_p\} \in K - (L \cup P)$ possiamo trovare due indici distinti j, h tali che $x_j \in J, x_h \in I - J$. Dato che x_j, x_h sono collegati dall'1-simplesso $\{x_j, x_h\} \subset \{x_0, \dots, x_p\} \in K$ e x_j è collegato a v mediante un numero finito di 1-simplessi, lo stesso vale anche per x_h , in contraddizione con l'appartenenza $x_h \in I - J$. \square

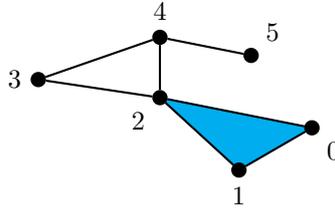
ESEMPIO 1.2.12. Sia (K, I) un complesso simpliciale astratto finito con $I \subset \mathbb{R}^n$. Nelle notazioni della sezione precedente, per ogni sottoinsieme finito $s \subset \mathbb{R}^n$ indichiamo con $\langle s \rangle \subset \mathbb{R}^n$ l'involuppo convesso di s :

$$\langle \emptyset \rangle = \emptyset, \quad \langle \{x_0, \dots, x_p\} \rangle = \left\{ \sum t_i x_i \in \mathbb{R}^n \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}, \quad p \geq 0.$$

Se accade che per ogni $s, t \in K$ si ha $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \langle s \cap t \rangle$, allora possiamo rappresentare K mediante la sua **realizzazione geometrica**

$$|K| := \bigcup_{s \in K} \langle s \rangle = \bigcup_{s \in K, s \text{ massimale}} \langle s \rangle \subset \mathbb{R}^n.$$

Ad esempio la figura



rappresenta il complesso simpliciale astratto

$$K = \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\},$$

i cui scheletri sono:

$$K^{(0)} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\},$$

$$K^{(1)} = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\},$$

$$K^{(p)} = K \quad \text{per ogni } p \geq 2.$$

Tratteremo in maggiori dettagli le realizzazioni geometriche nella Sezione 1.3.

ESEMPIO 1.2.13 (Catene in un poset). Ricordiamo che un **poset** (abbreviazione di *partially ordered set*) non è altro che un insieme (parzialmente) ordinato: più precisamente un poset è una coppia (I, \leq) , con I insieme e \leq una relazione che soddisfa le condizioni:

- (riflessiva) $x \leq x$ per ogni $x \in I$;
- (antisimmetrica) se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$;
- (transitiva) se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$.

Si scrive $x < y$ con lo stesso significato di $x \leq y$ e $x \neq y$. Un sottoinsieme $C \subset I$ si dice una **catena** del poset se C risulta totalmente ordinato con la relazione di ordine indotta, ossia se per ogni $x, y \in C$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$.

Sia dunque (I, \leq) un poset. Il complesso simpliciale astratto delle catene finite di I è $(b(I), I)$, dove:

$$b(I) = \{C \subset I \text{ catena finita}\} \subset \Delta^I.$$

Infatti ogni sottoinsieme di un solo elemento è una catena ed ogni sottoinsieme di una catena è ancora una catena. Osserviamo che si può anche scrivere

$$b(I) = \{\{x_0, \dots, x_p\} \in \Delta^I \mid x_0 < x_1 < \dots < x_p\}.$$

ESEMPIO 1.2.14 (Suddivisione baricentrica). Dato un qualunque complesso simpliciale astratto (K, I) , l'insieme K è ordinato per inclusione e possiamo definire la sua **suddivisione baricentrica** $(b(K), K)$ come il complesso delle catene di K :

$$b(K) = \{\{x_0, \dots, x_p\} \in \Delta^K \mid x_0 \subset x_1 \subset \dots \subset x_p\}.$$

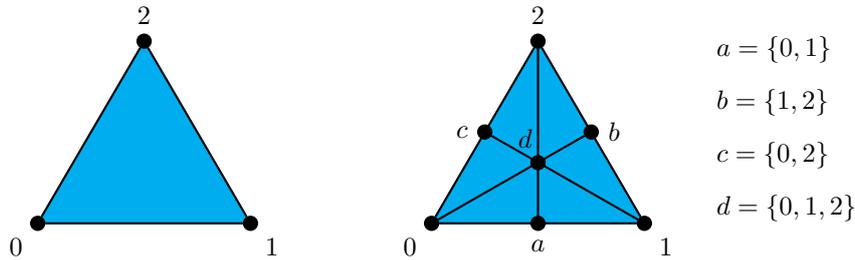


FIGURA 1. Il complesso simpliciale astratto Δ^2 e la sua suddivisione baricentrica $b(\Delta^2)$.

ESEMPIO 1.2.15 (Il **nervo**). Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di un insieme fissato. Possiamo definire un complesso simpliciale astratto $(N(\mathcal{U}), I)$ ponendo

$$N(\mathcal{U}) = \{\{i_0, \dots, i_p\} \in \Delta^I \mid U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset\}.$$

È chiaro che la coppia $(N(\mathcal{U}), I)$ è un complesso simpliciale astratto. È utile osservare che se $U_i = U_j$ per ogni i, j allora il nervo coincide con il complesso simpliciale completo Δ^I .

ESEMPIO 1.2.16 (Complesso duale). Per definizione, il **duale** di complesso simpliciale astratto è il nervo dei semplici massimali. Più precisamente, se K è un complesso simpliciale astratto, un semplice $s \in K$ si dice massimale se non è contenuto propriamente in alcun semplice di K . Sia $J \subset K$ la sottofamiglia dei semplici massimali, allora il duale di K è dato da

$$K^\vee = \{\{s_0, \dots, s_p\} \in \Delta^J \mid s_0 \cap \dots \cap s_p \neq \emptyset\}.$$

In generale, la produzione del duale non è un'operazione reversibile: ad esempio i complessi simpliciali Δ^n hanno tutti un unico semplice massimale e quindi hanno tutti lo stesso duale.

ESEMPIO 1.2.17 (Complesso di **Delaunay**). Dato un qualsiasi sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}^n$, per ogni $s \in I$ definiamo la sua **regione di Voronoi**¹ $V_s \subseteq \mathbb{R}^n$ come:

$$V_s = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - s\| \leq \|x - t\|, \quad \forall t \in I\}.$$

Per quanto osservato nell'Esempio 1.1.3 si ha che V_s è intersezione di semispazi chiusi. In particolare V_s è un chiuso convesso.

È chiaro che $V_s \neq \emptyset$ per ogni $s \in I$ e ha quindi perfettamente senso considerare il suo nervo $D_I := (N(\{V_s\}), I)$, che viene detto **complesso di Delaunay** del sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}^n$.

Equivalentemente un simpleso $\{s_0, \dots, s_p\} \in \Delta^I$ appartiene al complesso di Delaunay D_I se e solo se esiste $x \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\|x - s_0\| = \|x - s_1\| = \dots = \|x - s_p\| \leq \|x - t\| \quad \text{per ogni } t \in I.$$

In particolare, per ogni $\{s_0, \dots, s_p\} \in D_I$ i $p + 1$ punti s_0, \dots, s_p sono contenuti in una sfera di dimensione $n - 1$ che non contiene al suo interno alcun punto di I . Dunque per un sottoinsieme finito I di \mathbb{R}^n ed in *posizione generica* il complesso di Delaunay D_I ha al più dimensione n .

ESEMPIO 1.2.18 (Witness complex²). Siano $L \subset P \subset \mathbb{R}^n$ due sottoinsiemi finiti e si consideri famiglia $D \subset \Delta^L$ di sottoinsiemi di L definita come

$$D = \{S \subset L \mid \exists p \in P \text{ tale che } \|p - x\| \leq \|p - y\| \forall x \in S, y \in L - S\}.$$

È facile vedere che $\{l\} \in D$ per ogni $l \in L$ e che in generale D non è un complesso simpliciale; si definiscono quindi il **witness complex** della coppia L, P come

$$W_\infty(L, P) = \{s \in D \mid t \in D \quad \forall \emptyset \neq t \subset s\}$$

ed il **weak witness complex** come

$$W_1(L, P) = \{s \in \Delta^L \mid t \in D \quad \forall t \subset s, |t| = 2\}.$$

Si lascia per esercizio verificare che i due witness complex sono complessi simpliciali astratti che hanno L come insieme di vertici. Più in generale, anche se poco considerato in pratica, per ogni intero positivo k ha senso considerare il complesso simpliciale

$$W_k(L, P) = \{s \in \Delta^L \mid t \in D \quad \forall t \subset s, 0 < |t| \leq k + 1\}.$$

Esercizi:

ESERCIZIO 4. Denotiamo con $b(K)$ la suddivisione baricentrica del complesso simpliciale astratto K . Provare che:

- (1) $b(\Delta^0) = \Delta^0$;
- (2) $b(\Delta^n)$ è di tipo cono per ogni $n \geq 0$;
- (3) se L è un sottocomplesso di K , allora $b(L)$ è un sottocomplesso di $b(K)$;
- (4) se L, M sono sottocomplessi di K , allora $b(L \cap M) = b(L) \cap b(M)$ e $b(L \cup M) = b(L) \cup b(M)$.

ESERCIZIO 5. Sia $I \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non vuoto. Provare che le regioni di Voronoi V_s , $s \in I$, ricoprono \mathbb{R}^n , ossia $\mathbb{R}^n = \cup_{s \in I} V_s$.

¹Voronoi era un matematico ucraino, mentre Delaunay russo ma di antenati francesi. Il primo si pronuncia più o meno come si scrive, mentre il secondo “deloné”.

²Ignoro se esiste una traduzione italiana riconosciuta. Inoltre anche in lingua inglese non tutte le definizioni in letteratura coincidono.

1.3. Realizzazioni geometriche

In questa sezione studieremo esistenza ed unicità topologica delle realizzazioni geometriche dei complessi simpliciali astratti finiti. Per maggiori dettagli e per il caso dei complessi simpliciali infiniti rimandiamo a [19, Sezione 3.1].

PROPOSIZIONE 1.3.1. *Sia (K, I) un complesso simpliciale astratto con $I \subset \mathbb{R}^n$ e tale che $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \emptyset$ per ogni $s, t \in K$ tali che $s \cap t = \emptyset$. Allora $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \langle s \cap t \rangle$ per ogni $s, t \in K$.*

DIMOSTRAZIONE. L'inclusione $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle \supset \langle s \cap t \rangle$ è vera per ovvi motivi. Dimostriamo per induzione su $n = \dim(s \cap t)$ che vale l'inclusione opposta

$$(1.1) \quad \langle s \rangle \cap \langle t \rangle \subset \langle s \cap t \rangle.$$

Per $n = -1$, ossia se $s \cap t = \emptyset$, la (1.1) è vera per ipotesi. Supponiamo quindi $n \geq 0$, $s = \{s_0, \dots, s_p\}$ e $t = \{t_0, \dots, t_q\}$ con $s_i \neq s_j$ e $t_i \neq t_j$ per ogni $i \neq j$; a meno di permutazioni possiamo inoltre supporre $s_0 = t_0$.

Sia dunque $y \in \langle s \rangle \cap \langle t \rangle$. Si ha

$$y = \sum_{i=0}^p a_i s_i = \sum_{j=0}^q b_j t_j, \quad 0 \leq a_i, b_j \leq 1, \quad \sum a_i = \sum b_j = 1.$$

Supponiamo per fissare le idee che $a_0 \leq b_0$ (altrimenti sarà sufficiente scambiare s con t). Se $a_0 = 1$ allora $y = s_0 \in \langle s \cap t \rangle$. Se invece $a_0 < 1$, ponendo $r = \{s_1, \dots, s_p\}$ si ha

$$z := \frac{1}{1 - a_0} (y - a_0 s_0) = \sum_{i=1}^p \frac{a_i}{1 - a_0} s_i \in \langle r \rangle.$$

D'altra parte, siccome $t_0 = s_0$

$$z = \frac{b_0 - a_0}{1 - a_0} t_0 + \sum_{j=1}^q \frac{b_j}{1 - a_0} t_j \in \langle t \rangle.$$

Per l'ipotesi induttiva $z \in \langle r \cap t \rangle$ e quindi $y = a_0 s_0 + (1 - a_0) z \in \langle s \cap t \rangle$. \square

DEFINIZIONE 1.3.2. Siano $K = (K, I)$ un complesso simpliciale astratto finito e $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione tale che $\langle f(s) \rangle \cap \langle f(t) \rangle = \emptyset$ per ogni coppia di semplici *disgiunti* $s, t \in K$. Definiamo la **realizzazione geometrica** di K tramite f come

$$|f(K)| = \bigcup_{s \in K} \langle f(s) \rangle \subset \mathbb{R}^n,$$

dotato della topologia di sottospazio. Se f è il morfismo di inclusione di un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}^n$ scriveremo semplicemente $|K|$ in luogo di $|f(K)|$ (vedi Esempio 1.2.12).

Nota: per coerenza con [19] abbiamo usato la notazione $|K|$ per denotare la realizzazione geometrica, da non confondere con la cardinalità di K .

Osserviamo che ogni $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ come nella Definizione 1.3.2 è necessariamente iniettiva: se $u, v \in I$ sono due vertici distinti, allora $\{u\} \cap \{v\} = \emptyset$ e quindi $f(u) \neq f(v)$. Ne segue che (K, I) è isomorfo come complesso simpliciale astratto a $(f(K), f(I))$, dove $f(K) = \{f(s) \mid s \in K\}$.

Inoltre, segue dal Teorema 1.1.11 che per ogni semplice $\{x_0, \dots, x_p\} \in K$ i vettori $f(x_0), \dots, f(x_p)$ sono affinementemente indipendenti, quindi $n \geq p$ da cui segue $n \geq \dim K$, mentre per la Proposizione 1.3.1 $\langle f(s) \rangle \cap \langle f(t) \rangle = \langle f(s) \cap f(t) \rangle$ per ogni $s, t \in K$.

TEOREMA 1.3.3. *Ogni complesso simpliciale astratto finito possiede realizzazioni geometriche, tra loro tutte topologicamente equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (K, I) un complesso simpliciale astratto finito e sia V lo spazio vettoriale reale generato da I : ogni elemento di V è una combinazione lineare del tipo $\sum a_i x_i$, con $a_i \in \mathbb{R}$ e $x_i \in I$. Dato che gli elementi di I sono una base di V per ogni $s, t \in K$ tali

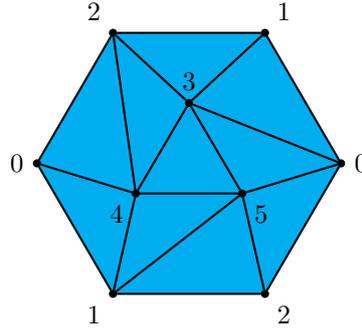


FIGURA 2. Una triangolazione del piano proiettivo reale.

che $s \cap t = \emptyset$ si ha $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \emptyset$ e questo ci consente di definire la realizzazione geometrica canonica

$$|K|_{\text{can}} = \bigcup_{s \in K} \langle s \rangle \subset V.$$

Sia adesso $|f(K)|$ una realizzazione geometrica indotta da $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Siccome I è una base di V , l'applicazione f si estende in modo unico ad un'applicazione lineare

$$V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sum a_i x_i \mapsto \sum a_i f(x_i),$$

che per costruzione si restringe ad un'applicazione continua e surgettiva $F: |K|_{\text{can}} \rightarrow |f(K)|$. Siccome $|K|_{\text{can}}$ è compatto (unione finita di compatti) e $|f(K)|$ è compatto, basta dimostrare che F è anche iniettiva. Ma questo segue facilmente dal Teorema 1.1.11 e dalla Proposizione 1.3.1: i dettagli sono lasciati per esercizio. \square

Non è difficile dimostrare che ogni complesso simpliciale astratto finito di dimensione k possiede una realizzazione geometrica in \mathbb{R}^{2k+1} . Per **triangolazione** di uno spazio topologico X si intende una coppia (K, f) con K complesso simpliciale astratto e $f: |K| \rightarrow X$ un omeomorfismo.

Data una realizzazione geometrica di un complesso simpliciale astratto (K, I) indotta da una inclusione $I \subset \mathbb{R}^n$ possiamo associare in maniera canonica una realizzazione geometrica della suddivisione baricentrica $(b(K), K)$ indotta dall'inclusione

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(\{x_0, \dots, x_p\}) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p x_i.$$

Per future applicazioni è utile avere una stima dall'alto del diametro dei semplici della realizzazione geometrica di $b(K)$. Due semplici $a, b \in K$ appartengono ad un semplice di $b(K)$ se e solo se uno è contenuto nell'altro. Diciamo

$$a = \{x_0, \dots, x_p\} \subset b = \{x_0, \dots, x_q\}, \quad x_i \in I \subset \mathbb{R}^n, \quad p \leq q.$$

Vale allora la disuguaglianza

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \frac{q}{q+1} \max_{0 \leq i, j \leq q} \|x_i - x_j\|.$$

Infatti, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \sum_{i=0}^p \frac{x_i}{p+1} - \sum_{j=0}^q \frac{x_j}{q+1} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \frac{x_i - x_j}{(p+1)(q+1)} \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0, j \neq i}^q \frac{x_i - x_j}{(p+1)(q+1)}. \end{aligned}$$

L'ultima sommatoria ha esattamente $(p+1)q$ addendi e se M denota il massimo delle norme $\|x_i - x_j\|$ al variare di $i = 0, \dots, p$ e $j = 0, \dots, q$, per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \frac{(p+1)q}{(p+1)(q+1)} M = \frac{q}{q+1} M.$$

1.4. Grafi semplici e complessi di cricche

Prima di iniziare conviene avvisare che (quasi) tutta la terminologia in teoria dei grafi è soggetta a variazioni da testo a testo: per solidarietà con l'autore di [13] in queste note chiameremo grafo semplice quello che in letteratura viene generalmente detto grafo. Va anche detto che esistono nozioni più generali (digrafi, multigrafi, grafi orientati, ipergrafi) la cui trattazione va però oltre gli obiettivi di queste note.

DEFINIZIONE 1.4.1. Un **grafo semplice** (per completezza: grafo semplice astratto) è un complesso simpliciale astratto di dimensione ≤ 1 .

Tradizionalmente un grafo semplice viene denotato con una coppia (V, E) , dove V è detto insieme dei **vertici** e E insieme dei **lati**; ogni lato congiunge due vertici distinti e per ogni coppia di vertici distinti esiste al più un lato che li congiunge. In questa notazione, un complesso simpliciale (K, I) di dimensione ≤ 1 corrisponde alla coppia $(I, K - K^{(0)})$, e cioè

$$0\text{-simplessi} = \text{vertici}, \quad 1\text{-simplessi} = \text{lati}.$$

Sempre nella terminologia tradizionale, dato un grafo semplice $\Gamma = (V, E)$, se $e \in E$ è un lato, i due vertici congiunti da e sono detti gli **estremi** di e .

Per semplicità notazionale, salvo avviso contrario *da questo momento in poi useremo il termine grafo per intendere un grafo semplice finito*, ossia con un numero finito di vertici e lati. Qualora si utilizzi la terminologia tradizionale identificheremo, spesso ed implicitamente, ogni lato con la coppia non ordinata di suoi estremi.

Dato un grafo (semplice finito) $\Gamma = (V, E)$, il numero di lati che hanno un dato vertice v come estremo viene detto **grado** di v e si denota $d_\Gamma(v)$.

PROPOSIZIONE 1.4.2. Se $\Gamma = (V, E)$ è un grafo finito, allora

$$\sum_{v \in V} d_\Gamma(v) = 2|E|.$$

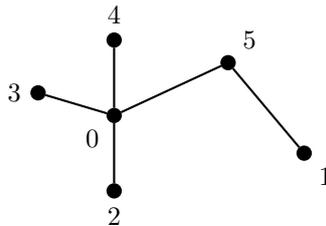
In particolare vi è un numero pari di vertici di grado dispari.

DIMOSTRAZIONE. L'insieme $Z = \{(v, e) \in V \times E \mid v \in e\}$ (stiamo pensando i lati come sottoinsiemi di V di cardinalità 2) ha cardinalità $2|E|$, dato che ogni estremo compare in Z esattamente due volte per ogni lato. Basta allora osservare per ogni $v \in V$, il grado $d_\Gamma(v)$ è la cardinalità dell'insieme $\{(v, e) \in Z \mid e \in E\}$. \square

Nei prossimi esempi elenchiamo alcune tipologie di grafo che rivestono una certa importanza.

DEFINIZIONE 1.4.3. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo e si assume che esista un vertice v che appartiene ad un solo lato $l = \{v, w\}$. Allora la coppia $\Gamma' = (V - \{v\}, E - \{l\})$ è ancora un grafo che viene detto **potatura** di Γ .

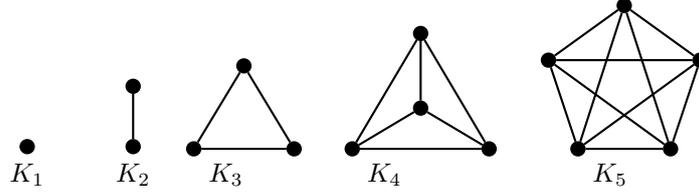
ESEMPIO 1.4.4. Un grafo finito si dice un **albero** se è connesso e se è riconducibile per successive potature ad un punto. Ad esempio il grafo



si può ricondurre per potature al solo vertice 0 e pertanto è un albero.

ESEMPIO 1.4.5. Un grafo $\Gamma = (V, E)$ si dice **completo** se ogni coppia di vertici distinti è congiunta da un lato. Equivalentemente, Γ è completo se è lo 1-scheletro di Δ^V . Per ogni

n esiste un unico grafo completo con n vertici (a meno di isomorfismo) che si denota K_n .



È chiaro che K_n ha $\binom{n}{2}$ lati e che ogni vertice di K_n ha grado $n - 1$.

TEOREMA 1.4.6. Per ogni grafo finito connesso e non vuoto $\Gamma = (V, E)$ si hanno le disuguaglianze

$$|V| - 1 \leq |E| \leq \frac{|V|^2 - |V|}{2}.$$

Inoltre vale $|V| - 1 = |E|$ se e solo se Γ è un albero, e vale $|E| = (|V|^2 - |V|)/2$ se e solo se Γ è un grafo completo.

DIMOSTRAZIONE. Siccome $(|V|^2 - |V|)/2$ è esattamente il numero di sottoinsiemi di cardinalità 2 di V , è ovvio per definizione che $|E| \leq (|V|^2 - |V|)/2$ e vale l'uguaglianza se e solo se il grafo è completo.

Dimostriamo la disuguaglianza $|E| - |V| \geq -1$ per induzione su $|E|$. Sia $l \in E$ e consideriamo il grafo $\Gamma' = (V, E - \{l\})$. Se Γ' è ancora connesso allora per l'ipotesi induttiva

$$|E| - |V| = 1 + |E - \{l\}| - |V| \geq 1 - 1.$$

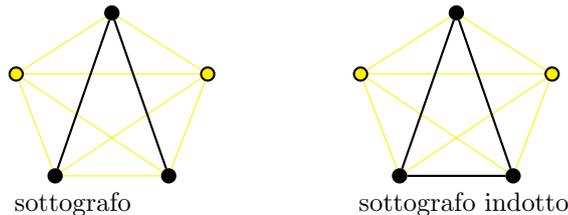
Se Γ' non è connesso, allora è unione disgiunta di due grafi connessi $(V_1, E_1), (V_2, E_2)$: se v_1, v_2 sono gli estremi di l , allora ogni vertice di V è connesso ad uno dei vertici v_i con un cammino di lati diversi da l . Basta definire i vertici di V_i come quelli congiunti a v_i con un cammino di lati diversi da l . Ma allora

$$|E| - |V| = 1 + |E_1| + |E_2| - |V_1| - |V_2| \geq 1 - 1 - 1 = -1.$$

Per concludere dimostriamo che se $|E| = |V| - 1$ allora Γ è un albero. Per $|V| = 0, 1, 2$ non c'è nulla da dimostrare e quindi possiamo supporre per induzione che $n = |V| \geq 3$ e che il risultato sia vero per ogni grafo con un numero di vertici minore ad n . Dalla formula $2|V| - 2 = 2|E| = \sum_v d_\Gamma(v)$ si deduce che esiste almeno un vertice v di grado ≤ 1 , e siccome $n > 1$ e Γ è connesso, deve esistere un lato e che congiunge v ad un altro vertice $u \neq v$, ossia $e = \{u, v\}$. Ma allora e è un semplice massimale, ed è l'unico semplice che contiene propriamente il vertice v . Questo ci consente di fare la potatura del semplice orientato (u, v) , ottenendo un nuovo grafo $\Gamma' = (V', E')$ con $|V'| = |V| - 1$ e $|E'| = |E| - 1$. Dunque $|E'| = |V'| - 1$ e per induzione possiamo ricondurre Γ' ad un solo vertice mediante una serie finita di potature. \square

Un **sottografo** di un grafo non è altro che un sottocomplesso simpliciale: equivalentemente, un sottografo di (V, E) è una coppia (W, D) , con $W \subset V, D \subset E$ e gli estremi di ciascun lato $e \in D$ appartengono a W .

Un sottografo $(W, D) \subset (V, E)$ si dice **indotto** se $D = E \cap \Delta^W$. In altri termini, un lato $e \in E$ appartiene a D se e solo se gli estremi di e appartengono a W .



DEFINIZIONE 1.4.7. Un sottografo $(W, D) \subset (V, E)$ si dice una **cricca** di (V, E) se (W, D) è un grafo finito, non vuoto e completo, ossia isomorfo a K_n per qualche $n > 0$. Chiaramente ogni cricca è determinata dai suoi vertici, ossia da un sottoinsieme non vuoto di V .

DEFINIZIONE 1.4.8. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Il **complesso delle cricche** di Γ è il complesso simpliciale astratto

$$\widehat{\Gamma} = \{\text{cricche di } \Gamma\}.$$

Siccome ogni cricca (sottografo finito completo) è univocamente determinato dai suoi vertici, ogni cricca è univocamente determinata da un sottoinsieme finito di V e possiamo pensare $\widehat{\Gamma} \subset \Delta^V$. Equivalentemente si ha

$$\widehat{\Gamma} = \{\{v_0, \dots, v_n\} \in \Delta^V \mid \forall v_i \neq v_j \text{ esiste un lato } e \in E \text{ di estremi } v_i, v_j\}.$$

ed è evidente che da tale descrizione segue che $(\widehat{\Gamma}, V)$ è un complesso simpliciale astratto.

Possiamo dare una definizione astratta di complesso di cricche nel modo seguente:

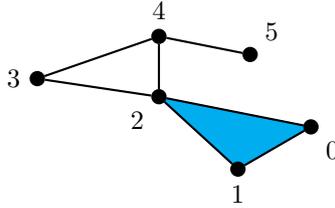
DEFINIZIONE 1.4.9. Diremo che un complesso simpliciale astratto (K, I) è un **complesso di cricche** se soddisfa la seguente condizione: dato $s = \{x_0, \dots, x_p\} \in \Delta^I$, allora $s \in K$ se e solo se $\{x_i, x_j\} \in K$ per ogni $0 \leq i < j \leq p$.

Segue dalla definizione che ogni complesso di cricche K è univocamente determinato dal suo 1-scheletro $K^{(1)}$. Possiamo riscrivere la Definizione 1.4.9 dicendo che (K, I) è di cricche se per ogni complesso simpliciale astratto (E, I) con gli stessi vertici e tale che $E^{(1)} = K^{(1)}$ si ha $E \subseteq K$; dunque i complessi di cricche sono elementi massimali nelle classi di complessi simpliciali con 1-scheletro fissato.

Proponiamo alcuni esempi per chiarire meglio il concetto.

ESEMPIO 1.4.10. Il grafo $\Gamma = (V, E)$ è completo se e solo se $\widehat{\Gamma} = \Delta^V$.

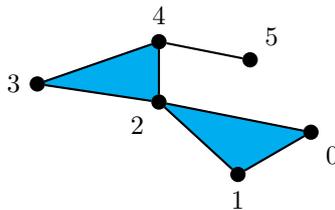
ESEMPIO 1.4.11. Il complesso simpliciale astratto



non è un complesso di cricche. Questo perché si ha:

$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \in K \text{ ma } \{2, 3, 4\} \notin K.$$

Aggiungendo $\{2, 3, 4\}$ a K otteniamo ancora un complesso simpliciale astratto



che, applicando la definizione, si verifica essere un complesso di cricche.

PROPOSIZIONE 1.4.12. *La restrizione all'1-scheletro*

$$K \mapsto K^{(1)}$$

induce una bijezione tra le classi di isomorfismo di complessi di cricche e le classi di isomorfismo di grafi semplici.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto che un complesso di cricche è univocamente determinato dal suo 1-scheletro e questo prova che $K \mapsto K^{(1)}$ è iniettiva sulle classi di isomorfismo. Viceversa, dato un grafo semplice $(E = E^{(1)}, I)$ possiamo definire un complesso di cricche (K, I) ponendo

$$K = \{\{x_0, \dots, x_p\} \in \Delta^I \mid \{x_i, x_j\} \in E \text{ per ogni } i, j\}.$$

□

Possiamo generalizzare la definizione di complesso di cricche nel modo seguente.

DEFINIZIONE 1.4.13. Diremo che un complesso simpliciale astratto (K, I) è n -determinato se soddisfa la seguente condizione: dato $s \in \Delta^I$, allora $s \in K$ se e solo se $t \in K$ per ogni $t \subset s$ con $\dim t = |t| - 1 \leq n$.

Chiaramente un complesso simpliciale astratto è completo se e solo se è 0-determinato, ed è di cricche se e solo se è 1-determinato. Per il Teorema di Helly (Corollario 1.1.13), il nervo di una famiglia di sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n è n -determinato.

Esercizi:

ESERCIZIO 6. Sia K un sottocomplesso proprio di Δ^n . Provare che se K è un complesso di cricche, allora K contiene al più due simplessi di dimensione $n - 1$.

Elementi di algebra omologica

Obiettivo di questo capitolo è introdurre e studiare i complessi omologici di gruppi abeliani, assieme ad alcune proprietà collegate, a partire dalla caratteristica di Eulero-Poincaré.

Per semplicità notazionale, salvo avviso contrario **tutti i gruppi sono considerati abeliani** e scritti in notazione additiva, con elemento neutro 0, inverso $-x$ e multipli interi $nx = x + \dots + x$ (n -volte) per $n \in \mathbb{Z}$.

Con \mathbb{Q}^n intenderemo lo spazio vettoriale numerico sul campo \mathbb{Q} dei vettori colonna ad n componenti e con $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Q}^n$ il sottogruppo dei vettori a coordinate intere. Quando ciò non creerà problemi, per semplicità di scrittura in molte occasioni spianeremo le colonne, scrivendo

$$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ con lo stesso significato di } (a_1, \dots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n.$$

Useremo i simboli \subset e \subseteq con lo stesso significato di inclusione non necessariamente propria.

2.1. Preliminari di teoria dei gruppi

Iniziamo con due semplicissimi risultati la cui evidenziatura è motivata dal fatto che entrano, *mutatis mutandis*¹, come assiomi in alcune teorie avanzate (non trattate in queste note) e molto astratte come ad esempio l'*omotopia algebrica*.

LEMMA 2.1.1 (Regola del 2 su 3). *Siano $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ due omomorfismi di gruppi. Se due qualsiasi dei tre omomorfismi f, g, gf sono isomorfismi, allora lo è anche il terzo.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso in cui f e gf sono isomorfismi, lasciando gli altri due per esercizio. Dato che gf è surgettivo, anche g è surgettivo. Se $g(b) = 0$ con $b \in B$, allora possiamo scrivere $b = f(a)$, dunque $gf(a) = 0$ e poiché gf è iniettivo ne consegue che $a = 0$ ed a maggior ragione $b = f(0) = 0$. \square

LEMMA 2.1.2 (Regola del 2 su 6). *Dato un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ f \downarrow & \searrow & \downarrow g \\ & C & \longrightarrow & D \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

di 4 gruppi e 6 omomorfismi, se f e g sono isomorfismi, allora sono isomorfismi pure i rimanenti quattro omomorfismi.

DIMOSTRAZIONE. Per la regola del 2 su 3 è sufficiente dimostrare che la freccia diagonale da B a C è un isomorfismo. Diamo un nome anche ai rimanenti omomorfismi, trascurando per esigenze grafiche la freccia da A a D :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ f \downarrow & \beta \searrow & \downarrow g \\ & C & \xrightarrow{\gamma} & D \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

¹Mutatis mutandis = cambiando quel che c'è da cambiare.

Si ha $f = \beta\alpha$ e $g = \gamma\beta$. Siccome f è surgettivo, anche β è surgettivo; siccome g è iniettivo, anche β è iniettivo. Dunque β è bigettivo e quindi un isomorfismo. \square

Se A, B sono due sottogruppi di un gruppo abeliano G , allora anche $A \cap B$ e

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

sono sottogruppi di G .

Se G, H sono due gruppi abeliani, allora anche la loro **somma diretta**

$$G \oplus H = \{(x, y) \mid x \in G, y \in H\}$$

è un gruppo abeliano, con somma $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ed elemento neutro $(0, 0)$. Ad esempio $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Si noti che esistono due inclusioni naturali $G \subset G \oplus H$, $H \subset G \oplus H$, dove ciascun $x \in G$ viene identificato con $(x, 0)$ e ciascun $y \in H$ viene identificato con $(0, y)$.

LEMMA 2.1.3. *Siano $f: G \rightarrow H$ e $s: H \rightarrow G$ due omomorfismi di gruppi tali che $fs = \text{Id}_H$, ossia $f(s(h)) = h$ per ogni $h \in H$. Allora esiste un isomorfismo $G \cong H \oplus \ker(f)$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che dalla relazione $fs = \text{Id}_H$ segue che f è surgettivo ed s è iniettivo. Sia $s(H) \subset G$ l'immagine dell'omomorfismo s , allora $s: H \rightarrow s(H)$ è un isomorfismo e basta quindi dimostrare che $G = s(H) \oplus \ker(f)$, ossia che $s(H) \cap \ker(f) = 0$ e $s(H) + \ker(f) = G$.

Se $x \in s(H) \cap \ker(f)$, allora $x = s(h)$ per qualche $h \in H$ e $f(x) = 0$. Ma allora $h = fs(h) = f(x) = 0$ ed a maggior ragione $x = 0$. Dato $x \in G$ si può scrivere $x = sf(x) + (x - sf(x))$. Si ha $sf(x) \in s(H)$ e $f(x - sf(x)) = f(x) - fsf(x) = f(x) - \text{Id}_H(f(x)) = 0$, e dunque $x - sf(x) \in \ker(f)$.

Alternativamente, si verifica direttamente che l'omomorfismo di gruppi

$$\alpha: H \oplus \ker(f) \rightarrow G, \quad \alpha(x, y) = s(x) + y,$$

è un isomorfismo con inverso

$$\beta: G \rightarrow H \oplus \ker(f), \quad \beta(x) = (f(x), x - sf(x)).$$

\square

L'insieme degli omomorfismi tra due gruppi abeliani è ancora un gruppo abeliano, dove per $f, g: G \rightarrow H$ omomorfismi si definisce $f + g: G \rightarrow H$, $(f + g)x = f(x) + g(x)$.

Siano G un gruppo abeliano, $H \subseteq G$ un sottogruppo e $\pi: G \rightarrow G/H$ la proiezione al quoziente.

1) Esiste una bijezione naturale tra i sottogruppi di G/H ed i sottogruppi di G che contengono H . Secondo tale bijezione, ad un sottogruppo $K \subseteq G/H$ si associa il sottogruppo

$$\pi^{-1}(K) = \{x \in G \mid \pi(x) \in K\}$$

mentre ad un sottogruppo $H \subseteq M \subseteq G$ si associa il quoziente $M/H \subset G/H$.

2) Se $f: G \rightarrow P$ è un omomorfismo di gruppi, allora f si fattorizza al quoziente, ossia esiste $\bar{f}: G/H \rightarrow P$ tale che $f = \bar{f}\pi$ se e solo se $H \subseteq \ker(f)$. In tal caso, l'immagine di \bar{f} è uguale all'immagine di f ed il nucleo di \bar{f} è uguale a $\ker(f)/H$. In particolare: \bar{f} è surgettiva se e solo se f è surgettiva; \bar{f} è iniettiva se e solo se $\ker(f) = H$.

3) Sia adesso $A \subseteq G$ un sottogruppo. Dati $x \in G$ e $y \in A$ si ha $\pi(x) = \pi(y)$ se e solo se $x - y \in H$, ossia se e solo se esiste $h \in H$ tale che $x = y + h$. Da ciò segue che

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = A + H = \{y + h \mid y \in A, h \in H\}$$

e di conseguenza che $\pi(A) = \frac{A + H}{H}$. È chiaro che il nucleo della restrizione $\pi: A \rightarrow G/H$ è $A \cap H$. In conclusione si ha:

- (1) $\pi: A \rightarrow G/H$ iniettiva se e solo se $A \cap H = 0$;
- (2) $\pi: A \rightarrow G/H$ surgettiva se e solo se $A + H = G$.

2.2. Gruppi abeliani finiti

In questa sottosezione riportiamo una dimostrazione del celebre fatto che ogni gruppo abeliano finito G è somma diretta di gruppi ciclici finiti. Si tratta di un risultato classico dimostrato in quasi tutti i testi di algebra. In queste note daremo una dimostrazione alternativa, diversa da tutte quelle che l'autore è riuscito a trovare in letteratura, sebbene sia molto probabile che la medesima appaia scritta da qualche parte.

Per ogni insieme finito X denotiamo con $|X|$ la sua cardinalità: dunque, per ogni gruppo finito G il suo ordine è uguale a $|G|$.

Dato un gruppo abeliano finito G ed un suo elemento $x \in G$, per il teorema di Lagrange l'ordine di x , ossia il più piccolo intero positivo $n > 0$ tale che $nx = 0$, divide l'ordine di G . Più in generale per ogni sottogruppo $H \subset G$, l'ordine di H divide l'ordine di G .

Per ogni intero $n > 0$ denotiamo con \mathbb{Z}/n il gruppo ciclico finito di ordine n e rappresentiamo i suoi elementi con gli interi $\{0, 1, \dots, n-1\}$ nella maniera evidente, ossia interpretando \mathbb{Z}/n come il gruppo delle classi di resto della divisione per n . Ogni sottogruppo di \mathbb{Z}/n è univocamente determinato dal suo ordine: più precisamente, se $G \subset \mathbb{Z}/n$ è un sottogruppo di ordine m allora $m|n$ (leggasi: m divide n), vale

$$G = \left\{ 0, \frac{n}{m}, \frac{2n}{m}, \dots, \frac{(m-1)n}{m} \right\}$$

e quindi $G \simeq \mathbb{Z}/m$. Infatti, se

$$G = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}, \quad 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1} < n,$$

allora $ma_1 = 0$ in \mathbb{Z}/n e quindi n divide ma_1 . Si può dunque scrivere $a_1 = in/m$ per qualche intero $i > 0$. Supponiamo $i > 1$, allora l'insieme degli interi α tali che $0 \leq \alpha a_1 < n$ ha cardinalità $< m$ ed esiste $b \in G$ che non è un multiplo di a_1 . Ma questo implica che $b = \alpha a_1 + r$ per qualche $r \in G$, $0 < r < a_1$, in contraddizione con la scelta di a_1 .

Notiamo che ogni omomorfismo tra gruppi ciclici finiti

$$f: \mathbb{Z}/a \rightarrow \mathbb{Z}/b, \quad a, b > 1,$$

è univocamente determinato dal valore $f(1) \in \{0, \dots, b-1\}$; il valore $f(1)$ non può essere arbitrario ma deve soddisfare la relazione $af(1) = f(a) \equiv 0 \pmod{b}$, ossia f è ben definito se e solo se b divide il prodotto $af(1)$.

In particolare se $b = ac$ con $c \in \mathbb{Z}$, allora l'omomorfismo f è ben definito se e solo se $f(1)$ è un multiplo di c .

LEMMA 2.2.1. *Siano G un gruppo abeliano finito di ordine n e $H \subset G$ un sottogruppo. Allora ogni omomorfismo $f: H \rightarrow \mathbb{Z}/n$ si estende ad un omomorfismo $G \rightarrow \mathbb{Z}/n$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il lemma per induzione su $n - |H|$. Se $G = H$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi $H \neq G$ e scegliamo un elemento $x \in G - H$. Siano m l'ordine di x e $C = \{0, x, 2x, \dots, (m-1)x\} \subset G$ il sottogruppo (ciclico) generato da x . Per il teorema di Lagrange m divide n . Se $C \cap H$ è un gruppo di ordine p allora p divide m e quindi $C \cap H = \{0, qx, 2qx, \dots, (p-1)qx\}$, dove $q = m/p$.

Dal fatto che $f: C \cap H \simeq \mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbb{Z}/n$ è ben definito segue che $f(qx) = a \frac{n}{p}$ per qualche $a = 0, \dots, p-1$ ed è quindi ben definito l'omomorfismo

$$g: H + C \rightarrow \mathbb{Z}/n, \quad g(h + ix) = f(h) + ia \frac{n}{m}.$$

Dato che $|H + C| > |H|$ la conclusione segue dall'ipotesi induttiva. \square

LEMMA 2.2.2. *Siano G un gruppo abeliano finito e $x \in G$ un elemento di ordine massimo. Allora esiste una decomposizione in somma diretta $G = C \oplus H$, dove C è il sottogruppo ciclico generato da x e dove l'ordine di ogni elemento di H divide l'ordine di x .*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con n l'ordine di G , con m l'ordine di x e con $C = \{0, x, 2x, \dots, (m-1)x\}$ il sottogruppo generato da x . Per il Lemma 2.2.1 l'omomorfismo iniettivo

$$f: C \rightarrow \mathbb{Z}/n, \quad f(ax) = a \frac{n}{m}.$$

si estende ad un omomorfismo $f: G \rightarrow \mathbb{Z}/n$, la cui immagine $f(G)$ è un sottogruppo di \mathbb{Z}/n , e quindi esiste $p > 0$ che divide n e tale che

$$f(G) = \{0, p, 2p, \dots, (q-1)p\}, \quad pq = n.$$

Siccome $f(C) \subset f(G)$ si ha $p \leq n/m$; d'altra parte se $y \in G$ è tale che $g(y) = p$, allora l'ordine di y è almeno n/p e quindi $p = n/m$ per la scelta di x . Dunque $f(G) = f(C)$, ossia $f: C \rightarrow f(G)$ è un isomorfismo. Quindi $g = f|_C^{-1} \circ f: G \rightarrow C$ è un omomorfismo di gruppi che estende l'identità su C .

Basta adesso applicare il Lemma 2.1.3 per dedurre che, denotando $H = \ker g$ si ha $G = C \oplus H$.

Per concludere dobbiamo provare che se $y \in H$ ha ordine r , allora r divide m . Sia $s \leq m$ l'ordine di $x + y$, allora $0 = sx + sy$ e siccome $sx \in C$, $sy \in H$ e $C \cap H = 0$ si ha $sx = 0$ e $sy = 0$. Da $sx = 0$ segue $m|s$ e quindi $m = s$, mentre da $sy = 0$ segue che r divide $s = m$. \square

TEOREMA 2.2.3 (Decomposizione invariante dei gruppi abeliani finiti). *Sia G un gruppo abeliano finito. Allora esiste un'unica successione di interi $n_1, \dots, n_k \geq 2$ tali che:*

- (1) $G \simeq \mathbb{Z}/n_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_k$,
- (2) n_i divide n_{i-1} per ogni $i = 2, \dots, k$.

DIMOSTRAZIONE. Sia n_1 il massimo ordine di un elemento di G , per il lemma precedente si può scrivere $G \simeq \mathbb{Z}/n_1 \oplus H$ con l'ordine di ciascun elemento di H che divide n_1 . Ripetendo il ragionamento con H al posto di G e iterando quanto basta si dimostra l'esistenza della decomposizione in somma diretta.

Dimostriamo per induzione su $|G|$ che se

$$G \simeq \mathbb{Z}/n_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_k, \quad 1 \leq n_k | n_{k-1} | \dots | n_1,$$

allora i numeri $n_i > 1$ sono univocamente determinati.

Se $G = 0$ gli n_i sono tutti uguali a 1 e non c'è nulla da dimostrare. Se $G \neq 0$ allora $n_1 > 1$ è il massimo ordine di un elemento di G .

Sia $p \geq 2$ un fattore irriducibile di n_1 e consideriamo l'omomorfismo di moltiplicazione per p :

$$f: G \rightarrow G, \quad f(x) = px.$$

Dette $f_i: \mathbb{Z}/n_i \rightarrow \mathbb{Z}/n_i$ le restrizioni di f si ha $\ker(f) = \bigoplus_i \ker(f_i)$ e

$$\ker(f_i) = 0 \text{ se } p \nmid n_i, \quad \ker(f_i) = \mathbb{Z}/p \text{ se } p | n_i.$$

Dunque $|\ker f| = p^s$, dove $k \geq s > 0$ è il numero di indici i tali che $p | n_i$. Ma allora $n_i = pm_i$ per ogni $i = 1, \dots, s$ e l'immagine di f è il sottogruppo

$$H = \mathbb{Z}/m_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_s \oplus \mathbb{Z}/n_{s+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_k,$$

e per l'ipotesi induttiva i numeri $m_1, \dots, m_s, n_{s+1}, \dots, n_k$ maggiori di 1 sono univocamente determinati dalla classe di isomorfismo di H . \square

2.3. Gruppi abeliani liberi

Sia G un gruppo abeliano. In analogia con il caso degli spazi vettoriali, diremo che un sottoinsieme $E \subset G$ **forma una base** di G se ogni $x \in G$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare finita a coefficienti interi di elementi di E . Più dettagliatamente, E forma una base di G se:

- (1) per ogni $x \in G$ esistono $e_1, \dots, e_n \in E$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tali che $x = \sum a_i e_i$;
- (2) se, per dati $e_1, \dots, e_n \in E$ elementi distinti e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ interi vale $\sum a_i e_i = 0$, allora $a_i = 0$ per ogni i .

A differenza degli spazi vettoriali non tutti i gruppi abeliani possiedono una base. Ad esempio in un gruppo finito G di ordine $n > 0$, per ciascun elemento $e \in E$ vale $ne = 0$ e quindi la precedente condizione (2) è soddisfatta solo da $E = \emptyset$.

DEFINIZIONE 2.3.1. Un gruppo abeliano che possiede una base viene detto **gruppo abeliano libero**.

Ad esempio, per ogni $n \geq 0$ il gruppo \mathbb{Z}^n è abeliano libero in quanto ogni suo elemento si scrive in maniera unica come combinazione lineare a coefficienti interi della base canonica:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente esistono altre basi di \mathbb{Z}^n oltre alla base canonica, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di \mathbb{Z}^2 .

Sia $f: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ un omomorfismo e denotiamo come al solito con e_1, \dots, e_m la base canonica di \mathbb{Z}^m . Allora

$$f \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = f\left(\sum_i a_i e_i\right) = \sum a_i f(e_i) = B \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

dove $B \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$ è la matrice che ha come vettori colonna le immagini $f(e_i)$.

LEMMA 2.3.2. *Nelle notazioni precedenti f è un isomorfismo se e solo se $n = m$ e $\det(B) = \pm 1$. In particolare \mathbb{Z}^m è isomorfo a \mathbb{Z}^n se e solo se $n = m$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $n = m$ e $\det(B) = \pm 1$ allora B è invertibile con inversa B^{-1} a coefficienti interi. Infatti se $\det(B) = \pm 1$ allora

$$B^{-1} = \frac{(\text{aggiunta classica})}{\det(B)} = \frac{(\text{matrice dei cofattori})^T}{\det(B)} \in M_{n,n}(\mathbb{Z}).$$

Questo implica che f è invertibile con inverso definito dalla matrice B^{-1} .

Viceversa se f è invertibile, il suo inverso $f^{-1}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ è a sua volta rappresentato da una matrice C tale che $BC = I$ e $CB = I$. Per ben noti fatti di algebra lineare questo implica che B, C sono matrici quadrate e $\det(B) \det(C) = \det(I) = 1$. Siccome le matrici B, C hanno coefficienti interi pure i loro determinanti sono interi e dunque $\det(B) = \det(C) = \pm 1$. \square

LEMMA 2.3.3. *Sia $f: G \rightarrow \mathbb{Z}^n$ un omomorfismo surgettivo di gruppi. Allora $G \cong \mathbb{Z}^n \oplus \ker(f)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}^n$ la base canonica e scegliamo degli elementi $x_1, \dots, x_n \in G$ tali che $f(x_i) = e_i$.

Possiamo quindi definire un omomorfismo di gruppi

$$s: \mathbb{Z}^n \rightarrow G, \quad s\left(\sum a_i e_i\right) = \sum a_i x_i,$$

che soddisfa la condizione $fs = \text{Id}_{\mathbb{Z}^n}$. La conclusione segue dal Lemma 2.1.3. \square

TEOREMA 2.3.4. *Sia H un sottogruppo di \mathbb{Z}^n . Allora H è isomorfo a \mathbb{Z}^m per qualche intero $0 \leq m \leq n$. Inoltre, se $m < n$ allora esiste un elemento $x \in \mathbb{Z}^n$ tale che $Nx \notin H$ per ogni intero $N > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per induzione su n , con il caso $n = 0$ ovvio ed il caso $n = 1$ ben noto (gli unici sottogruppi di \mathbb{Z} sono $0 \simeq \mathbb{Z}^0$ e $(p) \simeq \mathbb{Z}$).

Denotiamo con $\pi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ la proiezione sull'ultima coordinata e con $M = H \cap \ker \pi$. Siccome $M \subset \ker \pi \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$ per l'ipotesi induttiva si ha $H \simeq \mathbb{Z}^h$ con $0 \leq h \leq n-1$.

Se $\pi(H) = 0$, allora $M = H \simeq \mathbb{Z}^h$, mentre se $\pi(H) \neq 0$ allora $\pi(H) \simeq \mathbb{Z}$ in quanto sottogruppo di \mathbb{Z} . Basta adesso applicare il Lemma 2.3.3 all'omomorfismo surgettivo $\pi: H \rightarrow \pi(H) \cong \mathbb{Z}$ per dedurre che $H \cong M \oplus \pi(H) \cong \mathbb{Z}^h \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{h+1}$.

Abbiamo quindi dimostrato che $H \simeq \mathbb{Z}^m$ con $m \leq n$. Se $m < n$, segue dalla dimostrazione che sono possibili due casi: $H \cap \ker \pi \simeq \mathbb{Z}^h$ con $h < n-1$ oppure $\pi(H) = 0$.

Nel primo caso, siccome $\ker \pi = \mathbb{Z}^{n-1}$, per l'ipotesi induttiva esiste $x \in \ker \pi$ tale che $Nx \notin H$ per ogni $N > 0$. Nel secondo caso $H \subset \ker \pi$ e quindi $Ne_n \notin H$ per ogni $N > 0$, dove $e_n = (0, \dots, 1)$ è l'ultimo elemento della base canonica di \mathbb{Z}^n . \square

COROLLARIO 2.3.5. *Sia H un sottogruppo di \mathbb{Z}^n tale che il quoziente \mathbb{Z}^n/H sia un gruppo finito. Allora $H \simeq \mathbb{Z}^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n/H$ la proiezione al quoziente. Per ogni $x \in \mathbb{Z}^n$ l'elemento $p(x)$ ha ordine finito, ossia esiste $N > 0$ tale che $Np(x) = 0$. Ma questo equivale a dire $Nx \in H$ e per il Teorema 2.3.4 deve essere $H \simeq \mathbb{Z}^n$. \square

Nota: dimostreremo più avanti che vale anche il viceversa del Corollario 2.3.5, ossia che per un sottogruppo $H \subset \mathbb{Z}^n$ vale $H \simeq \mathbb{Z}^n$ se e solo se \mathbb{Z}^n/H è finito.

LEMMA 2.3.6. *Siano G un gruppo abeliano ed $E \subset G$ un suo sottoinsieme. Allora E forma una base se e solo se per ogni gruppo abeliano H ed ogni applicazione (di insiemi) $F: E \rightarrow H$ vi è un unico omomorfismo di gruppi $f: G \rightarrow H$ tale che $F(e) = f(e)$ per ogni $e \in E$.*

DIMOSTRAZIONE. Se E forma una base di G , allora ogni applicazione $F: E \rightarrow H$ a valori in un gruppo abeliano H si estende ad un omomorfismo $f: G \rightarrow H$ tramite la formula

$$(2.1) \quad f(a_1e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_1F(e_1) + \cdots + a_nF(e_n), \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad e_i \in E,$$

ed il fatto per E di essere una base implica che f è ben definito.

L'implicazione inversa, essendo meno rilevante ai fini di queste note, viene lasciata per esercizio al lettore. \square

In particolare, se G_1, G_2 sono gruppi abeliani liberi con basi E_1, E_2 , allora ogni applicazione $F: E_1 \rightarrow E_2$ si estende in maniera unica ad un omomorfismo di gruppi $f: G_1 \rightarrow G_2$, che quindi risulta determinato dalla formula di estensione lineare (2.1); è chiaro che F è iniettiva (resp.: surgettiva) se e solo se f è iniettiva (resp.: surgettiva).

In particolare, se E_1, E_2 hanno la stessa cardinalità allora i due gruppi G_1, G_2 sono isomorfi².

DEFINIZIONE 2.3.7. Dato un qualunque insieme E denotiamo con $\mathbb{Z}^{(E)}$ il gruppo abeliano di tutte le combinazioni lineari formali finite a coefficienti interi di elementi di E .

Per le usuali regole distributive ogni elemento di $\mathbb{Z}^{(E)}$ si scrive in maniera unica in forma ridotta, ossia come $a_1e_1 + \cdots + a_n e_n$, con $a_i \in \mathbb{Z}$, $e_i \in E$, $a_i \neq 0$ ed $e_i \neq e_j$ per ogni $i \neq j$ (unica a meno di permutazioni degli addendi $a_i e_i$, ovviamente):

$$\mathbb{Z}^{(E)} = \{0\} \cup \{ae \mid a \in \mathbb{Z} - \{0\}, e \in E\} \cup \{a_1e_1 + a_2e_2 \mid a_i \in \mathbb{Z} - \{0\}, e_i \in E, e_1 \neq e_2\} \cup \cdots .$$

Identificando ciascun $e \in E$ con $1e \in \mathbb{Z}^{(E)}$ è chiaro per costruzione che E è una base di $\mathbb{Z}^{(E)}$. Chiameremo $\mathbb{Z}^{(E)}$ il **gruppo abeliano libero generato da E** . Ad esempio, il gruppo \mathbb{Z}^n si identifica naturalmente con il gruppo abeliano libero generato dalla base canonica di \mathbb{Q}^n .

Esercizi:

ESERCIZIO 7 (retrazioni). Con il termine retrazione si intende un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Id_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 A & \longrightarrow & U & \longrightarrow & A \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \longrightarrow & V & \longrightarrow & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & Id_B & &
 \end{array}$$

ed in tal caso diremo che f è un retratto di g .

- (1) Dimostrare che la relazione di retrazione gode della proprietà transitiva, ossia che se f è un retratto di g e se g è un retratto di h , allora f è un retratto di h .

²È vero anche il viceversa [13, Esercizio 14.8], ma la dimostrazione non è affatto banale in quanto non è detto che un ipotetico isomorfismo $G_1 \rightarrow G_2$ sia indotto da un'applicazione $E_1 \rightarrow E_2$.

- (2) Sia f un retratto di g , dimostrare che se g è iniettiva (risp.: surgettiva), allora anche f è iniettiva (risp.: surgettiva).
- (3) Sia $e: G \rightarrow G$ un'omomorfismo di gruppi tale che $e^2 = e$ e si denoti

$$H = \{x \in G \mid e(x) = x\}.$$

Dimostrare che:

- (a) H è un sottogruppo di G che coincide con l'immagine di e ;
 (b) siano $i: H \rightarrow G$ il morfismo di inclusione e $p: G \rightarrow H$ l'unico omomorfismo tale che $ip = e$. Allora i e p sono entrambe dei retratti di e .

ESERCIZIO 8. Siano A, B, C tre sottogruppi di un gruppo abeliano G , si assuma $C \subseteq A \cap B$ in modo tale che la composizione dell'inclusione $A \subset G$ con la proiezione al quoziente $G \rightarrow G/B$ si fattorizza ad un omomorfismo di gruppi quoziente $f: \frac{A}{C} \rightarrow \frac{G}{B}$. Provare che f è surgettivo se e solo se $A + B = G$ e che f è iniettivo se e solo se $C = A \cap B$.

ESERCIZIO 9. Provare il gruppo \mathbb{Q} non è abeliano libero. Più in generale provare che se G è un gruppo abeliano libero allora l'unico omomorfismo $\mathbb{Q} \rightarrow G$ è quello banale.

ESERCIZIO 10. Provare che un gruppo finito T non è abeliano libero. Più in generale provare che se G è un gruppo abeliano libero allora l'unico omomorfismo $T \rightarrow G$ è quello banale.

ESERCIZIO 11. Siano n un intero, p un numero primo e $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/(p)$ un omomorfismo surgettivo. Provare che esistono due isomorfismi di gruppi $\alpha: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ e $\beta: \mathbb{Z}/(p) \rightarrow \mathbb{Z}/(p)$ tali che

$$\beta f \alpha(a_1, \dots, a_n) \equiv a_1 \pmod{p},$$

e dedurre che $\ker(f) \cong \mathbb{Z}^n$. (Suggerimento: dimostrare preliminarmente che esistono due isomorfismi di gruppi $\gamma: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ e $\beta: \mathbb{Z}/(p) \rightarrow \mathbb{Z}/(p)$ tali che $\beta f \gamma(1, 0, \dots, 0) \equiv 1 \pmod{p}$.)

2.4. Successioni esatte

Il periodo 1940–1955 è stato caratterizzato da un forte sviluppo della topologia algebrica: molte idee maturate in quel periodo hanno influenzato enormemente tutta quanta la matematica degli anni a seguire. Basta citare ad esempio i concetti di Categoria e Funtore e l'utilizzo grafico delle frecce fino ad allora sconosciuto (sembra che il primo ad utilizzare una freccia per indicare un morfismo sia stato Hurewicz nel 1940). Tra le nuove nozioni troviamo anche quelle di *complesso*, *successione esatta*, nonché una tecnica di dimostrazione nota come *caccia al diagramma*.

La caccia al diagramma, dove il termine caccia non è inteso in senso venatorio ma allo stesso modo di caccia al tesoro, è un utile metodo di dimostrazione usato specialmente in algebra omologica. Dato un diagramma commutativo, la caccia al diagramma sfrutta in maniera formale alcune proprietà del diagramma stesso come l'iniettività o la surgettività di alcune applicazioni o come l'esattezza di alcune successioni.

Sappiamo già cosa sono le applicazioni iniettive e surgettive; introduciamo adesso il concetto di successione esatta: fra i tanti possibili diagrammi di gruppi abeliani ed omomorfismi, particolarmente importanti sono quelli a forma di stringa, ossia i diagrammi con le applicazioni disposte in serie:

$$(2.2) \quad \cdots \rightarrow G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-2} \rightarrow \cdots$$

DEFINIZIONE 2.4.1. Un diagramma di omomorfismi di gruppi abeliani disposti in serie come in (2.2) si dice un **complesso** se $f_{n-1}f_n = 0$ per ogni n , ossia se la composizione di omomorfismi contigui è sempre nulla.

Equivalentemente il diagramma (2.2) è un complesso se per ogni n l'immagine di f_n è contenuta nel nucleo di f_{n-1} . Un complesso si dice finito o limitato se contiene solo un numero finito di spazi vettoriali ed applicazioni lineari; tuttavia è utile, in vista di future applicazioni,

considerare anche complessi infiniti o illimitati, nei quali gli indici n che compaiono nel diagramma sono tutti gli interi contenuti in un intervallo della retta reale.

Naturalmente la scelta degli indici a pedice in (2.2) è puramente decorativa e possiamo anche denotare complessi in altre forme, come ad esempio:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow G_a \xrightarrow{f_a} G_b \xrightarrow{f_b} G_c \xrightarrow{f_c} G_d \rightarrow \cdots, \\ 0 \rightarrow G_{\text{Adamo}} \rightarrow G_{\text{Caino}} \rightarrow \cdots \rightarrow G_{\text{nonno}} \rightarrow G_{\text{babbo}} \rightarrow G_{\text{me}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tuttavia, i due stili maggiormente usati in algebra sono quello *omologico*, con i numeri interi a pedice in ordine decrescente come in (2.2), e lo stile *coomologico*, con i numeri interi in apice ed in ordine crescente:

$$\cdots \rightarrow G^n \xrightarrow{f_n} G^{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G^{n+2} \rightarrow \cdots.$$

DEFINIZIONE 2.4.2. Un diagramma di omomorfismi di gruppi abeliani disposti in serie come in (2.2) si dice una **successione esatta** se per ogni n il nucleo di f_{n-1} è uguale all'immagine di f_n .

In particolare ogni successione esatta è anche un complesso, mentre il viceversa è generalmente falso: ad esempio, il diagramma

$$0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

è un complesso qualunque sia il gruppo G , mentre è una successione esatta se e solo se $G = 0$.

ESEMPIO 2.4.3. Sia $f: H \rightarrow G$ un omomorfismo di gruppi. Allora:

- (1) f iniettivo se e solo se $0 \rightarrow H \xrightarrow{f} G$ esatta;
- (2) f surgettivo se e solo se $H \xrightarrow{f} G \rightarrow 0$ esatta;
- (3) f isomorfismo se e solo se $0 \rightarrow H \xrightarrow{f} G \rightarrow 0$ esatta.

ESEMPIO 2.4.4. Supponiamo che

$$G_3 \xrightarrow{f_3} G_2 \xrightarrow{f_2} G_1 \xrightarrow{f_1} G_0$$

sia una successione esatta. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) f_3 è surgettiva;
- (2) $f_2 = 0$;
- (3) f_1 è iniettiva.

Infatti, per l'esattezza in G_1 il nucleo di f_1 è uguale all'immagine di f_2 ; in particolare f_2 è nulla se e solo se $\ker f_1 = 0$, ossia se e solo se f_1 è iniettiva. Similmente, per l'esattezza in G_2 il nucleo di f_2 è uguale all'immagine di f_3 ed in particolare $f_2 = 0$ se e solo se f_3 è surgettiva.

ESEMPIO 2.4.5. Supponiamo che

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} G_4$$

sia una successione esatta. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) f_0 è surgettiva e f_3 è iniettiva;
- (2) $f_1 = f_2 = 0$;
- (3) $G_2 = 0$.

I ragionamenti da fare sono analoghi a quelli dell'esempio precedente e lasciati per esercizio al lettore.

DEFINIZIONE 2.4.6. Una **successione esatta corta** è una successione esatta del tipo

$$(2.3) \quad 0 \rightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \rightarrow 0.$$

Dunque, la (2.3) è una successione esatta corta se e solo se f è iniettiva, g è surgettiva e $\ker g = f(U)$.

In particolare, se (2.3) è una successione esatta si ha $W = g(V)$ e $f: U \rightarrow \ker g$ è un isomorfismo.

LEMMA 2.4.7. Sia $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ una successione esatta corta di gruppi abeliani finiti. Allora l'ordine di B è uguale al prodotto degli ordini di A e C .

DIMOSTRAZIONE. Per i ben noti teoremi di omomorfismo, il morfismo g induce un isomorfismo di gruppi $B/f(A) \simeq C$ e quindi $|C| = |B/f(A)| = |B|/|f(A)| = |B|/|A|$. \square

ESEMPIO 2.4.8. Consideriamo una successione esatta

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \xrightarrow{f_3} V_4 \rightarrow 0;$$

indichiamo con $U = \ker f_3 = f_2(V_2)$ e con $i: U \rightarrow V_3$ il morfismo di inclusione. Allora la precedente successione si spezza in due successioni esatte corte

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} U \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow U \xrightarrow{i} V_3 \xrightarrow{f_3} V_4 \rightarrow 0.$$

TEOREMA 2.4.9 (Lemma dei 5). Sia dato il seguente diagramma commutativo di gruppi abeliani:

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{d_1} & E_2 & \xrightarrow{d_2} & E_3 & \xrightarrow{d_3} & E_4 & \xrightarrow{d_4} & E_5 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & H_2 & \xrightarrow{h_2} & H_3 & \xrightarrow{h_3} & H_4 & \xrightarrow{h_4} & H_5 \end{array}$$

con entrambe le righe esatte.

- (1) se α_1 è surgettiva e α_2, α_4 sono iniettive, allora β è iniettiva;
- (2) se α_5 è iniettiva e α_2, α_4 sono surgettive, allora β è surgettiva;
- (3) se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono bigettive, allora β è bigettiva.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo il primo punto; la dimostrazione del secondo è del tutto simile ed è lasciata per esercizio. Il terzo punto segue banalmente dai primi due.

Sia $x \in E_3$ tale che $\beta(x) = 0$, allora $\alpha_4 d_3(x) = h_3 \beta(x) = 0$ ed essendo per ipotesi α_4 iniettiva si ha $d_3(x) = 0$. La prima riga è esatta e quindi esiste $y \in E_2$ tale che $x = d_2(y)$; siccome $h_2 \alpha_2(y) = \beta d_2(y) = \beta(x) = 0$ e la riga inferiore è esatta, esiste $z \in H_1$ tale che $h_1(z) = \alpha_2(y)$. Adesso usiamo la surgettività di α_1 per trovare $w \in E_1$ tale che $\alpha_1(w) = z$, quindi $\alpha_2 d_1(w) = h_1 \alpha_1(w) = h_1(z) = \alpha_2(y)$. Per l'iniettività di α_2 si ha $y = d_1(w)$ e quindi $x = d_2(y) = d_2 d_1(w) = 0$. \square

Data una successione esatta corta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ di gruppi abeliani, in generale i due gruppi B e $A \oplus C$ non sono isomorfi, come ad esempio nella successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

Abbiamo però la seguente immediata conseguenza del Lemma 2.3.3.

COROLLARIO 2.4.10. Sia $0 \rightarrow K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^n \rightarrow 0$ una successione esatta corta di gruppi abeliani. Allora esiste un isomorfismo $G \cong K \oplus \mathbb{Z}^n$.

Esercizi:

ESERCIZIO 12. Si consideri il diagramma commutativo di gruppi abeliani

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & P_1 & & \\ & N_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & P_1 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & P_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & N_3 & \xrightarrow{f} & M_3 & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

in cui tutte le righe e tutte le colonne sono successioni esatte. Provare che l'applicazione f è iniettiva.

ESERCIZIO 13. Si consideri un diagramma commutativo di spazi vettoriali di dimensione finita e applicazioni lineari

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con le righe successioni esatte corte. Dimostrare che il polinomio caratteristico di β è il prodotto dei polinomi caratteristici di α e γ .

2.5. Gruppi abeliani finitamente generati

DEFINIZIONE 2.5.1. Sia G gruppo abeliano. Un elemento $x \in G$ è detto **di torsione** se esiste un intero $n > 0$ tale che $nx = 0$.

Il sottoinsieme degli elementi di torsione di G verrà indicato con $T(G)$. Il gruppo G si dice **senza torsione** se $T(G) = 0$. Il gruppo G si dice **di torsione** se $T(G) = G$.

Ad esempio, ogni gruppo finito è di torsione mentre i gruppi \mathbb{Z}^n , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} sono senza torsione.

La torsione commuta con le somme dirette e con la restrizione a sottogruppi, ossia $T(G \oplus H) = T(G) \oplus T(H)$, mentre se $H \subseteq G$ è un sottogruppo si ha $T(H) = T(G) \cap H$.

LEMMA 2.5.2. *Sia G un gruppo abeliano. Allora $T(G)$ è un sottogruppo di G ed il quoziente $G/T(G)$ è senza torsione.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $0 \in T(G)$; se $x, y \in T(G)$ esistono due interi $n, m > 0$ tali che $nx = my = 0$ e quindi $nm(x \pm y) = 0$.

Dire che il quoziente $G/T(G)$ è senza torsione equivale a dire che se $x \in G$, $n > 0$ e $nx \in T(G)$, allora $x \in T(G)$. Ma se $m(nx) = 0$ per qualche $m > 0$ allora $(nm)x = 0$ e dunque $x \in T(G)$. \square

Ogni omomorfismo di gruppi $f: G \rightarrow H$ si restringe ad un omomorfismo $f: T(G) \rightarrow T(H)$ tra i rispettivi sottogruppi di torsione. Infatti se $x \in T(G)$ e $nx = 0$ per qualche intero $n > 0$, allora $nf(x) = f(nx) = 0$ e quindi anche $f(x)$ è di torsione. In particolare se $G = T(G)$ e $T(H) = 0$ l'unico omomorfismo $f: G \rightarrow H$ è quello nullo: in altri termini, *non esistono omomorfismi non banali da un gruppo di torsione ad un gruppo senza torsione.*

Inoltre, siccome $f: T(G) \rightarrow T(H)$, passando ai quozienti il morfismo f si fattorizza ad un omomorfismo di gruppi $\bar{f}: G/T(G) \rightarrow H/T(H)$.

OSSERVAZIONE 2.5.3. Se $0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow F \rightarrow 0$ è una successione esatta corta di gruppi abeliani, la restrizione ai sottogruppi di torsione induce una successione $0 \rightarrow T(G) \rightarrow T(H) \rightarrow T(F) \rightarrow 0$ che però **non** è esatta in generale. Similmente il passaggio al quoziente induce una successione $0 \rightarrow G/T(G) \rightarrow H/T(H) \rightarrow F/T(F) \rightarrow 0$, pure questa non esatta in generale. In entrambi i casi basta considerare come controesempio la "solita" successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

Se S è un qualunque sottoinsieme di un gruppo abeliano G denoteremo con $\langle S \rangle \subset G$ il sottogruppo generato da S . Equivalentemente $\langle S \rangle$ è l'insieme di tutte le espressioni del tipo

$$n_1 s_1 + \cdots + n_k s_k, \quad k \geq 0, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad s_i \in S.$$

Per definizione, un elemento $x \in G$ non è di torsione se e solo se l'omomorfismo di gruppi

$$\mathbb{Z} \rightarrow G, \quad n \mapsto nx$$

è iniettivo, e dato che l'immagine di tale omomorfismo è $\langle x \rangle$ si ha la seguente casistica:

- (1) x è di torsione e $\langle x \rangle$ è un gruppo finito ciclico;

(2) x non è di torsione e $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$ è il gruppo ciclico infinito.

DEFINIZIONE 2.5.4. Diremo che un gruppo abeliano G è **finitamente generato** se è generato da un numero finito di elementi, ossia

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ad esempio, ogni gruppo finito è finitamente generato (basta prendere come generatori tutti gli elementi). Il gruppo \mathbb{Z}^n è senza torsione, è generato dalla “base canonica”

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

ed è quindi finitamente generato. Se G è un gruppo finitamente generato e $f: G \rightarrow H$ è un omomorfismo surgettivo di gruppi, allora anche H è finitamente generato: se x_1, \dots, x_n generano G allora $f(x_1), \dots, f(x_n)$ generano H . In particolare ogni quoziente di un gruppo finitamente generato è finitamente generato.

LEMMA 2.5.5. *Un gruppo abeliano è finito se e solo se è finitamente generato e di torsione.*

DIMOSTRAZIONE. Una implicazione è chiara, ogni gruppo finito è finitamente generato ed è di torsione. Viceversa, se un gruppo abeliano di torsione G è generato da x_1, \dots, x_n allora per ogni indice i esiste un intero $r_i > 0$ tale che $r_i x_i = 0$. Presa una qualunque combinazione lineare a coefficienti interi $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, sostituendo eventualmente ad ogni a_i il resto della divisione per r_i non è restrittivo supporre $0 \leq a_i < r_i$. Ne segue che G possiede al più $r_1 r_2 \dots r_n$ elementi distinti. \square

TEOREMA 2.5.6. *Ogni gruppo abeliano G finitamente generato senza torsione (ossia con $T(G) = 0$) è isomorfo a \mathbb{Z}^n per qualche n .*

DIMOSTRAZIONE. Sia G gruppo abeliano senza torsione e generato da una successione finita di elementi $x_1, \dots, x_m \in G$. Questo significa che l'omomorfismo di gruppi

$$\mathbb{Z}^m \rightarrow G, \quad (a_1, \dots, a_m) \mapsto \sum_{i=1}^m a_i x_i,$$

è surgettivo.

A meno di permutazioni nella successione x_1, \dots, x_m possiamo supporre che esista un intero $0 \leq n \leq m$ tale che:

(1) l'omomorfismo di gruppi

$$f: \mathbb{Z}^n \rightarrow G, \quad f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

è iniettivo.

(2) per ogni $n < j \leq m$ l'omomorfismo di gruppi

$$f_j: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow G, \quad f_j(a_1, \dots, a_n, b) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b x_j,$$

non è iniettivo.

Denotiamo con $M = f(\mathbb{Z}^n) \subset G$ l'immagine di f : è chiaro che f è un isomorfismo sull'immagine e quindi $M \simeq \mathbb{Z}^n$.

Per ogni $j = n+1, \dots, m$ scegliamo un elemento non nullo e_j del nucleo di f_j : se $e_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,n}, b_j)$ possiamo supporre $b_j \geq 0$ (altrimenti si sostituisce e_j con $-e_j$).

Dall'iniettività di f segue $b_j > 0$ e dal fatto che $f_j(e_j) = 0$ segue $b_j x_j \in M$. Siccome $x_i \in M$ per ogni $i = 1, \dots, n$, se b denota il prodotto dei b_j allora si ha $b x_i \in M$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Per ipotesi il gruppo G è senza torsione, quindi l'omomorfismo $b: G \rightarrow G$ di moltiplicazione per b è iniettivo e quindi un isomorfismo sull'immagine $b(G)$; ma $b(G)$ è il sottogruppo generato da $b x_1, \dots, b x_m$ e quindi $b(G) \subset M \simeq \mathbb{Z}^n$. Basta allora applicare il Teorema 2.3.4 per dedurre che $b(G)$ è isomorfo a \mathbb{Z}^h per qualche intero $h \leq n \leq m$. \square

Dato un qualunque gruppo abeliano G abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T(G) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \frac{G}{T(G)} \rightarrow 0$$

con i morfismo di inclusione e p proiezione al quoziente.

Siccome p è surgettivo, se G è finitamente generato allora anche $G/T(G)$ è finitamente generato. Per il Lemma 2.5.2 il gruppo $G/T(G)$ è senza torsione, per il Teorema 2.5.6 si ha $G/T(G) \cong \mathbb{Z}^n$ con l'intero n univocamente determinato per il Lemma 2.3.2.

DEFINIZIONE 2.5.7. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Se $G/T(G) \cong \mathbb{Z}^n$ il numero n viene detto **rango** di G e si scrive $n = \text{rank}(G)$.

ESEMPIO 2.5.8. Sia H un gruppo finito e $G = H \oplus \mathbb{Z}^n$. Allora G è finitamente generato e $\text{rank}(G) = n$. Infatti G è generato dagli elementi di H e dalla base canonica di \mathbb{Z}^n . Inoltre $H = T(G)$ e quindi $G/T(G) = G/H = \mathbb{Z}^n$.

TEOREMA 2.5.9. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Allora $T(G)$ è un sottogruppo finito ed esiste un isomorfismo (non canonico) $G \cong T(G) \oplus \mathbb{Z}^n$ con $n = \text{rank}(G)$.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di rango si ha $G/T(G) \cong \mathbb{Z}^n$ e quindi si ha una successione esatta

$$0 \rightarrow T(G) \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow 0$$

e basta applicare il Corollario 2.4.10 per avere un isomorfismo $G \cong T(G) \oplus \mathbb{Z}^n$.

La proiezione sul primo addendo diretto $G \rightarrow T(G)$ è surgettiva, quindi anche $T(G)$ è finitamente generato ed è quindi un gruppo finito per il Lemma 2.5.5. \square

COROLLARIO 2.5.10. Sia H un sottogruppo di un gruppo G finitamente generato è ancora finitamente generato e $\text{rank}(H) \leq \text{rank}(G)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto che esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow T(G) \rightarrow G \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^n \rightarrow 0, \quad n = \text{rank}(G).$$

Restringendo p al sottogruppo H otteniamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T(G) \cap H \rightarrow H \xrightarrow{p} p(H) \rightarrow 0,$$

e siccome $p(H) \subset \mathbb{Z}^n$ si ha $p(H) = \mathbb{Z}^m$ con $m \leq n$. Ma allora $H \cong (T(G) \cap H) \oplus \mathbb{Z}^m$ per il Corollario 2.4.10. Per concludere basta osservare che $T(G) \cap H$ è un sottogruppo del gruppo finito $T(G)$ e quindi H è finitamente generato di rango m . \square

Esercizi:

ESERCIZIO 14. Sia G gruppo abeliano. Un elemento $x \in G$ si dice divisibile se per ogni intero $n > 0$ esiste $y \in G$ tale che $ny = x$.

Dimostrare che in un gruppo abeliano finitamente generato non esistono elementi divisibili diversi da 0.

ESERCIZIO 15. Sia S un insieme di generatori di un gruppo abeliano G . Dimostrare che G è un gruppo di torsione se e solo se $S \subset T(G)$.

2.6. Additività del rango

Iniziamo con il richiamare la nozione di **conucleo** di un omomorfismo. Dato un omomorfismo di gruppi abeliani $f: G \rightarrow H$, l'immagine $f(G)$ è un sottogruppo (normale in quanto H abeliano) di H e si definisce il conucleo di f come il gruppo quoziente

$$\text{coker}(f) = \frac{H}{f(G)}.$$

Se denotiamo con $\pi: H \rightarrow \text{coker}(f)$ la proiezione al quoziente, per definizione si ha una successione esatta

$$G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\pi} \text{coker}(f) \rightarrow 0.$$

Viceversa, se $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{p} K \rightarrow 0$ è una successione esatta, per i classici teoremi di omomorfismo dei gruppi, essendo p surgettivo, si ha un isomorfismo di gruppi

$$K \cong \frac{H}{\ker p} = \frac{H}{f(G)} = \text{coker}(f).$$

Sempre dai classici teoremi di teoria dei gruppi segue la seguente proprietà universale del conucleo:

Sia $G \xrightarrow{f} H$ un omomorfismo di gruppi con proiezione sul conucleo $H \xrightarrow{\pi} \text{coker}(f)$. Per ogni omomorfismo di gruppi $q: H \rightarrow K$ tale che $qf = 0$ esiste, ed è unico, un omomorfismo di gruppi $\bar{q}: \text{coker}(f) \rightarrow K$ tale che $q = \bar{q}\pi$.

Infatti, dire che $qf = 0$ equivale a dire $f(G) \subseteq \ker q$ e questa è condizione necessaria e sufficiente affinché q si fattorizzi al quoziente $H/f(G)$. L'unicità segue dal fatto che π è surgettivo.

Consideriamo adesso un *quadrato commutativo* di gruppi abeliani, ossia un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta} & B \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array}$$

Se $x \in \ker \alpha$, allora $\gamma\beta(x) = \delta\alpha(x) = 0$ e quindi $\beta(x) \in \ker \gamma$. Dunque il quadrato commutativo definisce per restrizione un omomorfismo $\beta: \ker(\alpha) \rightarrow \ker(\gamma)$. Si noti che se $\beta: A \rightarrow B$ è iniettivo, allora anche $\beta: \ker(\alpha) \rightarrow \ker(\gamma)$ è iniettivo.

Si consideri adesso la proiezione sul conucleo $\pi: D \rightarrow \text{coker}(\gamma)$. Allora $\pi\delta\alpha = \pi\gamma\beta = 0$ poiché $\pi\gamma = 0$ e per la proprietà universale del conucleo, l'omomorfismo $\pi\delta$ si fattorizza ad un omomorfismo tra i conuclei $\bar{\delta}: \text{coker}(\alpha) \rightarrow \text{coker}(\gamma)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \ker(\alpha) & \xrightarrow{\beta} & \ker(\gamma) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \ker(\beta) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\beta} & B & \longrightarrow & \text{coker}(\beta) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \bar{\gamma} \\ \ker(\delta) & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\delta} & D & \longrightarrow & \text{coker}(\delta) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{coker}(\alpha) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \text{coker}(\gamma) & & \end{array}$$

Consideriamo adesso due quadrati commutativi con un lato in comune

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\beta} & B & \xrightarrow{\sigma} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \tau \\ C & \xrightarrow{\delta} & D & \xrightarrow{\mu} & F \end{array}$$

Le precedenti osservazioni ci forniscono gli omomorfismi

$$\ker(\alpha) \xrightarrow{\beta} \ker(\gamma) \xrightarrow{\sigma} \ker(\tau), \quad \text{coker}(\alpha) \xrightarrow{\bar{\delta}} \text{coker}(\gamma) \xrightarrow{\bar{\mu}} \text{coker}(\tau).$$

LEMMA 2.6.1 (Lemma del serpente, prima versione). *Sia dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani*

$$\begin{array}{ccccccc} N_1 & \xrightarrow{f} & M_1 & \xrightarrow{g} & P_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \\ 0 & \longrightarrow & N_2 & \xrightarrow{h} & M_2 & \xrightarrow{k} & P_2 \end{array}$$

È importante osservare che φ è diversa dall'applicazione “canonica” $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$ che farebbe commutare il diagramma qualora la freccia verticale a destra fosse g invece di $-g$. Siccome g e $-g$ hanno gli stessi nucleo e conucleo ed è immediato osservare che l'inclusione $A \subset A \oplus B$ e la proiezione $B \oplus C \rightarrow C$ inducono isomorfismi $\ker(\varphi) = \ker(gf)$, $\text{coker}(\varphi) = \text{coker}(gf)$. Applicando il lemma del serpente si ottiene quindi la successione esatta lunga della Figura 1.

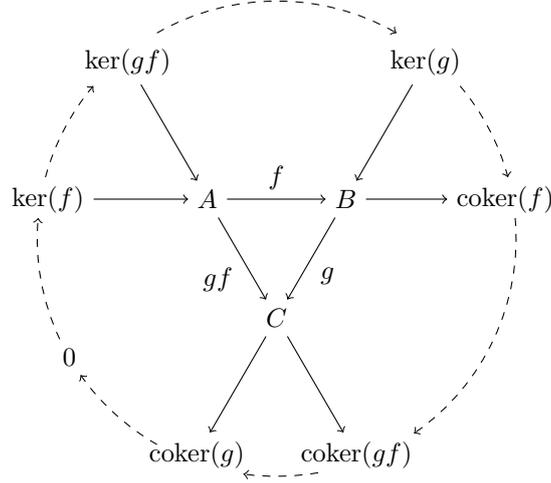


FIGURA 1. Il mulino vento, con la ruota esterna successione esatta.

LEMMA 2.6.4. *Sia*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^p \rightarrow 0$$

una successione esatta corta di gruppi abeliani. Allora $n + p = m$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 2.4.10 esiste un isomorfismo

$$\mathbb{Z}^m \cong \ker(g) \oplus \mathbb{Z}^p \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^p = \mathbb{Z}^{n+p}$$

e quindi $m = n + p$. □

Siamo adesso in grado di applicare il lemma del serpente a due importanti risultati di teoria dei gruppi.

DEFINIZIONE 2.6.5. Un gruppo G si dice **Hopfiano** se ogni omomorfismo surgettivo $G \rightarrow G$ è un isomorfismo.

Non tutti i gruppi sono Hopfiani: ad esempio l'omomorfismo

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}, \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots),$$

è surgettivo ma non iniettivo.

TEOREMA 2.6.6. *Ogni gruppo abeliano finitamente generato è Hopfiano.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo prima che i gruppi \mathbb{Z}^n sono Hopfiani. Se $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ è surgettivo, allora il suo nucleo è finitamente generato e senza torsione, quindi isomorfo a \mathbb{Z}^m per qualche m . Per il Lemma 2.6.4 si ha $n = n + m$ e quindi $\ker(g) = \mathbb{Z}^0$, ossia g è anche iniettivo.

I gruppi finiti sono Hopfiani per ovvii motivi di cardinalità.

Passiamo adesso al caso generale. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato e sia $g: G \rightarrow G$ un omomorfismo surgettivo. Se $x \in T(G)$ è di torsione allora anche $g(x)$ è di torsione e quindi g si restringe ad un omomorfismo $g_T: T(G) \rightarrow T(G)$ e si fattorizza ad un omomorfismo surgettivo $\bar{g}: G/T(G) \rightarrow G/T(G)$.

Si ha quindi un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T(G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/T(G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g_T & & \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ 0 & \longrightarrow & T(G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/T(G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il gruppo $G/T(G)$ è Hopfiano in quanto senza torsione, quindi $\ker(\bar{g}) = 0$ e per il lemma del serpente anche g_T è surgettivo. Quindi g_T è anche iniettivo e sempre per il lemma del serpente $\ker(g) = 0$. \square

OSSERVAZIONE 2.6.7. La definizione di gruppo Hopfiano si applica anche ai gruppi non abeliani. In tal caso è però falso che ogni gruppo non abeliano finitamente generato è Hopfiano.

TEOREMA 2.6.8 (Additività del rango). *Sia*

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \rightarrow 0$$

una successione esatta corta di gruppi abeliani finitamente generati. Allora

$$\text{rank}(G_1) + \text{rank}(G_3) = \text{rank}(G_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Proponiamo due distinte dimostrazioni.

Prima dimostrazione. Abbiamo già dimostrato il teorema in due casi particolari, più precisamente:

- (1) se G_1, G_2 e G_3 sono senza torsione (Lemma 2.6.4);
- (2) se G_1, G_2 sono senza torsione e G_3 è un gruppo finito (Corollario 2.3.5).

Passiamo adesso al caso generale, dove per semplicità notazionale indichiamo $T_i = T(G_i)$. Abbiamo un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_2 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_2/T_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g_T & & \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ 0 & \longrightarrow & T_3 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_3/T_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Per definizione di rango si ha $\text{rank}(G_i) = \text{rank}(G_i/T_i)$ e se denotiamo con H il nucleo di \bar{g} si ha

$$\text{rank}(H) = \text{rank}(G_2/T_2) - \text{rank}(G_3/T_3) = \text{rank}(G_2) - \text{rank}(G_3),$$

e rimane da dimostrare che G_1 ha lo stesso rango di H . Identificando G_1 con la sua immagine $f(G_1)$ si ha $G_1 = \ker(g)$, $T_1 = G_1 \cap T_2 = \ker(g) \cap T_2 = \ker(g_T)$ e per il lemma del serpente abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T_1 \rightarrow G_1 \rightarrow H \rightarrow \text{coker}(g_T) \rightarrow 0$$

che si spezza in due successioni esatte corte

$$0 \rightarrow T_1 \rightarrow G_1 \rightarrow \frac{G_1}{T_1} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \frac{G_1}{T_1} \rightarrow H \rightarrow \text{coker}(g_T) \rightarrow 0.$$

Siccome $\frac{G_1}{T_1}, H$ sono senza torsione e $\text{coker}(g_T)$ è finito si ha

$$\text{rank}(G_1) = \text{rank}(G_1/T_1) = \text{rank}(H).$$

Si noti che in generale $\text{coker}(g_T) \neq 0$ che equivale a dire $G_1/T_1 \neq H$ che equivale a dire che

$$\frac{G_1}{T_1} \rightarrow \frac{G_2}{T_2} \rightarrow \frac{G_3}{T_3} \rightarrow 0$$

non è esatta.

Seconda dimostrazione. La seconda dimostrazione che proponiamo si basa sul seguente lemma.

LEMMA 2.6.9. *Sia G un gruppo abeliano finitamente generato di rango r e sia $n = |T(G)|$ l'ordine del sottogruppo di torsione. Allora per ogni primo $p > n$ l'omomorfismo di "moltiplicazione per p "*

$$p: G \rightarrow G, \quad p(x) = px,$$

è iniettivo ed il suo conucleo è un gruppo finito di ordine p^r .

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di rango esiste una successione esatta corta $0 \rightarrow T(G) \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}^r \rightarrow 0$. Se $p > |T(G)|$ e $x \in T(G)$, allora l'ordine di x non divide p e quindi $px \neq 0$. Questo significa che l'omomorfismo $p: T(G) \rightarrow T(G)$ è iniettivo, e siccome $T(G)$ è un gruppo finito, $p: T(G) \rightarrow T(G)$ è anche surgettivo. Viceversa l'omomorfismo $p: \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}^r$ è iniettivo ma non è surgettivo: più precisamente il suo conucleo è dato dalla somma diretta di $\mathbb{Z}/(p)$ con se stesso r volte ed ha ordine p^r .

Applicando il lemma del serpente al diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T(G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathbb{Z}^r & \longrightarrow & 0 \\ & & p \downarrow \simeq & & p \downarrow & & p \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T(G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathbb{Z}^r & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

si deduce che le due frecce verticali a destra sono iniettive con il medesimo conucleo. \square

Ritorniamo alla seconda dimostrazione dell'additività del rango. Sia p un numero primo sufficientemente grande, allora le tre frecce verticali del diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & p \downarrow & & p \downarrow & & p \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sono iniettive ed il lemma del serpente fornisce una successione esatta corta di conuclei

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/(p))^{r_1} \rightarrow (\mathbb{Z}/(p))^{r_2} \rightarrow (\mathbb{Z}/(p))^{r_3} \rightarrow 0$$

dove r_i è il rango di G_i . Per il Lemma 2.4.7 si ha $p^{r_2} = p^{r_1} p^{r_3}$ che è del tutto equivalente a $r_2 = r_1 + r_3$. \square

ESEMPIO 2.6.10. Sia

$$0 \rightarrow G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} G_n \rightarrow 0$$

una successione esatta finita di gruppi abeliani finitamente generati. Allora vale la formula

$$\sum_{i=0}^n \text{rank}(G_i) = 0.$$

Denotiamo, per ogni $i = 2, \dots, n-1$ con $K_i = f_i(G_{i-1}) = \ker(f_{i+1}) \subset G_i$. Si hanno allora le successioni esatte corte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G_0 & \xrightarrow{f_1} & G_1 & \xrightarrow{f_2} & K_2 & \rightarrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & K_2 & \longrightarrow & G_2 & \xrightarrow{f_3} & K_3 & \rightarrow & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & \rightarrow & K_{n-1} & \longrightarrow & G_{n-1} & \xrightarrow{f_n} & G_n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

che per l'additività del rango inducono le uguaglianze

$$\begin{array}{l} \text{rank}(G_0) - \text{rank}(G_1) + \text{rank}(K_2) = 0 \\ -\text{rank}(K_2) + \text{rank}(G_2) - \text{rank}(K_3) = 0 \\ \dots \end{array}$$

$$(-1)^n (\text{rank}(K_{n-1}) - \text{rank}(G_{n-1}) + \text{rank}(G_n)) = 0$$

che sommate tra loro diventano $\sum_{i=0}^n \text{rank}(G_i) = 0$.

ESEMPIO 2.6.11. Si consideri un successione esatta corta di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{i} A \xrightarrow{g} B \rightarrow 0$$

con T gruppo di torsione. Allora si hanno una successione esatta

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{i} T(A) \xrightarrow{g} T(B) \rightarrow 0$$

ed un isomorfismo $A/T(A) \simeq B/T(B)$.

Infatti, identificando T con la sua immagine $f(T)$ si ha $T \subset T(A)$ e quindi T coincide con il nucleo della restrizione $g_T: T(A) \rightarrow T(B)$. Il lemma del serpente applicato al diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/T(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g_T & & \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ 0 & \longrightarrow & T(B) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B/T(B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dà un isomorfismo $\ker(\bar{g}) \simeq \operatorname{coker}(g_T)$. Ma $\ker(\bar{g})$ è senza torsione mentre $\operatorname{coker}(g_T)$ è di torsione e ciò è possibile solo se $\ker(\bar{g}) = \operatorname{coker}(g_T) = 0$, ossia solo se \bar{g} è un isomorfismo e g_T è surgettiva.

Data una matrice M a coefficienti interi, possiamo pensarla come una matrice a coefficienti razionali e considerarne il suo rango $\operatorname{rank}(M)$: ricordiamo dai corsi di algebra lineare che il esso può essere definito, tra le altre cose, come:

- (1) il massimo numero di colonne di M linearmente indipendenti su \mathbb{Q} ;
- (2) il massimo intero r tale che esiste una sottomatrice quadrata di ordine r con determinante diverso da 0.

LEMMA 2.6.12. Sia $\mathbb{Z}^m \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^n$ l'omomorfismo indotto da una matrice $M \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$ e sia r il rango di M , pensata come matrice a coefficienti razionali. Allora $\ker M \simeq \mathbb{Z}^{m-r}$ e $M(\mathbb{Z}^m) \simeq \mathbb{Z}^r$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $G = M(\mathbb{Z}^m)$ l'immagine di M . Siccome $G \subset \mathbb{Z}^n$ e $\ker M \subset \mathbb{Z}^m$, entrambi i gruppi sono finitamente generati e senza torsione, dunque $\ker M \simeq \mathbb{Z}^p$, $G \simeq \mathbb{Z}^q$ per opportuni interi p, q tali che $p + q = m$; ci basta quindi dimostrare che $q = r$.

Siano $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{Q}^m$ i vettori della base canonica. A meno di permutazioni possiamo supporre che Me_1, \dots, Me_r siano linearmente indipendenti in \mathbb{Q}^n . Siccome $r = \operatorname{rank}(M)$ si ha che $M(\mathbb{Q}^m) = \operatorname{Span}(Me_1, \dots, Me_r)$ e quindi per ogni $x \in G$ esistono $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Q}$ tali che $x = \sum_{i=1}^r a_i Me_i$. Equivalentemente, per ogni $x \in G$ esistono interi $d > 0$ (il denominatore comune degli a_i) e $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{Z}$ tali che $nx = \sum_{i=1}^r b_i Me_i$.

Ne segue che l'applicazione

$$f: \mathbb{Z}^r \rightarrow G, \quad f(b_1, \dots, b_r) = \sum b_i Me_i,$$

è iniettiva e per ogni $x \in G$ esiste un intero $n > 0$ tale che nx appartiene all'immagine di f . In conclusione il conucleo di f è di torsione e per l'additività del rango $q = r$. \square

TEOREMA 2.6.13 (Teorema del rango). Siano dati due omomorfismi di gruppi $\mathbb{Z}^m \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{N} \mathbb{Z}^p$ definiti da due matrici $M \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$, $N \in M_{p,n}(\mathbb{Z})$ e tali che $NM = 0$, ossia tali che $\operatorname{Im}(M) \subset \ker(N)$. Allora vale la formula

$$\operatorname{rank} \frac{\ker N}{\operatorname{Im}(M)} = n - \operatorname{rank}(M) - \operatorname{rank}(N).$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 2.6.12 il gruppo abeliano $\operatorname{Im}(M)$ ha rango $\operatorname{rank}(M)$ ed il gruppo abeliano $\ker(N)$ ha rango $n - \operatorname{rank}(N)$. Per concludere basta applicare il teorema di additività del rango alla successione esatta corta

$$0 \rightarrow \operatorname{Im}(M) \rightarrow \ker(N) \rightarrow \frac{\ker N}{\operatorname{Im}(M)} \rightarrow 0.$$

\square

Esercizi:

ESERCIZIO 16. Si consideri il seguente diagramma commutativo di gruppi abeliani:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & P_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N_2 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & P_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & P_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Si assuma che le colonne siano esatte e che $gf = 0$. Provare che ogni riga è un complesso e che se due righe sono esatte allora è esatta anche la terza.

2.7. Complessi di catene e omologia

Iniziamo con la definizione di complesso di catene di gruppi abeliani, dove il termine *catene* specifica una ben definita convenzione sugli indici, che sono interi ed in ordine decrescente.

DEFINIZIONE 2.7.1. Un complesso di catene di gruppi abeliani è una successione $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ di gruppi abeliani insieme a degli omomorfismi $d = d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ detti **differenziali**, tali che $d \circ d: C_n \rightarrow C_{n-2}$ risulti essere il morfismo nullo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-2} & \cdots \\
 & & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \curvearrowright & \searrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

Per semplicità parleremo semplicemente di complessi omettendo il termine catene. Si noti che nei complessi di catene il differenziale abbassa gli indici a pedice di 1. Per semplicità notazionale denoteremo spesso un complesso $\{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con (C, d) lasciando gli indici sottintesi, o più semplicemente con C , sottintendendo anche i differenziali.

DEFINIZIONE 2.7.2. Un morfismo di complessi $f: (C, d) \rightarrow (D, \delta)$ è una successione di omomorfismi di gruppi $\{f_n: C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ che commutano coi differenziali d , ossia per ogni intero n vale l'uguaglianza $f_{n-1} \circ d_n = \delta_n \circ f_n$ così da rendere commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{\delta_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Diremo inoltre che un morfismo di complessi $f: C \rightarrow D$ è un isomorfismo (risp.: iniettivo, surgettivo) se $f_n: C_n \rightarrow D_n$ è un isomorfismo (risp.: iniettivo, surgettivo) per ogni n .

DEFINIZIONE 2.7.3. Dato un complesso (C, d) possiamo definire:

- i **cicli** come gli elementi nei nuclei dei differenziali; per ogni n il nucleo $Z_n(C) := \ker(d_n) \subseteq C_n$ è detto gruppo degli n -cicli;
- i **bordi** come gli elementi immagine dei differenziali; per ogni n definiamo il gruppo degli n -bordi $B_n(C) := d_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_n$.

Osserviamo inoltre che la proprietà dei differenziali $d \circ d = 0$ implica in particolar modo l'inclusione $B_n(C) \subseteq Z_n(C)$ ed è quindi possibile considerare il quoziente tra cicli e bordi.

DEFINIZIONE 2.7.4. Definiamo l' n -esimo gruppo di omologia come il quoziente:

$$H_n(C) := \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}.$$

Diremo che il complesso C è **aciclico** se $H_n(C) = 0$ per ogni n : ciò equivale a dire che il complesso C è una successione esatta.

OSSERVAZIONE 2.7.5. Dato un complesso C , la condizione $d^2 = 0$ (ossia $d_n d_{n+1} = 0$ per ogni n) implica che per ogni n il differenziale $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ si fattorizza ad un omomorfismo

$$\frac{C_n}{B_n(C)} \xrightarrow{\bar{d}_n} Z_{n-1}(C)$$

e si verifica immediatamente che $\ker \bar{d}_n = H_n(C)$, $\text{coker } \bar{d}_n = H_{n-1}(C)$.

Una verifica diretta mostra che un morfismo di complessi $f: A \rightarrow B$ porta cicli in cicli e bordi in bordi, di conseguenza risultano ben definiti a livello di omologia gli omomorfismi $f: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$.

DEFINIZIONE 2.7.6. Un morfismo di complessi $f: A \rightarrow B$ è detto un **quasi-isomorfismo** se per ogni n le applicazioni $f_n: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ sono isomorfismi.

Ogni isomorfismo di complessi è anche un quasi-isomorfismo, mentre il viceversa è generalmente falso.

DEFINIZIONE 2.7.7. Sia $C = \{\cdots C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \cdots\}$ un complesso. Un **sottocomplesso** $D \subseteq C$ è il dato di una successione di sottogruppi $D_n \subseteq C_n$ tali che $d(D_n) \subseteq D_{n-1}$ per ogni n .

Se $D \subseteq C$ è un sottocomplesso, l'inclusione $D \rightarrow C$ è un morfismo iniettivo di complessi. Bisogna fare **attenzione** al fatto che in generale i morfismi indotti in omologia $H_n(D) \rightarrow H_n(C)$ **non sono** iniettivi in generale. Similmente se $D \rightarrow E$ è un morfismo surgettivo di complessi, allora non è detto che i morfismi $H_n(D) \rightarrow H_n(E)$ siano surgettivi (vedi Esempio 2.7.10).

ESEMPIO 2.7.8. Sia D un sottocomplesso di un complesso di catene C . Se per qualche intero n si ha che $D_i = C_i$ per $i = n-1, n, n+1$, allora l'inclusione $D \subseteq C$ induce un isomorfismo $H_n(D) \rightarrow H_n(C)$: infatti $H_n(C)$ dipende solo dal segmento $C_{n+1} \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1}$ che coincide con il corrispondente segmento del sottocomplesso D .

DEFINIZIONE 2.7.9. Un diagramma di morfismi di complessi

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

si dice una **successione esatta corta** di complessi se per ogni n si ha che

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \rightarrow 0$$

è una successione esatta corta di gruppi abeliani.

ESEMPIO 2.7.10. Possiamo interpretare il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & \text{Id} & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

come una successione esatta corta di complessi $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ concentrati nei gradi 0, 1, ossia $C_n = D_n = E_n = 0$ per ogni n eccetto $C_0 = D_0 = D_1 = E_1 = \mathbb{Z}$. Si noti che D è aciclico, mentre $H_0(C) = H_1(E) = \mathbb{Z}$; in particolare $H_0(C) \rightarrow H_0(D)$ non è iniettiva e $H_1(D) \rightarrow H_1(E)$ non è surgettiva.

ESEMPIO 2.7.11. Dato il diagramma commutativo di gruppi abeliani

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & D & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{q} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con le righe esatte e le frecce verticali surgettive, consideriamo il complesso di catene

$$C: \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{(f, \alpha)} B \oplus L \xrightarrow{\beta - g} M \rightarrow 0$$

dove $A = C_1$ si considera in grado 1 (e quindi $C_0 = B \oplus L$ in grado 0 e $C_{-1} = M$ in grado -1), $(f, \alpha)a = (f(a), \alpha(a))$ e $(\beta - g)(b, l) = \beta(b) - g(l)$. Siccome f è iniettiva e β è surgettiva, a maggior ragione (f, α) è iniettiva e $\beta - g$ è surgettiva: in altri termini $H_1(C) = H_{-1}(C) = 0$.

Vogliamo mostrare che esiste un isomorfismo naturale $H_0(C) \cong \ker \gamma$. Consideriamo l'omomorfismo

$$\varphi: C_0 = B \oplus L \rightarrow D, \quad \varphi(b, l) = p(b).$$

Se $(b, l) \in Z_0(C)$ allora $\beta(b) = g(l)$ e

$$\gamma\varphi(b, l) = \gamma p(b) = q\beta(b) = qg(l) = 0.$$

Dunque φ si restringe ad un omomorfismo di gruppi $\varphi: Z_0(C) \rightarrow \ker \gamma$ che vogliamo dimostrare essere surgettivo. Dato $d \in \ker \gamma$, esiste $b \in B$ tale che $p(b) = d$; inoltre $q\beta(b) = \gamma p(b) = \gamma(d) = 0$ e per l'esattezza della seconda riga si deduce che esiste $l \in L$ tale che $\beta(b) = g(l)$. Dunque $(b, l) \in Z_0(C)$ e $\varphi(b, l) = d$.

Per dimostrare che $H_0(C) \cong \ker \gamma$ basta dimostrare che il nucleo di $\varphi: Z_0(C) \rightarrow \ker \gamma$ è esattamente $B_0(C)$. Dato $(b, l) \in Z_0(C)$ tale che $\varphi(b, l) = p(b) = 0$, per l'esattezza della prima riga esiste $a \in A$ tale che $b = f(a)$. Ma allora $g(l) = \beta(b) = \beta f(a) = g\alpha(a)$ e per l'iniettività di g si deduce $(b, l) = (f, \alpha)a \in B_0(C)$.

TEOREMA 2.7.12. *Data una successione esatta corta di complessi*

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

sono canonicamente definiti degli omomorfismi $\partial_n: H_n(E) \rightarrow H_{n-1}(C)$ tali che si ottenga la successione esatta (infinita):

$$(2.4) \quad \cdots \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{f} H_n(D) \xrightarrow{g} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f} H_{n-1}(D) \rightarrow \cdots$$

detta in gergo successione esatta lunga di omologia.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si ottiene mediante un uso ripetuto del lemma del serpente. Per semplicità notazionale indichiamo con il medesimo simbolo d i differenziali dei tre complessi. Per ogni intero n si ha un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & D_n & \longrightarrow & E_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & D_{n-1} & \longrightarrow & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

che per il lemma del serpente ci fornisce, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, una successione esatta

$$0 \rightarrow Z_n(C) \rightarrow Z_n(D) \rightarrow Z_n(E) \rightarrow \frac{C_{n-1}}{B_{n-1}(C)} \rightarrow \frac{D_{n-1}}{B_{n-1}(D)} \rightarrow \frac{E_{n-1}}{B_{n-1}(E)} \rightarrow 0.$$

Poiché il differenziale $d: C_n \rightarrow C_{n-1}$ si fattorizza ad un omomorfismo $\bar{d}: \frac{C_n}{B_n(C)} \rightarrow Z_{n-1}(C)$ i cui nucleo e conucleo sono rispettivamente $H_n(C)$ e $H_{n-1}(C)$ (idem per i complessi D, E),

per ogni n si ha un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{C_n}{B_n(C)} & \longrightarrow & \frac{D_n}{B_n(D)} & \longrightarrow & \frac{E_n}{B_n(E)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{d} & & \downarrow \bar{d} & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n-1}(C) & \longrightarrow & Z_{n-1}(D) & \longrightarrow & Z_{n-1}(E) \end{array}$$

che per l'Osservazione 2.7.5 ed il lemma del serpente ci fornisce, per ogni n , una successione esatta

$$H_n(C) \rightarrow H_n(D) \rightarrow H_n(E) \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow H_{n-1}(D) \rightarrow H_{n-1}(E).$$

Mettendo assieme tutte queste successioni esatte si ottiene la successione esatta lunga di omologia. \square

COROLLARIO 2.7.13. *Sia*

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

una successione esatta corta di complessi. Allora f è un quasi-isomorfismo se e solo se E è aciclico.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la successione esatta lunga di omologia

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(E) \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{f} H_n(D) \xrightarrow{g} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f} H_{n-1}(D) \rightarrow \cdots$$

Se E è aciclico allora per ogni n si ha $H_{n+1}(E) = H_n(E) = 0$ e dall'esattezza della successione si deduce che $H_n(C) \xrightarrow{f} H_n(D)$ è iniettiva e surgettiva. Viceversa, se f è un quasi-isomorfismo allora per ogni n il morfismo $H_n(C) \xrightarrow{f} H_n(D)$ è surgettivo ed il morfismo $H_{n-1}(C) \xrightarrow{f} H_{n-1}(D)$ è iniettivo. L'esattezza della successione implica allora che $H_n(E) = 0$. \square

DEFINIZIONE 2.7.14. Dati due complessi di catene C, D , una **omotopia** da C a D , scritta $h: C \rightarrow D[1]$, è una successione $h = \{h_n\}$ di omomorfismi di gruppi

$$h_n: C_n \rightarrow D_{n+1}.$$

Nella definizione di omotopia non si richiede alcuna regola di commutazione con i differenziali il simbolo $[1]$ viene messo per indicare che gli omomorfismi dell'omotopia aumentano gli indici di 1.

DEFINIZIONE 2.7.15. Una **contrazione** di un complesso di catene (C, d) è una omotopia $h: C \rightarrow C[1]$ tale che $dh + hd = \text{Id}$: con ciò intendiamo che se $h = \{h_n\}$, allora per ogni n vale

$$d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n = \text{Id}_C: C_n \rightarrow C_n.$$

Un complesso che possiede una contrazione si dice **contraibile**.

LEMMA 2.7.16. *Ogni complesso contraibile è aciclico.*

DIMOSTRAZIONE. Sia C un complesso che possiede una contrazione $h: C \rightarrow C[1]$ e sia $x \in Z_n(C)$. Allora, siccome $d(x) = 0$ a maggior ragione $hd(x) = 0$ e quindi

$$x = \text{Id}(x) = dh(x) + hd(x) = dh(x) \in B_n(C).$$

\square

È generalmente falso che i complessi aciclici sono contraibili: ad esempio il complesso

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{-2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

è aciclico ma non è contraibile. Infatti $\mathbb{Z}/2$ è di torsione, mentre \mathbb{Z} è senza torsione e poiché ogni omomorfismo manda elementi di torsione in elementi di torsione, non esiste alcun omomorfismo $h: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che dh sia l'identità.

DEFINIZIONE 2.7.17. Due morfismi di complessi $f, g: (C, d) \rightarrow (D, \delta)$ si dicono **omotopi** se esiste un'omotopia $h: C \rightarrow D[1]$ tale che

$$f - g = \delta h + hd, \text{ ossia } f_n - g_n = \delta_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n \quad \forall n.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d} & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f-g & \swarrow h & \downarrow f-g & \swarrow h & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\delta} & D_n & \xrightarrow{\delta} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

In particolare un complesso C è contraibile se e solo se Id_C è omotopa all'applicazione nulla.

OSSERVAZIONE 2.7.18. L'omotopia sopra definita è una relazione di equivalenza e per indicare che f, g sono omotope scriveremo $f \sim g$. Infatti, prendendo $h = 0$ si ottiene $f \sim f$; se $f - g = \delta h + hd$ allora ponendo $k_n = -h_n$ per ogni n si ha $g - f = \delta k + kd$; se $f - g = \delta h + hd$ e $g - l = \delta k + kd$, allora $f - l = \delta(h + k) + (h + k)d$.

LEMMA 2.7.19. Due morfismi di complessi $f, g: C \rightarrow D$ omotopi, $f \sim g$, inducono gli stessi morfismi in omologia $f = g: H_n(C) \rightarrow H_n(D)$, per ogni n .

DIMOSTRAZIONE. Bisogna dimostrare che se $f \sim g$ e $x \in Z_n(C)$, allora $f(x) - g(x) \in B_n(D)$. Siccome $dx = 0$ si ha

$$f(x) - g(x) = \delta h(x) + hd(x) = \delta h(x) \in \delta(D_{n+1}) = B_n(D).$$

□

DEFINIZIONE 2.7.20. Un morfismo di complessi $f: C \rightarrow D$ si dice un'**equivalenza omotopica** se esiste un morfismo di complessi $g: D \rightarrow C$ tale che la composizione $gf: C \rightarrow C$ è omotopa all'identità Id_C e $fg: D \rightarrow D$ è omotopa all'identità Id_D :

$$C \text{ omotopo a } D \iff fg \sim \text{Id}_D, \quad gf \sim \text{Id}_C.$$

LEMMA 2.7.21. Le equivalenze omotopiche sono quasi-isomorfismi.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f: C \rightarrow D$ un'equivalenza omotopica. Per definizione esiste un morfismo di complessi $g: D \rightarrow C$ tale che $gf \sim \text{Id}_C$ e $fg \sim \text{Id}_D$. Per ogni n abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(C) & \xrightarrow{f} & H_n(D) \\ gf \downarrow & \swarrow g & \downarrow fg \\ H_n(C) & \xrightarrow{f} & H_n(D) \end{array}$$

e per il lemma precedente le due frecce verticali sono le identità. Dunque, in omologia, f e g sono isomorfismi ed uno l'inverso dell'altro. □

Esercizi:

ESERCIZIO 17. Sia $f: C \rightarrow D$ è un quasi-isomorfismo di complessi con $f_n: C_n \rightarrow D_n$ surgettivo per ogni n . Dimostrare che $f_n: Z_n(C) \rightarrow Z_n(D)$ è surgettivo per ogni n .

ESERCIZIO 18. Sia

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

una successione esatta corta di complessi. Provare che g è un quasi-isomorfismo se e solo se C è aciclico.

ESERCIZIO 19. Sia C un complesso di catene di gruppi abeliani finitamente generati. Si assuma che $2x = 0$ per ogni n ed ogni $x \in C_n$. Dimostrare che C è aciclico se e solo se è contraibile.

Omologia simpliciale

3.1. Omologia dei complessi simpliciali astratti

DEFINIZIONE 3.1.1. Siano (K, I) un complesso simpliciale astratto e $p \geq 0$ un intero. Un **p -simpleso orientato** di K è un'applicazione di insiemi $x: \{0, 1, \dots, p\} \rightarrow I$ la cui immagine appartiene a K . Denoteremo K_p l'insieme dei p -simplessi orientati di K .

Dato che ogni applicazione $x: \{0, 1, \dots, p\} \rightarrow I$ la possiamo rappresentare mediante una $(p+1)$ -upla (x_0, \dots, x_p) di elementi di I (dove x_i è l'immagine di i tramite x), possiamo scrivere

$$K_p = \{(x_0, \dots, x_p) \in I^{p+1} \mid \{x_0, \dots, x_p\} \in K\}.$$

Osserviamo che, poiché sono ammesse ripetizioni, K_p è non vuoto per ogni p , anche nel caso in cui K è un complesso finito. Ad esempio, per ogni $a \in I$ si ha $(a, \dots, a) \in K_p$ per ogni p .

Se $f: \{0, \dots, q\} \rightarrow \{0, \dots, p\}$ è una qualunque applicazione, dato $x \in K_p$ possiamo considerare la sua composizione con f ed ottenere un nuovo simpleso orientato $f^*x \in K_q$:

$$f^*x := x \circ f: \{0, 1, \dots, q\} \rightarrow I.$$

Poiché l'immagine di f^*x è contenuta nell'immagine di x , si ha che l'immagine di f^*x è un elemento di K . Equivalentemente possiamo definire f^* come

$$f^*(x_0, \dots, x_p) = (x_{f(0)}, \dots, x_{f(p)}).$$

Ad esempio, se consideriamo le applicazioni

$$\delta_i: \{0, \dots, p-1\} \rightarrow \{0, \dots, p\}, \quad 0 \leq i \leq p, \quad \delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{se } j < i, \\ j+1 & \text{se } j \geq i \end{cases},$$

allora

$$\delta_i^*(x_0, \dots, x_p) = (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p).$$

Date due applicazioni $\{0, \dots, r\} \xrightarrow{g} \{0, \dots, q\} \xrightarrow{f} \{0, \dots, p\}$, per l'associatività del prodotto di composizione si ha

$$g^*f^* = (fg)^*: K_p \rightarrow K_r.$$

DEFINIZIONE 3.1.2. Dato un complesso simpliciale astratto K ed un intero p , definiamo il gruppo $C_p(K)$ delle **p -catene** in K come il gruppo abeliano libero generato da K_p . In altri termini, una p -catena in K è una combinazione lineare finita di p -simplessi orientati a coefficienti interi:

$$C_p(K) = \left\{ \sum_{\text{finita}} a_i s_i \mid s_i \in K_p, a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Consideriamo adesso, per ogni $p > 0$, l'omomorfismo di gruppi $d_p: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ definito sui generatori del gruppo libero dalla formula $d_p x = \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_i^* x$, ossia

$$d_p(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p), \quad (x_0, \dots, x_p) \in K_p.$$

In particolare, per $p = 1, 2$:

$$d_1(x_0, x_1) = x_1 - x_0, \quad d_2(x_0, x_1, x_2) = (x_1, x_2) - (x_0, x_2) + (x_0, x_1).$$

LEMMA 3.1.3. *Nelle notazioni precedenti si ha $d_{p-1}d_p = 0$ per ogni p e quindi*

$$C(K) := \cdots \rightarrow C_4(K) \xrightarrow{d_4} C_3(K) \xrightarrow{d_3} C_2(K) \xrightarrow{d_2} C_1(K) \xrightarrow{d_1} C_0(K) \rightarrow 0$$

è un complesso di catene.

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo dimostrare $d_{p-1}d_p = 0$ per $p \geq 2$ e basta mostrare che per ogni generatore $(x_0, \dots, x_p) \in K_p$ vale $d_{p-1}d_p(x_0, \dots, x_p) = 0$. Qui bisogna fare un conto:

$$\begin{aligned} d_{p-1}d_p(x_0, \dots, x_p) &= d_{p-1} \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i d_{p-1}(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\dots, \widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_i, \dots) + \sum_{j=i+1}^p (-1)^{j-1} (\dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots) \right) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (\dots, \widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_i, \dots) + \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} (\dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots). \end{aligned}$$

Scambiando i con j nella seconda sommatoria ci accorgiamo che tutti gli addendi si cancellano con quelli della prima sommatoria e quindi il totale ha somma nulla. \square

Possiamo quindi definire l'**omologia** del complesso simpliciale astratto K come l'omologia del complesso di catene $C(K)$:

$$H_n(K) := H_n(C(K)) = \frac{Z_n(K)}{B_n(K)},$$

dove $Z_n(K) = \ker d_n$ è il sottogruppo degli n -cicli e $B_n(K) = d_{n+1}(C_{n+1}(K))$ è il sottogruppo degli n -bordi.

È chiaro che complessi simpliciali isomorfi hanno la stessa omologia. Ogni isomorfismo $f: (K, I) \xrightarrow{\cong} (H, J)$ induce in maniera naturale delle bigezioni

$$f: K_p \xrightarrow{\cong} H_p, \quad f(x_0, \dots, x_p) = (f(x_0), \dots, f(x_p)), \quad p \geq 0,$$

che inducono un isomorfismo di complessi $f: C_*(K) \xrightarrow{\cong} C_*(H)$.

ESEMPIO 3.1.4. Il complesso vuoto ha omologia banale. Infatti $K = \emptyset$ implica $K_p = \emptyset$ per ogni p e quindi $C_p(K) = 0$ per ogni p .

ESEMPIO 3.1.5. Sia $K = \Delta^{\{v\}}$ un complesso simpliciale con un solo vertice v . Allora per ogni $p \geq 0$ esiste un unico p -simpleso orientato

$$(v, v, \dots, v) \in K_p.$$

Dunque $C_p(K) = \mathbb{Z}$ per ogni p , il differenziale $d_p: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ è

$$d_p(v, \dots, v) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (v, \dots, v) = \begin{cases} (v, \dots, v) & \text{se } p \text{ pari} \\ 0 & \text{se } p \text{ dispari} \end{cases}$$

e quindi il complesso di catene diventa

$$\cdots C_4(K) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} C_3(K) = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} C_2(K) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} C_1(K) = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} C_0(K) = \mathbb{Z}$$

la cui omologia è $H_0(K) = C_0(K) = \mathbb{Z}$, $H_n(K) = 0$ per $n \neq 0$.

ESEMPIO 3.1.6. Per ogni insieme non vuoto I si ha $H_0(\Delta^I) = \mathbb{Z}$. Infatti $H_0(\Delta^I)$ è per definizione il conucleo dell'omomorfismo

$$C_1(\Delta^I) \xrightarrow{d_1} C_0(\Delta^I), \quad d_1(x, y) = x - y, \quad x, y \in I.$$

Sia $d_0: C_0(\Delta^I) \rightarrow \mathbb{Z}$ l'unico omomorfismo di gruppi tale che $d_0(x) = 1$ per ogni $x \in I$, ossia

$$d_0\left(\sum_i a_i x_i\right) = \sum a_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad x_i \in I,$$

e dimostriamo che

$$C_1(\Delta^I) \xrightarrow{d_1} C_0(\Delta^I) \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

è una successione esatta. Per ipotesi $I \neq \emptyset$, fissato un vertice $v \in I$ si ha $d_0(nv) = n$ e quindi d_0 è surgettiva. Per ogni generatore (x, y) di $C_1(\Delta^I)$ si ha $d_0d_1(x, y) = d_0(y - x) = 1 - 1 = 0$ e quindi $d_0d_1 = 0$. Viceversa sia $z = \sum a_i x_i \in \ker(d_0)$, allora $\sum a_i = 0$,

$$d_1\left(\sum a_i(v, x_i)\right) = \sum a_i x_i - \sum a_i v = \sum a_i x_i$$

e quindi $z \in B_0(\Delta^I)$. Quindi il nucleo di d_0 coincide con il sottogruppo degli 0-bordi e per i classici teoremi di isomorfismo dei gruppi $H_0(\Delta^I) = \mathbb{Z}$.

TEOREMA 3.1.7. *Se (K, I) è un complesso simpliciale astratto connesso e non vuoto, allora $H_0(K) = \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già dimostrato che $H_0(\Delta^I) = \mathbb{Z}$, basta quindi dimostrare che l'inclusione $H_0(K) = H_0(\Delta^I)$; siccome K e Δ^I hanno gli stessi vertici si ha $Z_0(K) = C_0(K) = C_0(\Delta^I) = Z_0(\Delta^I)$ e di conseguenza basta provare che $B_0(K) = B_0(\Delta^I)$. Siccome $C_1(K) \subseteq C_1(\Delta^I)$ è chiaro che $d(C_1(K)) \subseteq d(C_1(\Delta^I))$. Siccome $d(C_1(\Delta^I))$ è il sottogruppo generato dagli elementi $d(v, w) = (w) - (v)$, $v, w \in I$, basta considerare una catena finita di 1-simplessi

$$\{v, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \dots, \{u_n, w\} \in K,$$

e scrivere

$$d(v, w) = d(v, u_1) + d(u_1, u_2) + \dots + d(u_n, w) \in d(C_1(K)).$$

□

ESEMPIO 3.1.8. Per prendere pratica con i gruppi di omologia dimostriamo direttamente che il primo gruppo di omologia del segmento $K = \Delta^{\{a, b\}}$ di estremi a, b si annulla.

A tale scopo conviene eseguire un cambio di base del gruppo abeliano libero $C_1(K)$, considerando come nuova base

$$e_1 = (a, a), \quad e_2 = (b, b), \quad e_3 = (a, b) + (b, a), \quad e_4 = (a, b).$$

Abbiamo

$$de_1 = (a) - (a) = 0, \quad de_2 = (b) - (b) = 0, \quad de_3 = (b) - (a) + (a) - (b) = 0, \quad de_4 = (b) - (a),$$

e quindi $Z_1(K)$ è il sottogruppo generato da e_1, e_2, e_3 .

Per provare che $H_1(K) = 0$ basta osservare che $e_1, e_2, e_3 \in B_1(K)$. Infatti si ha

$$d(a, a, a) = (a, a) - (a, a) + (a, a) = e_1, \quad d(b, b, b) = (b, b) = e_2,$$

$$d(b, a, b) + d(b, b, b) = (a, b) - (b, b) + (b, a) + (b, b) = e_3.$$

ESEMPIO 3.1.9. Sia $K = \Delta^{\{a, b, c\}} - \{a, b, c\}$ il triangolo vuoto di vertici a, b, c e dimostriamo che $H_1(K) = \mathbb{Z}$. Come nell'esempio precedente conviene considerare la base di $C_1(K)$ data da

$$e_1 = (a, a), \quad e_2 = (b, b), \quad e_3 = (c, c), \quad e_4 = (a, b) + (b, a), \quad e_5 = (b, c) + (c, b),$$

$$e_6 = (c, a) + (a, c), \quad e_7 = (a, b), \quad e_8 = (b, c), \quad e_9 = (c, a).$$

Si verifica immediatamente che

$$Z_1(K) = \left\{ \sum_{i=1}^9 a_i e_i \mid a_7 = a_8 = a_9 \right\}.$$

Siccome ogni simpleso di K contiene al massimo due vertici, possiamo scrivere

$$C_2(K) = C_2(\Delta^{\{a, b\}}) + C_2(\Delta^{\{b, c\}}) + C_2(\Delta^{\{c, a\}})$$

e di conseguenza

$$B_1(K) = B_1(\Delta^{\{a, b\}}) + B_1(\Delta^{\{b, c\}}) + B_1(\Delta^{\{c, a\}}).$$

Per quanto visto nell'esempio precedente si ha $B_1(K) = \text{Span}(e_1, \dots, e_6)$ e quindi $Z_1(K) = B_1(K) \oplus \mathbb{Z}(e_7 + e_8 + e_9)$, ossia $H_1(K) = \mathbb{Z}$ con generatore uguale alla classe di omologia del ciclo $(a, b) + (b, c) + (c, a)$.

Esercizi:

ESERCIZIO 20. Siano K un complesso simpliciale astratto e $b(K)$ la sua suddivisione baricentrica. Per ogni p -simpleso orientato $x = (x_0, \dots, x_p) \in K_p$ ed ogni permutazione σ di $\{0, \dots, p\}$ definiamo il p -simpleso orientato $\sigma(x) \in b(K)_p$ come

$$\sigma(x) = (\{x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(p)}\}, \{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}\}, \dots, \{x_{\sigma(p-1)}, x_{\sigma(p)}\}, \{x_{\sigma(p)}\}).$$

Dimostrare che esiste un morfismo di complessi di catene $f: C(K) \rightarrow C(b(K))$ tale che

$$f(x) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \sigma(x), \quad \text{per ogni } p \geq 0, x \in K_p,$$

dove la sommatoria è fatta su tutte le permutazioni di $\{0, \dots, p\}$ e $(-1)^{\sigma}$ indica la segnatura. (Suggerimento: dimostrare che la composizione di f con gli omomorfismi $C_p(b(K)) \rightarrow C_{p-1}(b(K))$ indotti dalle applicazioni

$$\partial_i: b(K)_p \rightarrow b(K)_{p-1}, \quad \partial_i(x_0, \dots, x_p) = (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p),$$

si annulla per ogni $i > 0$.)

ESERCIZIO 21. Ai fini del calcolo dell'omologia è utile introdurre un altro complesso di catene, detto **aumentato**. A tal fine si considera l'omomorfismo $d_0: C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ che vale 1 su ciascun generatore $x \in K_0$. In altri termini

$$d_0\left(\sum_i a_i(x_i)\right) = \sum a_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad (x_i) \in K_0.$$

Dato che per ogni $(x_0, x_1) \in K_1$ si ha $d_0 d_1(x_0, x_1) = d_0(x_1 - x_0) = 1 - 1 = 0$, ha senso definire il complesso di catene aumentato

$$\overline{C(K)} := \dots \rightarrow C_4(K) \xrightarrow{d_4} C_3(K) \xrightarrow{d_3} C_2(K) \xrightarrow{d_2} C_1(K) \xrightarrow{d_1} C_0(K) \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

in cui \mathbb{Z} è posizionato in grado -1 . Si definisce poi l'omologia aumentata del complesso simpliciale K come

$$\overline{H}_n(K) := H_n(\overline{C(K)}).$$

Dimostrare che per ogni complesso simpliciale astratto non vuoto K si ha $\overline{H}_n(K) = H_n(K)$ per ogni $n > 0$ ed esiste un isomorfismo di gruppi $H_0(K) \cong \overline{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$.

3.2. Morfismi e classi di contiguità

Ogni applicazione di insiemi $f: I \rightarrow J$ induce in modo naturale un'applicazione

$$f: \Delta^I \rightarrow \Delta^J, \quad f(s) = \text{immagine del sottoinsieme } s \subseteq I \text{ tramite } f.$$

DEFINIZIONE 3.2.1. Un morfismo $f: (K, I) \rightarrow (H, J)$ di complessi simpliciali astratti è un'applicazione $f: I \rightarrow J$ tale che $f(s) \in H$ per ogni $s \in K$.

Ad esempio:

- (1) se L è un sottocomplesso simpliciale astratto di K l'inclusione $L \hookrightarrow K$ è un morfismo di complessi simpliciali.
- (2) se $v \in I$ è un qualunque vertice, allora l'applicazione costante $K \rightarrow \{v\}$ è un morfismo di complessi simpliciali.
- (3) un isomorfismo di complessi simpliciali astratti è un morfismo $f: (K, I) \rightarrow (H, J)$ in cui entrambe le applicazioni $f: I \rightarrow J$ e $f: K \rightarrow H$ sono bigettive.

I morfismi di complessi simpliciali astratti si possono comporre nel modo ovvio; composizione di isomorfismi è ancora un isomorfismo.

I complessi di catene, e quindi anche i gruppi di omologia, si comportano bene (gli esperti direbbero in modo functoriale) rispetto ai morfismi di complessi simpliciali astratti: sia $f: (K, I) \rightarrow (H, J)$ un morfismo di complessi simpliciali astratti. Allora per ogni simpleso orientato $(x_0, \dots, x_p) \in K_p$ si ha $(f(x_0), \dots, f(x_p)) \in H_p$. È dunque definito un morfismo di complessi di catene

$$f: C_*(K) \rightarrow C_*(H)$$

definito sui generatori dalla formula

$$f(x_0, \dots, x_p) = (f(x_0), \dots, f(x_p)), \quad (x_0, \dots, x_p) \in K_p, p \geq 0.$$

Che si tratti di un morfismo di complessi è quasi ovvio in quanto

$$\begin{aligned} fd(x_0, \dots, x_p) &= f\left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p)\right) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (f(x_0), \dots, \widehat{x}_i, \dots, f(x_p)) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (f(x_0), \dots, \widehat{f(x_i)}, \dots, f(x_p)) = df(x_0, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che f definisce dei morfismi in omologia $f: H_n(K) \rightarrow H_n(H)$. Appare inoltre evidente che tale costruzione commuta con i prodotti di composizione: dati due morfismi di complessi simpliciali astratti $(K, I) \xrightarrow{f} (H, J) \xrightarrow{g} (S, T)$, il morfismo indotto $gf: H_n(K) \rightarrow H_n(S)$ è uguale alla composizione di $f: H_n(K) \rightarrow H_n(H)$ e $g: H_n(H) \rightarrow H_n(S)$.

DEFINIZIONE 3.2.2. Sia (K, I) un complesso simpliciale astratto. Diremo che K è **stellato** rispetto ad un vertice $v \in I$ se vale la condizione

$$(3.1) \quad \sigma \cup \{v\} \in K \text{ per ogni } \sigma \in K.$$

Diremo che (K, I) è un **cono** se esiste almeno un vertice rispetto al quale è stellato.

Ad esempio: il complesso simpliciale vuoto non è un cono (non esiste alcun vertice); per ogni insieme non vuoto I il complesso simpliciale completo Δ^I è un cono, infatti è stellato rispetto ad ogni suo vertice.

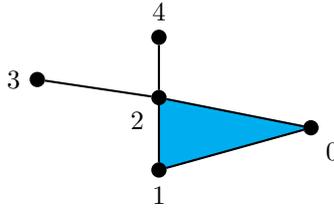


FIGURA 1. Un cono, con il vertice 2 che soddisfa (3.1).

TEOREMA 3.2.3. Sia (K, I) un complesso simpliciale che è un cono. Allora, per ogni vertice $v \in I$ il morfismo di inclusione $i: \{v\} \hookrightarrow K$ induce un isomorfismo in omologia. Di conseguenza $H_0(K) = \mathbb{Z}$ e $H_n(K) = 0$ per ogni $n > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo prima il teorema nel caso in cui (K, I) sia stellato rispetto al vertice v , mostrando che il morfismo tra complessi di catene indotto da i è una equivalenza omotopica.

Denotiamo con $f: K \rightarrow \{v\}$ l'unico morfismo possibile, ossia quello che manda tutti i vertici in v . È chiaro che fi è l'identità, mentre $if: K \rightarrow K$ manda tutti i vertici in v .

Si consideri adesso l'omotopia $h: C_*(K) \rightarrow C_*(K)[1]$ definita sui semplici orientati come

$$h(x_0, \dots, x_p) = (v, x_0, \dots, x_p) - (v, v, \dots, v).$$

L'ipotesi che K sia un cono di vertice v garantisce che h è ben definita. Si ha

$$(dh + hd)(x_0) = dh(x_0) = d(v, x_0) - d(v, v) = x_0 - v - v + v = (\text{Id} - if)(x_0)$$

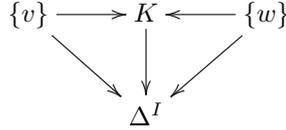
mentre per $p > 0$ vale

$$\begin{aligned} dh(x_0, \dots, x_p) &= d(v, x_0, \dots, x_p) - d(v, \dots, v) \\ &= (x_0, \dots, x_p) + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} (v, x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) - \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (v, v, \dots, v). \\ hd(x_0, \dots, x_p) &= h\left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p)\right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (v, x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) - \sum_{i=0}^p (-1)^i (v, v, \dots, v) \end{aligned}$$

e siccome $\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i + \sum_{i=0}^p (-1)^i = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} = 1$, dalla somma delle precedenti formule si ottiene

$$(dh + hd)(x_0, \dots, x_p) = (x_0, \dots, x_p) - (v, \dots, v) = (\text{Id} - if)(x_0, \dots, x_p).$$

Supponiamo adesso che $v \in I$ sia un vertice qualsiasi e scegliamo un vertice $w \in I$ rispetto al quale K risulti stellato. Siccome Δ^I è stellato rispetto ad entrambi i vertici v e w , i morfismi di inclusione



inducono in omologia dei diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} H_n(\{v\}) & \longrightarrow & H_n(K) & \xleftarrow{\cong} & H_n(\{w\}) & n \in \mathbb{Z} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & H_n(\Delta^I) & & \end{array}$$

con le tre frecce etichettate \cong isomorfismi in virtù del caso particolare precedentemente trattato. Ma allora, per la regola del 2 su 3 anche i rimanenti due morfismi sono bigettivi. \square

ESEMPIO 3.2.4. Per ogni insieme non vuoto I il complesso simpliciale astratto completo Δ^I è un cono e quindi $H_0(\Delta^I) = \mathbb{Z}$ e $H_n(\Delta^I) = 0$ per ogni $n \neq 0$.

COROLLARIO 3.2.5. Siano K un complesso simpliciale astratto e $L \subseteq K$ un sottocomplesso. Se H e K sono coni, allora il morfismo di inclusione $L \rightarrow K$ induce un isomorfismo in omologia.

DIMOSTRAZIONE. Preso un qualsiasi vertice v di L si hanno le inclusioni $\{v\} \subset L \subset K$ e per il Teorema 3.2.3 entrambe le inclusioni $\{v\} \subset L$ e $\{v\} \subset K$ inducono isomorfismi in omologia. Quindi, per la regola del 2 su 3 anche l'inclusione $L \subseteq K$ induce un isomorfismo in omologia. \square

COROLLARIO 3.2.6. Siano K un complesso simpliciale astratto e $L \subseteq K$ un sottocomplesso. Se H e K sono entrambi connessi e non vuoti, allora il morfismo di inclusione $L \rightarrow K$ induce un isomorfismo $H_0(L) \simeq H_0(K) = \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano I, J gli insiemi dei vertici di K e L rispettivamente; per definizione di sottocomplesso $J \subset I$. La stessa dimostrazione del Teorema 3.1.7 mostra che i morfismi di inclusione $K \subset \Delta^I$ e $L \subset \Delta^J$ inducono isomorfismi tra gli H_0 (che sono tutti isomorfi a \mathbb{Z}). Per concludere basta osservare che per il Corollario 3.2.5 l'inclusione di coni $\Delta^J \subset \Delta^I$ induce un isomorfismo in omologia. \square

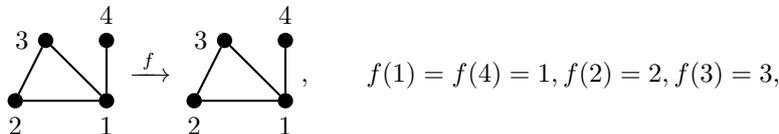
Introduciamo adesso la relazione di contiguità tra morfismi, iniziando da un caso particolare detto di contiguità diretta.

DEFINIZIONE 3.2.7. Due morfismi $f, g: (K, I) \rightarrow (H, J)$ di complessi simpliciali astratti si dicono **direttamente contigui** se per ogni $s \in K$ si ha $f(s) \cup g(s) \in H$.

Equivalentemente possiamo dire che $f, g: (K, I) \rightarrow (H, J)$ sono direttamente contigui se per ogni $s \in K$ esiste $\sigma \in H$ tale che $f(s) \subseteq \sigma, g(s) \subseteq \sigma$.

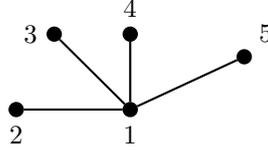
ESEMPIO 3.2.8. Un complesso simpliciale astratto K è stellato rispetto ad un vertice v se e solo se l'identità su K è direttamente contigua all'applicazione $K \rightarrow K$. che vale costantemente $\{v\}$.

ESEMPIO 3.2.9. Il morfismo



è direttamente contiguo all'identità.

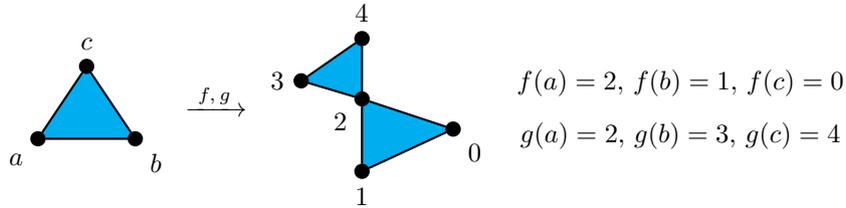
La relazione di contiguità diretta gode chiaramente delle proprietà riflessiva e simmetrica, ma non della proprietà transitiva: ad esempio se $K = \Delta^0$, H è il complesso simpliciale



e $f_i: K \rightarrow H$ è il morfismo che manda l'unico vertice di K nel vertice i di H , allora f_1 è direttamente contiguo a ogni f_i , ma f_2 ed f_3 non sono direttamente contigui tra loro.

Chiameremo **contiguità** la relazione di equivalenza generata dalla contiguità diretta: più concretamente, due morfismi di complessi simpliciali astratti $f, g: (K, I) \rightarrow (H, J)$ si dicono contigui se esiste una successione finita di morfismi di complessi $\varphi_1, \dots, \varphi_n: (K, I) \rightarrow (H, J)$ con $f = \varphi_0$, $g = \varphi_n$ e φ_i direttamente contiguo a φ_{i+1} per ogni $i = 1, \dots, n - 1$.

Ad esempio i due morfismi



sono contigui poiché entrambi direttamente contigui al morfismo costante sul vertice 2.

PROPOSIZIONE 3.2.10. *La relazione di contiguità è preservata per composizione, e cioè, dati 4 morfismi di complessi simpliciali astratti $K \xrightarrow{f,g} H \xrightarrow{p,q} L$, se f è contiguo a g e p è contiguo a q , allora pf è contiguo a qg .*

DIMOSTRAZIONE. Usando la proprietà transitiva ci possiamo ricondurre immediatamente al caso in cui f è direttamente contiguo a g e p è direttamente contiguo a q . Sia allora $s \in K$ un semplice, esistono allora due semplici $t \in H$ e $r \in L$ tali che $f(s), g(s) \subseteq t$, $p(t), q(t) \subseteq r$ da cui segue $pf(s), qg(s) \subseteq r$. \square

Una delle conseguenze della Proposizione 3.2.10 è che ha perfettamente senso considerare diagrammi commutativi a meno di contiguità.

Per terminare la sezione, dimostriamo che morfismi contigui inducono lo stesso morfismo in omologia.

TEOREMA 3.2.11. *Siano $f, g: K \rightarrow L$ due morfismi contigui di complessi simpliciali astratti. Allora per ogni intero n vale*

$$f = g: H_n(K) \rightarrow H_n(L).$$

DIMOSTRAZIONE. Non è affatto restrittivo supporre f e g direttamente contigui, ossia che $f(s) \cup g(s) \in L$ per ogni $s \in K$. In tal caso per ogni $(x_0, \dots, x_p) \in K_p$ si ha

$$(f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_p)) \in L_{p+1} \quad \forall i = 0, \dots, p,$$

e possiamo definire un'omotopia $h: C_*(K) \rightarrow C_*(L)[1]$ ponendo sui semplici orientati

$$h(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_p)).$$

Per ogni $(x_0, \dots, x_p) \in K_p$ si ha

$$\begin{aligned} dh(x_0, \dots, x_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i d(f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_p)) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq p} (-1)^{i+j} (\dots, \widehat{f(x_j)}, \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_p)) \\ &\quad - \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} (f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, \widehat{g(x_j)}, \dots), \\ hd(x_0, \dots, x_p) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j h(x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_p) \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} (f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, \widehat{g(x_j)}, \dots) \\ &\quad - \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} (\dots, \widehat{f(x_j)}, \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_p)). \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} (hd + dh)(x_0, \dots, x_p) &= \sum_{i=0}^p (f(x_0), \dots, f(x_{i-1}), g(x_i), \dots, g(x_p)) - (f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_{i+1}), \dots, g(x_p)) \\ &= (g(x_0), \dots, g(x_p)) - (f(x_0), \dots, f(x_p)) \end{aligned}$$

e quindi h è un'omotopia tra i due morfismi di complessi di catene $f, g: C_*(K) \rightarrow C_*(L)$. \square

Esercizi:

ESERCIZIO 22. Siano K e H due complessi simpliciali astratti con H di tipo cono. Dimostrare:

- (1) tutti i morfismi di complessi $K \rightarrow H$ sono contigui tra loro;
- (2) se K è connesso, allora tutti i morfismi $\Delta^0 \rightarrow K$ sono contigui tra loro;
- (3) se K è connesso, allora tutti i morfismi $H \rightarrow K$ sono contigui tra loro.

3.3. La successione esatta di Mayer-Vietoris

Dati due complessi di catene C, D possiamo considerare il complesso somma diretta

$$C \oplus D := \dots \rightarrow C_n \oplus D_n \xrightarrow{(x,y) \mapsto (dx, dy)} C_{n-1} \oplus D_{n-1} \rightarrow \dots$$

Segue immediatamente dalla definizione del differenziale in $C \oplus D$ che per ogni n si ha

$$Z_n(C \oplus D) = Z_n(C) \oplus Z_n(D), \quad B_n(C \oplus D) = B_n(C) \oplus B_n(D),$$

e quindi $H_n(C \oplus D) = H_n(C) \oplus H_n(D)$.

Ad un quadrato commutativo di morfismi di complessi di catene

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i} & D \\ \downarrow j & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{q} & F \end{array}$$

possiamo associare un diagramma in serie

$$(3.2) \quad 0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \oplus E \xrightarrow{g} F \rightarrow 0, \quad f(x) = (i(x), j(x)), \quad g(y, z) = p(y) - q(z),$$

con la proprietà che $gf = 0$.

LEMMA 3.3.1. *Nelle notazioni precedenti, se (3.2) è una successione esatta corta di complessi di catene, allora esiste una successione esatta lunga di omologia*

$$\cdots \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{f} H_n(D) \oplus H_n(E) \xrightarrow{g} H_n(F) \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow \cdots$$

Inoltre, se j è un quasi-isomorfismo, allora anche p è un quasi-isomorfismo. Se i è un quasi-isomorfismo, allora q è un quasi-isomorfismo

DIMOSTRAZIONE. La prima parte è conseguenza immediata dalla successione esatta lunga di omologia e dagli isomorfismi naturali $H_n(D \oplus E) = H_n(D) \oplus H_n(E)$.

Supponiamo adesso che $j: H_n(C) \rightarrow H_n(E)$ sia bigettiva per ogni n , a maggior ragione $H_n(C) \xrightarrow{f=(i,j)} H_n(D) \oplus H_n(E)$ è iniettiva per ogni n e dalla successione esatta lunga di omologia segue che $H_n(D) \oplus H_n(E) \xrightarrow{g} H_n(F)$ è surgettiva per ogni n . D'altra parte per ogni $(y, z) \in H_n(D) \oplus H_n(E)$ si ha

$$p(y - ij^{-1}(z)) = p(y) - pij^{-1}(z) = p(y) - qjj^{-1}(z) = p(y) - q(z) = g(y, z)$$

e questo prova che $p: H_n(D) \rightarrow H_n(F)$ è surgettiva. Se $y \in H_n(D)$ e $p(y) = 0$, allora $(y, 0) \in \ker(g) = f(H_n(C))$ ed esiste $x \in H_n(C)$ tale che $i(x) = y, j(x) = 0$. Ma j è iniettiva, quindi $x = 0$ ed a maggior ragione $y = 0$.

Abbiamo quindi provato che se j è un quasi-isomorfismo allora p è un quasi-isomorfismo. Per ovvi motivi di simmetria si ha anche che se i è un quasi-isomorfismo allora q è un quasi-isomorfismo. □

Consideriamo adesso un insieme I e due sottocomplessi simpliciali astratti $K, L \subseteq \Delta^I$ i cui rispettivi insiemi di vertici possono essere strettamente contenuti in I . Abbiamo visto che le loro unione $K \cup L$ ed intersezione $K \cap L$ sono ancora sottocomplessi simpliciali astratti.

TEOREMA 3.3.2 (Mayer-Vietoris). *Nelle notazioni precedenti esiste una successione esatta lunga di omologia*

$$\cdots \rightarrow H_n(K \cap L) \rightarrow H_n(K) \oplus H_n(L) \rightarrow H_n(K \cup L) \rightarrow H_{n-1}(K \cap L) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(K \cup L) \rightarrow 0.$$

Se l'inclusione $K \cap L \subseteq L$ induce un isomorfismo in omologia, allora anche l'inclusione $K \subseteq K \cup L$ induce un isomorfismo in omologia.

DIMOSTRAZIONE. Per un simpleso ordinato (x_0, \dots, x_p) le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) $(x_0, \dots, x_p) \in (K \cup L)_p$;
- (2) $\{x_0, \dots, x_p\} \in K \cup L$;
- (3) $\{x_0, \dots, x_p\} \in K$ oppure $\{x_0, \dots, x_p\} \in L$;
- (4) $(x_0, \dots, x_p) \in K_p$ oppure $(x_0, \dots, x_p) \in L_p$;

e quindi $(K \cup L)_p = K_p \cup L_p$. Similmente $(K \cap L)_p = K_p \cap L_p$. Da ciò segue che esiste una successione esatta corta di complessi di catene

$$(3.3) \quad 0 \rightarrow C_*(K \cap L) \xrightarrow{f} C_*(K) \oplus C_*(L) \xrightarrow{g} C_*(K \cup L) \rightarrow 0,$$

dove morfismi f e g sono definiti sui semplici orientati come

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_p) &= ((x_0, \dots, x_p), (x_0, \dots, x_p)), \\ g((x_0, \dots, x_p), (y_0, \dots, y_p)) &= (x_0, \dots, x_p) - (y_0, \dots, y_p). \end{aligned}$$

Basta adesso applicare il Lemma 3.3.1. □

COROLLARIO 3.3.3. *Nelle ipotesi del Teorema 3.3.2, se $K \cap L = \emptyset$, allora $H_n(K \cup L) = H_n(K) \oplus H_n(L)$.*

DIMOSTRAZIONE. $H_n(\emptyset) = 0$ per ogni n . □

ESEMPIO 3.3.4. Se il complesso simpliciale astratto K è formato da n vertici senza alcun simpleso di dimensione positiva, allora $H_0(K) = \mathbb{Z}^n$ e $H_p(K) = 0$ per ogni $p \neq 0$.

ESEMPIO 3.3.5 (Omologia delle sfere). Per ogni $n \geq 0$ definiamo la *sfera simpliciale* S^n come lo n -scheletro di Δ^{n+1} , ossia

$$S^n = \{s \subset \{0, 1, \dots, n+1\} \mid |s| \leq n+1\} = \Delta^{n+1} - \{0, \dots, n+1\}.$$

Il nome sfera è motivato dalla rappresentazione geometrica di S^n : infatti S^1 è un triangolo vuoto (omeomorfo alla circonferenza), S^2 è il bordo di un tetraedro (omeomorfo alla usuale sfera bidimensionale) ecc.. In maniera informale, possiamo quindi pensare ad S^n come il dato combinatorio corrispondente ad un “buco” n -dimensionale.

Si ha $S^0 = \{\{0\}, \{1\}\}$, quindi $H_0(S^0) = \mathbb{Z}^2$ e $H_i(S^0) = 0$ per ogni $i > 0$. Per $n > 0$ la sfera S^n è connessa e si ha il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 3.3.6. *Nelle notazioni precedenti, per ogni $n > 0$ vale*

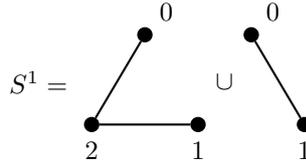
$$H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}, \quad H_i(S^n) = 0 \quad \text{per ogni } i \neq 0, n.$$

DIMOSTRAZIONE. Presentiamo una dimostrazione che utilizza la successione esatta di Mayer–Vietoris; una diversa dimostrazione sarà data in seguito.

Possiamo scrivere $S^n = K \cup L$, dove $L = \Delta^n = \Delta^{\{0, \dots, n\}}$ e $K = S^n - \{0, \dots, n\}$. Si osserva che K è stellato rispetto al vertice $\{n+1\}$. Quindi

$$H_0(L) = H_0(K) = \mathbb{Z}, \quad H_i(K) = H_i(L) = 0 \quad \text{per ogni } i > 0.$$

Inoltre $K \cap L = \Delta^n - \{0, \dots, n\} = S^{n-1}$.



Dalla successione di Mayer–Vietoris, per ogni $i, n > 0$ si ha

$$\dots \rightarrow 0 = H_{i+1}(K) \oplus H_{i+1}(L) \rightarrow H_{i+1}(S^n) \rightarrow H_i(S^{n-1}) \rightarrow H_i(K) \oplus H_i(L) = 0 \rightarrow \dots$$

da cui segue $H_{i+1}(S^n) \simeq H_i(S^{n-1})$. Per induzione su n si deduce immediatamente che $H_i(S^n) = 0$ per ogni $i > n \geq 0$. Sempre per induzione su n , per concludere la dimostrazione basta provare che $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ e $H_1(S^n) = 0$ per ogni $n > 1$.

Riguardo al caso S^1 , per Mayer–Vietoris si ha una successione esatta

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow H_0(S^0) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow H_0(K) \oplus H_0(L) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow H_0(S^1) = \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Se ne deduce che $H_1(S^1)$ è un sottogruppo di \mathbb{Z}^2 e quindi isomorfo a \mathbb{Z}^m per qualche m , che per l’additività del rango deve essere $m = 1$.

Per $n > 1$ si ha invece una successione esatta

$$0 \rightarrow H_1(S^n) \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(K) \oplus H_0(L)$$

e basta osservare che l’inclusione di complessi simpliciali connessi $S^{n-1} \subset L$ induce un isomorfismo tra i rispettivi H_0 . A maggior ragione il morfismo $H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(K) \oplus H_0(L)$ è iniettivo e quindi $H_1(S^n) = 0$. \square

3.3.1. Potatura. Come ulteriore applicazione della successione esatta di Mayer–Vietoris mostriamo che le operazioni di **potatura** di un complesso simpliciale astratto non cambiano l’omologia.

Siano M un complesso simpliciale astratto ed $s = (x_0, \dots, x_p) \in M_p$ un simpleso orientato non degenere di dimensione positiva (ossia $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$ e $p > 0$). Si assuma che $\{x_0, \dots, x_p\}$ sia un simpleso massimale (ossia non contenuto in alcun simpleso di dimensione maggiore) e che $\{x_0, \dots, x_p\}$ sia l’unico simpleso di M che contiene strettamente $\{x_1, \dots, x_p\}$.

Sia $K \subset P$ ottenuto togliendo i due semplici $\{x_0, \dots, x_p\}$ e $\{x_1, \dots, x_p\}$; è chiaro per costruzione che K è un sottocomplesso simpliciale, che viene detto una **potatura** di s da P . Più in generale, parleremo di potatura (di una successione di semplici orientati) per intendere una successione finita di operazioni come sopra, vedi Figura 2.

Consideriamo adesso il sottocomplesso $L = \Delta^{\{x_0, \dots, x_p\}}$, allora $P = K \cup L$ ed i due sottocomplessi $L, K \cap L$ sono entrambi stellati rispetto al vertice x_0 .

Per il Corollario 3.2.5 l'inclusione $K \cap L \subset L$ induce un isomorfismo in omologia, e per il teorema di Mayer-Vietoris anche l'inclusione $K \subset P$ induce un isomorfismo in omologia.

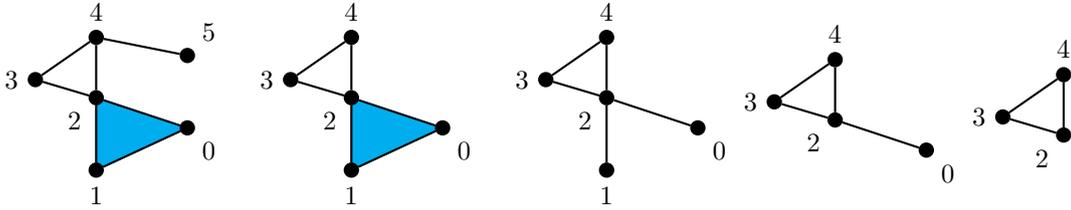


FIGURA 2. La potatura dei semplici orientati $(4, 5)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 1)$ e $(2, 0)$.

Per transitività hanno la stessa omologia pure due complessi simpliciali astratti che si ottengono come potature (di semplici distinti) di un medesimo complesso simpliciale astratto (vedi Figura 3).

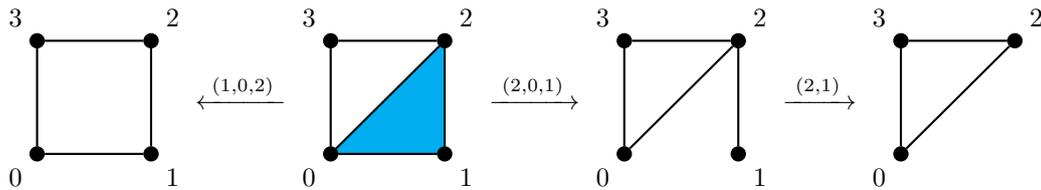
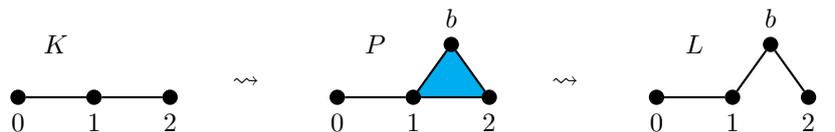


FIGURA 3. I bordi del quadrato e del triangolo si ottengono per potature da un medesimo complesso simpliciale astratto (il secondo da sinistra).

3.3.2. Baricentri aggiunti. Possiamo formalizzare la procedura di Figura 3 nel modo seguente. Siano (K, I) un complesso simpliciale astratto $\{x_0, \dots, x_p\} \in K$ un semplice massimale di dimensione p , $b \notin I$ e definiamo un nuovo complesso simpliciale

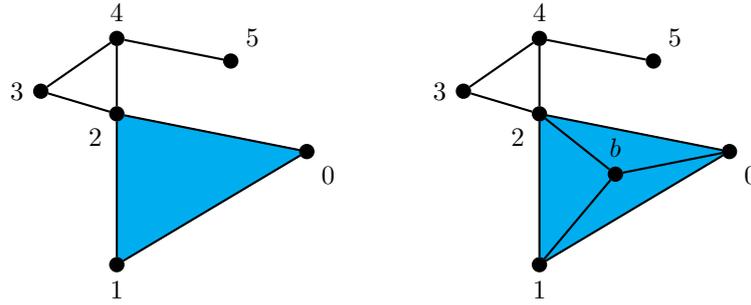
$$P = K \cup \Delta^{\{b, x_0, \dots, x_p\}} \subset \Delta^{I \cup \{v\}}.$$

È chiaro che $K \cap \Delta^{\{b, x_0, \dots, x_p\}} = \Delta^{\{x_0, \dots, x_p\}}$ e quindi, per Mayer-Vietoris si ha che l'inclusione $K \subset P$ è un isomorfismo in omologia. A questo punto possiamo eseguire su P la potatura del semplice orientato (b, x_0, \dots, x_p) ed ottenere un nuovo complesso simpliciale L che ha la stessa omologia di K :

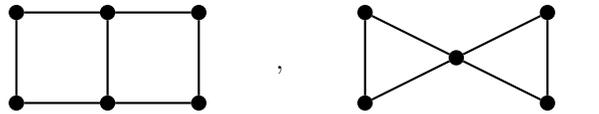


Diremo che per passare da K ad L abbiamo **aggiunto il baricentro** al semplice massimale $\{x_0, \dots, x_p\}$. In pratica, abbiamo prima eliminato da K il semplice $\{x_0, \dots, x_p\}$ e poi abbiamo aggiunto tutti i $2^{p+1} - 1$ semplici del tipo $\{b, x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\}$, con $0 \leq q \leq p$ e $0 \leq i_1 < \dots < i_q \leq p$ (Figura 4).

Esercizi:

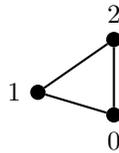
FIGURA 4. Aggiunta del baricentro al semplice massimale $\{0, 1, 2\}$.

ESERCIZIO 23. Mediante potature, aggiunte di baricentri e loro operazioni inverse, trasformare l'uno nell'altro i seguenti complessi simpliciali unidimensionali:



3.4. Il sottocomplesso delle catene ordinate

Se vogliamo calcolare esplicitamente i gruppi di omologia di un complesso simpliciale astratto ci troviamo di fronte alla difficoltà di lavorare con insiemi di semplici orientati K_p molto grandi e mai vuoti anche per p molto maggiore della dimensione del complesso simpliciale. Ad esempio, nel caso del triangolo vuoto



si ha che K_p contiene esattamente $3(2^{p+1} - 1)$ elementi (esercizio: dimostrare).

Per ovviare a tale inconveniente si possono considerare i sottocomplessi di catene ordinate. Sia (K, I) un complesso simpliciale astratto e dotiamo I di una **relazione di ordine totale** \leq . Ricordiamo che per ordine totale si intende una relazione di ordine \leq con la proprietà che per ogni x, y si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Le possibili relazioni di ordine totale su un insieme sono tante, almeno quanto le permutazioni, e per i nostri scopi ne va bene una qualunque.

A questo punto, per ogni intero $p \geq 0$ possiamo considerare il sottoinsieme dei **p -simplessi ordinati**

$$K_p^< = \{(x_0, \dots, x_p) \in K_p \mid x_0 < x_1 < \dots < x_p\},$$

ed il sottoinsieme dei **p -simplessi debolmente ordinati**

$$K_p^{\leq} = \{(x_0, \dots, x_p) \in K_p \mid x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_p\}.$$

Osserviamo con immenso piacere che se K ha dimensione n , allora $K_p^< = \emptyset$ per ogni $p > n$, e comunque che $K_p^<$ è notevolmente più piccolo di K_p : ad esempio, per il complesso simpliciale astratto Δ^n , l'insieme K_p contiene $(n+1)^{p+1}$ elementi, mentre $K_p^<$ e K_p^{\leq} ne contengono rispettivamente $\binom{n+1}{p+1}$ e $\binom{n+p+1}{p+1}$.

Un'altra osservazione che ci riempie di gioia è che se $(x_0, \dots, x_p) \in K_p^<$ (resp.: $\in K_p^{\leq}$) allora per ogni indice i si ha $(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \in K_{p-1}^<$ (resp.: $\in K_{p-1}^{\leq}$).

Indichiamo con $C_p(K, <) \subset C_p(K)$ il gruppo abeliano libero generato da $K_p^{<}$. Al variare di p questi gruppi definiscono un sottocomplesso di catene $C_*(K, <) \subseteq C_*(K)$ in quanto chiuso per il differenziale

$$d(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p).$$

Similmente, indichiamo con $C_p(K, \leq) \subset C_p(K)$ il gruppo abeliano libero generato da K_p^{\leq} . Come sopra questi gruppi definiscono un sottocomplesso di catene $C_*(K, \leq) \subseteq C_*(K)$. Vogliamo dimostrare il seguente risultato

TEOREMA 3.4.1. *Nelle notazioni precedenti le inclusioni di complessi*

$$C_*(K, <) \subseteq C_*(K, \leq) \subseteq C_*(K)$$

inducono isomorfismi in omologia:

$$H_n(C_*(K, <)) = H_n(C_*(K, \leq)) = H_n(C_*(K)) = H_n(K), \quad \text{per ogni } n.$$

La dimostrazione è abbastanza lunga e laboriosa e per chiarezza espositiva viene spezzata in una serie di lemmi.

LEMMA 3.4.2. *L'inclusione $i: C_*(K, <) \rightarrow C_*(K, \leq)$ è un'equivalenza omotopica e quindi un isomorfismo in omologia.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la proiezione $\pi: C_*(K, \leq) \rightarrow C_*(K, <)$ definita per estensione lineare delle applicazioni $\pi: K_p^{\leq} \rightarrow K_p^{<}$ definite come:

$$\pi(x_0, \dots, x_p) = \begin{cases} (x_0, \dots, x_p) & \text{se } (x_0, \dots, x_p) \in K_p^{<}, \\ 0 & \text{se } (x_0, \dots, x_p) \in K_p^{\leq} - K_p^{<}. \end{cases}$$

È chiaro che $\pi i = \text{Id}$; vogliamo dimostrare che esiste un'omotopia $h: C_*(K, \leq) \rightarrow C_*(K, \leq)[1]$ tale che $dh + hd = \text{Id} - i\pi$. Dato $(x_0, \dots, x_p) \in K_p^{<}$ definiamo $h(x_0, \dots, x_p) = 0$; se invece $(x_0, \dots, x_p) \in K_p^{\leq} - K_p^{<}$ e $0 \leq k < p$ è il più piccolo indice tale che $x_k = x_{k+1}$ definiamo

$$h(x_0, \dots, x_p) = (-1)^k (x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p).$$

Si noti che $(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p)$ contiene, nelle posizioni $k, k+1, k+2$ tre vertici consecutivi uguali. Se proviamo che

$$(dh + hd)(x_0, \dots, x_p) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x_0, \dots, x_p) \in K_p^{<}, \\ (x_0, \dots, x_p) & \text{se } (x_0, \dots, x_p) \in K_p^{\leq} - K_p^{<}, \end{cases}$$

allora l'estensione lineare di h a tutto $C_*(K, \leq)$ soddisfa la condizione $dh + hd = \text{Id} - i\pi$.

Se $(x_0, \dots, x_p) \in K_p^{<}$, si ha banalmente che $(dh + hd)(x_0, \dots, x_p) = 0$. Esaminiamo quindi il caso $(x_0, \dots, x_p) \in K_p^{\leq} - K_p^{<}$ e sia $0 \leq k < p$ il più piccolo indice tale che $x_k = x_{k+1}$. Per definizione

$$h(x_0, \dots, x_p) = (-1)^k (x_0, \dots, x_k, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p),$$

da cui

$$\begin{aligned}
dh(x_0, \dots, x_p) &= (-1)^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{k-1}, x_k, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p) \\
&\quad + (-1)^{2k} (x_0, \dots, x_p) + (-1)^{2k+1} (x_0, \dots, x_p) + (-1)^{2(k+1)} (x_0, \dots, x_p) \\
&\quad + (-1)^k \sum_{j=k+2}^p (-1)^{j+1} (x_0, \dots, x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p) \\
&= (-1)^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{k-1}, x_k, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p) \\
&\quad + (x_0, \dots, x_p) \\
&\quad + (-1)^k \sum_{j=k+2}^p (-1)^{j+1} (x_0, \dots, x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p).
\end{aligned}$$

Usando il fatto che $x_k = x_{k+1}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
d(x_0, \dots, x_p) &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p) + \sum_{j=k+2}^p (-1)^j (x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p), \\
hd(x_0, \dots, x_p) &= (-1)^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{k-1}, x_k, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p) \\
&\quad + (-1)^k \sum_{j=k+2}^p (-1)^j (x_0, \dots, x_k, x_k, x_{k+1}, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p).
\end{aligned}$$

e sommando otteniamo

$$(dh + hd)(x_0, \dots, x_p) = (x_0, \dots, x_p).$$

□

La dimostrazione che l'inclusione $i: C_*(K, \leq) \hookrightarrow C_*(K)$ induce un isomorfismo in omologia è simile ma decisamente più complicata. In realtà, con una dimostrazione ancora più difficile si potrebbe anche dimostrare che i è una equivalenza omotopica (ma noi non lo faremo!).

Useremo il seguente approccio: si introduce una successione numerabile di sottocomplessi

$$C_*(K, \leq) = C^0 \subset C^1 \subset \dots \subset C_*(K)$$

tali che:

- (1) le inclusioni $C^k \subset C^{k+1}$ inducono isomorfismi in omologia;
- (2) $H_n(C^k) = H_n(C_*(K))$ per ogni $k > n$.

Le precedenti proprietà implicano che per ogni $n \geq 0$ si ha

$$H_n(C_*(K, \leq)) = H_n(C^0) = H_n(C^1) = \dots = H_n(C^{n+1}) = H_n(C_*(K)),$$

e quindi che l'inclusione $C_*(K, \leq) \subseteq C_*(K)$ è un isomorfismo in omologia.

Faremo uso del seguente lemma di algebra omologica.

LEMMA 3.4.3. *Siano C un complesso di catene e $D \subset C$ un sottocomplesso. Se esiste una omotopia $h: C \rightarrow C[1]$ tale che:*

- (1) $h(D) \subset D$;
- (2) *l'immagine di $f := \text{Id}_C - dh - hd: C \rightarrow C$ è contenuta in D ;*

allora l'inclusione $D \subset C$ è una equivalenza omotopica e quindi induce un isomorfismo in omologia: $H_n(D) = H_n(C)$ per ogni n .

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo dimostrando che $f: C \rightarrow D$ è un morfismo di complessi: siccome $d^2 = 0$ si ha

$$df = d(\text{Id} - dh - hd) = d - d^2h - dh d = d - dh d = d - dh d - hd^2 = (\text{Id} - dh - hd)d = fd.$$

Se denotiamo con $i: D \rightarrow C$ l'inclusione e con k la restrizione di h a D si ha

$$\text{Id}_D - fi = kd + dk, \quad \text{Id}_C - if = hd + dh.$$

□

Torniamo al nostro complesso simpliciale astratto (K, I) dotato di un ordinamento totale \leq su I .

Per ogni coppia di interi non negativi $p, k \geq 0$ consideriamo il sottoinsieme di semplici orientati:

$$K_p^k = \{(x_0, \dots, x_p) \in K_p \mid x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{p-k}\}.$$

Osserviamo che:

- (1) $K_p^k = K_p$ per ogni $k \geq p$;
- (2) $K_p^0 = \{(x_0, \dots, x_p) \in K_p \mid x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_p\} = K_p^{\leq}$.
- (3) se $(x_0, \dots, x_p) \in K_p^k$, allora $(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) \in K_{p-1}^k$ per ogni $i = 0, \dots, p$.

Definiamo quindi C^k come il sottocomplesso di $C_*(K)$ tale che $C_p^k \subset C_p(K)$ è il sottogruppo generato da K_p^k . Siccome $C_p^k = C_p(K)$ per ogni $k \geq p$ si ha che l'inclusione $C^k \subset C(K)$ induce un isomorfismo $H_p(C^k) = H_p(C_*(K))$ per ogni $k > p$.

LEMMA 3.4.4. *Per ogni $k \geq 0$ fissato l'inclusione di complessi di catene $C^k \subset C^{k+1}$ è un quasi-isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'omotopia $h: C^{k+1} \rightarrow C^{k+1}[1]$ definita sui generatori, ossia sui semplici $(x_0, \dots, x_p) \in K_p^{k+1}$ con $x_0 \leq \dots \leq x_{p-k-1}$, come

$$h(x_0, \dots, x_p) = 0 \quad \text{se } k > p,$$

mentre se $k \leq p$ poniamo

$$h(x_0, \dots, x_p) = (-1)^j (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{p-k}, x_j, \dots, x_p)$$

dove $0 \leq j \leq p - k$ è il più piccolo indice tale che $x_{p-k} \leq x_j$. L'omotopia h risulta ben definita in quanto

$$x_0 \leq \dots \leq x_{j-1} \leq x_{p-k} \leq x_j \leq \dots \leq x_{p-k-1}.$$

Si osserva che $h(C_p^k) \subset C_{p+1}^k$ e quindi, per il Lemma 3.4.3 basta dimostrare che

$$(3.4) \quad (dh + hd - \text{Id})(C_p^{k+1}) \subseteq C_p^k$$

per ogni p .

Se $k \geq p$ l'inclusione (3.4) è ovvia in quanto $C_p^k = C_p^{k+1}$; supponiamo quindi $k < p$.

Fissiamo $(x_0, \dots, x_p) \in K_p^{k+1}$ (quindi $x_0 \leq \dots \leq x_{p-k-1}$) e sia $0 \leq j \leq p - k$ è il più piccolo indice tale che $x_{p-k} \leq x_j$. Si ha

$$h(x_0, \dots, x_p) = (-1)^j (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{p-k}, x_j, \dots, x_p),$$

$$(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{p-k}, x_j, \dots, \widehat{x}_h, \dots, x_p) \in K_p^k \quad \text{per ogni } h \geq p - k,$$

e quindi

$$\begin{aligned} dh(x_0, \dots, x_p) &= (-1)^j d(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{p-k}, x_j, \dots, x_p) \\ &= (-1)^j \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^l (x_0, \dots, \widehat{x}_l, \dots, x_{j-1}, x_{p-k}, x_j, \dots, x_p) + (-1)^{2j} (x_0, \dots, x_p) \\ &\quad + (-1)^j \sum_{l=j}^{p-k-1} (-1)^{l+1} (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{p-k}, x_j, \dots, \widehat{x}_l, \dots, x_{p-k-1}, x_{p-k}, \dots, x_p) + y, \end{aligned}$$

per un opportuno elemento $y \in C_p^k$. Similmente:

$$d(x_0, \dots, x_p) = \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^l (x_0, \dots, \widehat{x}_l, \dots, x_{j-1}, \dots, x_p) \\ + \sum_{l=j}^{p-k-1} (-1)^l (x_0, \dots, x_j, \dots, \widehat{x}_l, \dots, x_{p-k-1}, \dots, x_p) + z,$$

con $z \in C_{p-1}^k$, da cui

$$hd(x_0, \dots, x_p) = (-1)^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^l (x_0, \dots, \widehat{x}_l, \dots, x_{j-1}, x_{p-k}, x_j, \dots, x_p) \\ + (-1)^j \sum_{l=j}^{p-k-1} (-1)^l (x_0, \dots, x_j, x_{p-k}, x_j, \dots, \widehat{x}_l, \dots, x_{p-k-1}, \dots, x_p) + h(z).$$

Sommando si ottiene

$$(dh + hd)(x_0, \dots, x_p) = (x_0, \dots, x_p) + y + h(z).$$

□

Adesso il Teorema 3.4.1 segue immediatamente dai lemmi precedenti e dal fatto che $H_p(C^k) = H_p(C_*(K))$ per ogni $k > p$.

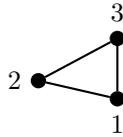
COROLLARIO 3.4.5. *Per un complesso simpliciale astratto K si ha $H_n(K) = 0$ per ogni $n > \dim K$.*

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo un ordinamento totale \leq dei vertici, allora $K_n^< = \emptyset$ per ogni $n > \dim K$ e quindi $C_n(K, <) = 0$ per ogni $n > \dim K$. A maggior ragione $H_n(K) = H_n(C_*(K, <)) = 0$ per ogni $n > \dim K$. □

Usando il complesso $C_*(K, <)$ delle catene ordinate possiamo calcolare direttamente, se necessario con l'aiuto del computer, l'omologia di alcuni complessi simpliciali astratti.

Infatti, per ogni $p \geq 0$ l'ordinamento sui vertici si estende, in maniera lessicografica ad un ordinamento totale sull'insieme dei p -simplessi e quindi definisce in maniera univoca un isomorfismo $C_p(K, <) = \mathbb{Z}^{k_p}$, dove k_p denota il numero dei simplessi di K di dimensione p .

ESEMPIO 3.4.6. Nel triangolo vuoto di vertici 1, 2, 3



la base canonica di C_0 è $(1), (2), (3)$ mentre la base canonica di C_1 è $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$. Il differenziale

$$C_1 = \oplus_{i < j} \mathbb{Z}(i, j) \xrightarrow{d} \oplus_i \mathbb{Z}(i) = C_0$$

è

$$d(a(1, 2) + b(1, 3) + c(2, 3)) = (-a - b)(1) + (a - c)(2) + (c + b)(3),$$

ed è rappresentato dalla matrice

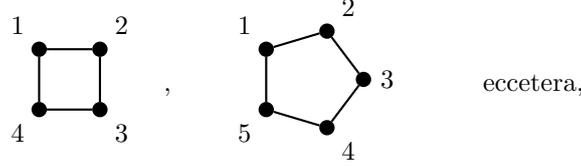
$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z}).$$

Per connessione $H_0 = \mathbb{Z}$, mentre

$$H_1 = \ker(d) = \{(a, b, c) \mid a = c = -b\} = \{(n, -n, n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

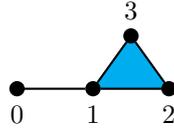
è il sottogruppo generato dal ciclo $(1, 2) - (1, 3) + (2, 3)$.

Aggiungendo baricentri a semplici massimali si ottengono i grafi



che pertanto hanno la stessa omologia del triangolo vuoto.

ESEMPIO 3.4.7. Sia K il complesso simpliciale astratto



Nel complesso delle catene ordinate di K le basi canoniche di $C_0(K, <)$, $C_1(K, <)$ e $C_2(K, <)$ sono rispettivamente:

- $(0), (1), (2), (3)$;
- $(0, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3)$;
- $(1, 2, 3)$.

I differenziali sono dati dalle matrici

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(esercizio: perché?). Dato che K è un cono già sappiamo come è fatta l'omologia senza bisogno di proseguire i calcoli.

Usando i complessi delle catene ordinate possiamo dare una diversa alternativa del calcolo dell'omologia delle sfere (Proposizione 3.3.6).

PROPOSIZIONE 3.4.8. Sia $S^{n-1} = \Delta^n - \{0, 1, \dots, n\}$, $n \geq 2$. Allora

$$H_0(S^{n-1}) = H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}, \quad H_i(S^{n-1}) = 0 \text{ per ogni } i \neq 0, n-1.$$

DIMOSTRAZIONE. Il caso $n = 2$ è già stato analizzato nell'Esempio 3.4.6; possiamo quindi considerare il caso $n > 2$.

Si osservi che $C_p(S^{n-1}, <) = C_p(\Delta^n, <)$ per ogni $p \neq n$ e $C_n(\Delta^n, <) = \mathbb{Z}(0, 1, \dots, n) \cong \mathbb{Z}$. Sia E il complesso di catene che vale $E_n = C_n(\Delta^n, <)$ e $E_p = 0$ per ogni $p \neq n$, allora l'inclusione $C(K, <) \subset C(\Delta^n, <)$ si estende in maniera ovvia ad una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow C(S^{n-1}, <) \rightarrow C(\Delta^n, <) \rightarrow E \rightarrow 0$$

e la successione esatta lunga di omologia ci fornisce le successioni esatte

$$H_{p+1}(E) \rightarrow H_p(S^{n-1}) \rightarrow H_p(\Delta^n) \rightarrow H_p(E)$$

e siccome $H_{p+1}(E) = H_p(E) = 0$ per ogni $p \neq n-1, n$ si ha che $H_p(S^{n-1}) = H_p(\Delta^n)$ per ogni $p < n-1$. Si ha poi una successione esatta

$$0 = H_n(\Delta^n) \rightarrow H_n(E) = \mathbb{Z} \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\Delta^n) = 0$$

da cui segue $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$. Infine se $p > n$ si ha $C_p(S^{n-1}, <) = 0$ ed a maggior ragione $H_p(S^{n-1}) = 0$. \square

3.5. Numeri di Betti e caratteristica di Eulero-Poincaré

La **caratteristica di Eulero-Poincaré** di un complesso simpliciale astratto finito K si definisce mediante la formula

$$\chi(K) = \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n k_n,$$

dove k_n indica il numero di semplici di dimensione n in K .

Per un complesso simpliciale astratto finito K i gruppi $C_p(K)$ sono tutti finitamente generati e quindi pure tutti i gruppi di omologia $H_n(K)$ sono finitamente generati. I loro ranghi vengono detti **numeri di Betti** e sono denotati $b_n(K) = \text{rank } H_n(K)$.

Fissiamo un ordinamento totale sui vertici di K , abbiamo visto che la sua estensione lessicografica determina un ordinamento totale in $K_n^<$ per ogni n e quindi degli isomorfismi canonici $C_n(K, <) \simeq \mathbb{Z}^{k_n}$.

Tramite questi isomorfismi possiamo scrivere il complesso delle catene ordinate nella forma

$$\dots \mathbb{Z}^{k_{n+1}} \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z}^{k_n} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}^{k_{n-1}} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^{k_0}.$$

Ogni morfismo d_i si rappresenta con una matrice a coefficienti interi; applicando il teorema del rango 2.6.13 si ha la formula

$$(3.5) \quad b_n(K) = k_n - \text{rank } d_n - \text{rank } d_{n+1}$$

dove si conviene che $d_i = 0$ per ogni $i \leq 0$ ed ogni $i > \dim K$.

Ad esempio, per il complesso simpliciale $K = \Delta^m$, per ogni $n = 0, \dots, m$ si ha $k_n = \binom{m+1}{n+1}$ e quindi

$$\chi(\Delta^m) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m+1}{n+1} = 1 - \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} = 1 - (1-1)^{m+1} = 1.$$

La caratteristica di Eulero-Poincaré è quindi una quantità di facile calcolo la cui importanza si deve al fatto che dipende solo dall'omologia di K .

TEOREMA 3.5.1 (di Eulero-Poincaré). *Dato un complesso simpliciale astratto finito K si ha*

$$\chi(K) = \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n b_n(K) = \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n \text{rank } H_n(K).$$

DIMOSTRAZIONE. Per una dimostrazione immediata basta prendere la somma a segni alterni di tutte le uguaglianze (3.5).

Possiamo anche evitare di usare il teorema del rango seguendo il seguente ragionamento. Sia d la dimensione di K , possiamo allora fissare un ordinamento totale sui vertici e calcolare l'omologia usando il complesso delle catene ordinate:

$$0 \rightarrow C_d(K, <) \xrightarrow{d} \dots C_1(K, <) \xrightarrow{d} C_0(K, <) \rightarrow 0.$$

Per costruzione ciascun $C_n(K, <)$ è un gruppo abeliano libero di rango k_n ed il complesso di catene ordinate si spezza in una serie di successioni esatte corte di gruppi abeliani finitamente generati:

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n(K, <) \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n(K) \rightarrow 0.$$

Per l'additività del rango si ha quindi per ogni n :

$$k_n = \text{rank } C_n(K, <) = \text{rank } Z_n + \text{rank } B_{n-1}, \quad b_n(K) = \text{rank } H_n(K) = \text{rank } Z_n - \text{rank } B_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_n (-1)^n (k_n - b_n(K)) &= \sum_n (-1)^n (\text{rank } B_{n-1} + \text{rank } B_n) \\ &= \sum_n ((-1)^n + (-1)^{n-1}) \text{rank } B_n = 0. \end{aligned}$$

□

ESEMPIO 3.5.2. Usiamo le formule (3.5) per calcolare i numeri di Betti della 2-sfera simpliciale $S = \Delta^{\{0,1,2,3\}} - \{0,1,2,3\}$. Si ha $k_0 = k_2 = 4$, $k_1 = 6$ ed i differenziali d_1, d_2 del complesso delle catene ordinate sono rappresentati dalle matrici

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando il procedimento di eliminazione di Gauss si vede facilmente che D_1 e D_2 hanno entrambe rango 3, e quindi

$$b_0 = 4 - 3 - 0 = 1, \quad b_1 = 6 - 3 - 3 = 0, \quad b_2 = 4 - 3 = 1.$$

ESEMPIO 3.5.3. Siano K un complesso simpliciale e $L \subset K$ un sottocomplesso tali che $K - L$ contenga un solo elemento s , che è necessariamente un simplessso massimale in K . Se s ha dimensione p , considerando le catene ordinate (rispetto ad un qualunque ordinamento dei vertici) si ha una successione esatta di complessi

$$0 \rightarrow C_*(L, <) \rightarrow C_*(K, <) \rightarrow \mathbb{Z}[-p]s \rightarrow 0,$$

dove il complesso $\mathbb{Z}[-p]s$ è generato da s in grado p e 0 in grado $\neq p$. Si ha quindi una successione esatta lunga di omologia

$$0 \rightarrow H_n(L) \rightarrow H_n(K) \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \rightarrow H_{n-1}(L) \rightarrow H_{n-1}(K) \rightarrow 0$$

e ci sono due possibilità.

1) se $g = 0$ allora $H_n(L) = H_n(K)$ ed esiste una successione esatta corta $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_{n-1}(L) \rightarrow H_{n-1}(K) \rightarrow 0$.

2) se $g \neq 0$ allora l'immagine di g è isomorfa a \mathbb{Z} , mentre il conucleo di g è un gruppo di torsione. Si hanno dunque due successioni esatte

$$0 \rightarrow H_n(L) \rightarrow H_n(K) \xrightarrow{g} \text{Im}(g) = \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \text{coker}(g) \rightarrow H_{n-1}(L) \rightarrow H_{n-1}(K) \rightarrow 0.$$

Dalla prima segue un isomorfismo (non canonico) $H_n(K) = H_n(L) \oplus \mathbb{Z}$, mentre dalla seconda (vedi Esempio 2.6.11) seguono una successione esatta ed un isomorfismo

$$0 \rightarrow \text{coker}(g) \rightarrow T(H_{n-1}(L)) \rightarrow T(H_{n-1}(K)) \rightarrow 0, \quad \frac{H_{n-1}(L)}{T(H_{n-1}(L))} = \frac{H_{n-1}(K)}{T(H_{n-1}(K))}.$$

Nel primo caso $b_{n-1}(K) = b_{n-1}(L) - 1$ e $b_i(K) = b_i(L)$ per ogni $i \neq n-1$; nel secondo caso $b_n(K) = b_n(L) + 1$ e $b_i(K) = b_i(L)$ per ogni $i \neq n$. In entrambi i casi la caratteristica di Eulero-Poincaré aumenta di $(-1)^n$, ossia $\chi(K) = \chi(L) + (-1)^n$.

TEOREMA 3.5.4. Per ogni grafo semplice finito connesso (V, E) , denotando con $K \subset \Delta^V$ il corrispondente complesso simpliciale di dimensione ≤ 1 , si hanno gli isomorfismi:

$$H_0(K) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K) = \mathbb{Z}^{|E|-|V|+1}, \quad H_n(K) = 0, \quad n > 1.$$

In particolare (V, E) è un albero se e solo se $H_1(K) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome K è connesso, si ha $H_0(K) = \mathbb{Z}$, ed il complesso delle catene ordinate diventa

$$0 \rightarrow C_1(K, <) = \bigoplus_{e \in E} \mathbb{Z}e \xrightarrow{d} C_0(K, <) = \bigoplus_{v \in V} \mathbb{Z}v \rightarrow 0$$

da cui segue che $H_1(K) = \ker(d)$ è un sottogruppo di $C_1(K, <) = \mathbb{Z}^{|E|}$ ed è dunque isomorfo a \mathbb{Z}^r per qualche r . Per l'additività del rango si ha $r = |E| - |V| + 1$. \square

Nella dimostrazione del Teorema 3.5.4 abbiamo visto che i gruppi di omologia di un grafo connesso tengono conto solamente della caratteristica di Eulero-Poincaré e non tengono conto di altri importanti aspetti combinatori che pure risultano importanti in teoria dei grafi.

Una maniera per perdere meno informazioni è quella di trovare dei modi naturali per associare ad un grafo dei complessi simpliciali, la cui omologia riflette alcune proprietà combinatorie del grafo di partenza.

Una maniera standard è quella di considerare per ogni grafo $\Gamma = (V, E)$ il corrispondente complesso delle cricche

$$\widehat{\Gamma} = \{\text{cricche di } \Gamma\},$$

del quale calcolare i gruppi di omologia $H_n(\widehat{\Gamma})$ i cui elementi non banali vengono detti **cavità topologiche** di Γ .

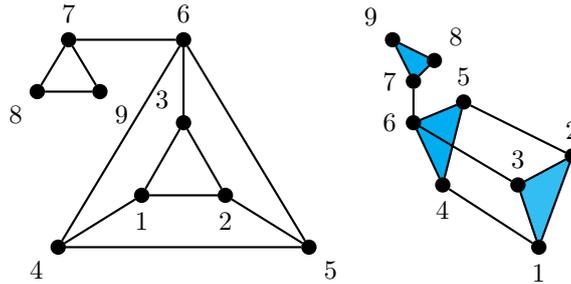
Riepilogando: *la trasformazione di un grafo semplice nel corrispondente complesso di cricche ha l'effetto di trasformare alcune caratteristiche da combinatorie in topologico-omotopiche*¹.

Esercizi:

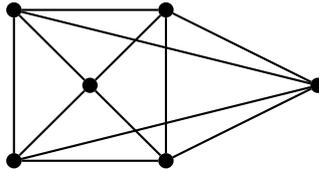
ESERCIZIO 24. Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo e $r > 0$ un intero. Definiamo $\Gamma_r \subset \Delta^V$ come la famiglia dei sottoinsiemi finiti e non vuoti $W \subset V$ per cui il sottografo indotto di vertici W , ogni vertice ha grado $\geq |W| - r$.

Provare che Γ_r è un complesso simpliciale astratto e che Γ_1 è il complesso di cricche del grafo Γ .

ESERCIZIO 25. Calcolare i gruppi di omologia del seguente grafo semplice (a sinistra) e del corrispondente complesso di cricche (a destra):



ESERCIZIO 26. Mostrare che il complesso di cricche del grafo



ha la stessa omologia della sfera simpliciale S^2 e pertanto possiede delle cavità topologiche 2-dimensionali non banali.

3.6. Omologia a coefficienti \mathbb{F}_2 e semplici positivi

Sia (K, I) un complesso simpliciale astratto. Abbiamo definito il gruppo delle p -catene orientate $C_p(K)$ come il gruppo abeliano libero generato da K_p .

Analogamente possiamo definire le p -catene orientate a coefficienti in un qualunque campo \mathbb{K} . Più precisamente definiamo $C_p(K, \mathbb{K})$ come lo spazio vettoriale su \mathbb{K} generato da K_p , ossia

$$C_p(K, \mathbb{K}) = \left\{ \sum_i a_i s_i \mid s_i \in K_p, a_i \in \mathbb{K} \text{ e } a_j \neq 0 \text{ per finiti } j \right\}.$$

¹In attesa di maggiori chiarimenti, possiamo provvisoriamente interpretare il termine topologico-omotopico come osservabile mediante gli strumenti tipici della topologia algebrica, quali ad esempio i gruppi di omologia.

La stessa formula del differenziale su $C_*(K)$ definisce un differenziale. I corrispondenti gruppi di omologia, che a posteriori sono spazi vettoriali su \mathbb{K} , vengono denotati $H_n(K, \mathbb{K})$.

Dal un punto di vista teorico, il calcolo dei gruppi $H_n(K, \mathbb{K})$ non aggiunge alcuna nuova informazione, nel senso che essi sono determinati univocamente, a meno di isomorfismo, dai gruppi $H_n(K)$; questo segue dal cosiddetto *teorema dei coefficienti universali*, risultato per nulla banale e non trattato in queste note.

Per un complesso simpliciale finito K segue facilmente dalla formula (3.5) che la dimensione di $H_n(K, \mathbb{K})$ come \mathbb{K} spazio vettoriale dipende solo dalla caratteristica del campo \mathbb{K} , è uguale al numero di Betti $b_n(K)$ se \mathbb{K} ha caratteristica 0 ed è maggiore od uguale a $b_n(K)$ se \mathbb{K} ha caratteristica positiva.

Sebbene meno informativi rispetto ai gruppi di omologia “tradizionali”, i gruppi $H_n(K, \mathbb{K})$ hanno il vantaggio di essere più facilmente calcolabili. Ciò è particolarmente vero quando \mathbb{K} è il campo con due elementi, ossia $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Siccome $1 = -1$ in \mathbb{F}_2 , il differenziale $d_p: C_p(K, \mathbb{F}_2) \rightarrow C_{p-1}(K, \mathbb{F}_2)$ assume la forma semplificata

$$d_p(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p).$$

Possiamo fare di meglio definendo $D_p(K)$ come lo spazio vettoriale su \mathbb{F}_2 generato dai semplici di K di dimensione p :

$$D_p(K) = \left\{ \sum_i a_i s_i \mid s_i \in K, \dim s_i = p, a_i \in \mathbb{F}_2, a_j = 1 \text{ per finiti } j \right\}.$$

Consideriamo poi le applicazioni lineari $d: D_p(K) \rightarrow D_{p-1}(K)$ definite sugli elementi della base come

$$d\{x_0, \dots, x_p\} = \sum_{i=0}^p \{x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p\},$$

ossia

$$s \in K, \dim s = p \quad \Rightarrow \quad d(s) = \sum_{t \subset s, \dim t = p-1} t.$$

TEOREMA 3.6.1. *Il diagramma di applicazioni*

$$\cdots \rightarrow D_p(K) \xrightarrow{d} D_{p-1}(K) \rightarrow \cdots \xrightarrow{d} D_0 \rightarrow 0$$

è un complesso i cui gruppi di omologia sono $H_n(K, \mathbb{F}_2)$.

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo un ordinamento totale \leq sull'insieme dei vertici di K . Le stesse argomentazioni fatte precedentemente mostrano che i gruppi di omologia del sottocomplesso delle catene ordinate $C_*(K, \mathbb{F}_2, <)$, dove

$$C_p(K, \mathbb{F}_2, <) = \left\{ \sum a_i (x_0, \dots, x_p) \mid a_i \in \mathbb{F}_2, x_0 < \cdots < x_p \right\},$$

sono gli stessi del complesso $C_*(K, \mathbb{F}_2, <)$.

Basta adesso osservare che le applicazioni lineari

$$C_p(K, \mathbb{F}_2, <) \rightarrow D_p(K), \quad (x_0, \dots, x_p) \mapsto \{x_0, \dots, x_p\},$$

definiscono un isomorfismo di complessi. □

Anche grazie al teorema precedente, il calcolo dei gruppi $H_n(K, \mathbb{F}_2)$ è molto più semplice dal punto di vista algoritmico e computazionale rispetto al calcolo di $H_n(K)$, e questo rappresenta un vantaggio specialmente per complessi simpliciali molto grandi.

Un celebre algoritmo per il calcolo dell'omologia a coefficienti in \mathbb{F}_2 prevede che un complesso simpliciale finito K sia dotato del seguente dato aggiuntivo:

Dato aggiuntivo: Una numerazione dei semplici

$$K = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$$

tale che, per ogni $1 \leq h \leq N$ la sottofamiglia

$$K^h = \{s_1, s_2, \dots, s_h\}$$

sia un sottocomplesso simpliciale.

Equivalentemente, viene dato su K un ordinamento totale \leq tale che per ogni $\sigma \in \mathbb{K}$ il suo segmento iniziale $\{\tau \in K \mid \tau \leq \sigma\}$ è un sottocomplesso.

Un tale dato aggiuntivo esiste sempre: ad esempio possiamo prima numerare i vertici, s_1, \dots, s_{N_1} , poi i simplessi di dimensione 1, $s_{N_1+1}, \dots, s_{N_2}$, poi i simplessi di dimensione 2 e così via.

DEFINIZIONE 3.6.2. Nelle notazioni precedenti, il semplice s_h si dice **positivo** se compare con coefficiente 1 in un ciclo di $D_*(K^h)$. Altrimenti si dice **negativo**.

Più precisamente, un s_h è positivo se e solo se esistono $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r < h$ tali che $\dim s_{i_j} = \dim s_h$ per ogni $j = 1, \dots, r$ e

$$d\left(s_h + \sum_j s_{i_j}\right) = 0.$$

È chiaro che ogni 0-simplesso è positivo, mentre la distinzione dei simplessi di dimensione superiore in positivi e negativi dipende dalla scelta dell'ordinamento su K . È utile osservare che il semplice s_h è positivo in K se e solo se è positivo in K^h .

ESEMPIO 3.6.3. Sia $\sigma \in K$ un p -simplesso non massimale. Allora il primo $(p+1)$ -simplesso τ che contiene σ è negativo.

Infatti, per ogni scelta di $\tau_1, \dots, \tau_k < \tau$ nel differenziale $d(\tau + \sum \tau_i)$ il semplice σ compare con coefficiente 1.

Introduciamo alcune notazioni:

- (1) per ogni h , sia $P_p(K^h) \subset D_p(K^h)$ il sottospazio vettoriale generato dai p -simplessi positivi di K^h ;
- (2) per ogni h , sia $N_p(K^h) \subset D_p(K^h)$ il sottospazio vettoriale generato dai p -simplessi negativi di K^h .

Chiaramente $D_p(K^h) = P_p(K^h) \oplus N_p(K^h)$.

LEMMA 3.6.4. *Nelle notazioni precedenti, per ogni h, p l'applicazione $d: N_p(K^h) \rightarrow D_{p-1}(K^h)$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista $v \in N_p(K^h)$ tale che $dv = 0$ e $v \neq 0$. Allora $v = s_{i_1} + \dots + s_{i_k}$ con $k > 0$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ed ogni s_{i_j} un p -simplesso negativo. Ma questo è assurdo perché la condizione $dv = 0$ implica che s_{i_k} è positivo. \square

LEMMA 3.6.5. *Nella situazione precedente, sia s_h un p -simplesso positivo. Allora esiste un'unico vettore $v_h \in N_p(K^{h-1})$ tale che $d(s_h + v_h) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo prima l'unicità. Siano $v_h, w_h \in N_p(K^{h-1})$ tali che $d(s_h + v_h) = d(s_h + w_h) = 0$; allora $d(v_h - w_h) = 0$ e $v_h = w_h$ per il lemma precedente.

Dimostriamo l'esistenza per induzione su h . Siccome s_h è positivo esiste un vettore $u \in D_p(K^{h-1})$ tale che $d(s_h + u) = 0$; scriviamo $u = v + w$ con $v \in N_p(K^{h-1})$ e $w \in P_p(K^{h-1})$.

Se $w = s_{i_1} + \dots + s_{i_k}$, con ogni s_{i_j} positivo, per l'ipotesi induttiva esistono vettori $v_1, \dots, v_k \in N_p(K^{h-1})$ tali che $d(s_{i_j} + v_j) = 0$ per ogni j . Ma allora $dw = d(\sum_j v_j)$ e di conseguenza $d(s_h + v + \sum_j v_j) = 0$. \square

Il lemmi precedenti ci offrono un metodo ricorsivo per classificare i simplessi in positivi e negativi. Sia $h = 1, \dots, N$ e supponiamo di aver già determinato il sottoinsieme dei simplessi negativi di K^{h-1} . Se $p = \dim s_h$ e s_{i_1}, \dots, s_{i_k} sono i p -simplessi negativi di K^{h-1} , allora s_h è positivo se e solo se i vettori $ds_h, ds_{i_1}, \dots, ds_{i_k}$ sono linearmente dipendenti in $D_{p-1}(K^h)$.

TEOREMA 3.6.6. *Nelle notazioni precedenti, $\dim H_p(K, \mathbb{F}_2) = \dim P_p(K) - \dim N_{p+1}(K)$, ossia la dimensione di $H_p(K, \mathbb{F}_2)$ è uguale alla differenza tra il numero dei p -simplessi positivi ed il numero dei $(p+1)$ -simplessi negativi.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni q si consideri l'applicazione lineare $f: D_q(K) \rightarrow D_q(K)$ definita sui q -simplessi da $f(s_h) = s_h$ se s_h è negativo, $f(s_h) = s_h + v_h$ se s_h è positivo, dove $v_h \in N_q(K^{h-1})$ è il vettore descritto nel Lemma 3.6.5.

Nella base data dai q -simplessi, l'applicazione f si rappresenta con una matrice triangolare con tutti 1 sulla diagonale. Quindi f è un isomorfismo e si ha $D_q(K) = f(N_q(K)) \oplus f(P_q(K)) = N_q(K) \oplus f(P_q(K))$. Siccome $d(s_h + v_h) = 0$ si ha $f(P_q(K)) \subset \ker d$ e quindi $D_q(K) = N_q(K) + \ker d$. D'altra parte, per il Lemma 3.6.4 $N_q(K) \cap \ker d = 0$ e quindi $D_q(K) = N_q(K) \oplus \ker d$.

Per concludere basta osservare che f determina un isomorfismo tra $P_p(K)$ ed il nucleo di $d: D_p(K) \rightarrow D_{p-1}(K)$ e che l'immagine di $d: D_{p+1}(K) \rightarrow D_p(K)$ è uguale all'immagine dell'applicazione iniettiva $d: N_{p+1}(K) \rightarrow D_p(K)$. \square

Insiemi simpliciali e omologia singolare

Questo capitolo può essere omissso senza pregiudicare la comprensione generale del testo

I complessi simpliciali astratti possiedono diverse rigidità che in certi casi sono un ostacolo al buon funzionamento della teoria. Vogliamo quindi trovare un analogo concetto (non una generalizzazione, si badi bene) che permette ugualmente di produrre gruppi di omologia in maniera functoriale e che poi risulti di più agile utilizzo.

La risposta a questo problema (non banale) è stata trovata nel periodo 1960-80 da svariati matematici, primo tra tutti Daniel Kan, che hanno mostrato come la teoria degli *insiemi simpliciali* ha tutte le caratteristiche richieste, ed altre ancora che la rendono il punto di incontro di teorie matematiche apparentemente molto distanti (e quindi un argomento più che consono per un corso di Istituzioni di Algebra e Geometria).

Tra le altre cose, il passaggio dai complessi simpliciali astratti agli insiemi simpliciali permette di sostituire il concetto di contiguità con la nozione di omotopia, quest'ultima formalmente simile alla classica definizione di omotopia usata in topologia.

4.1. Insiemi simpliciali

Se $n \geq 0$ è un intero non negativo denotiamo $[n] = \{0, \dots, n\}$ considerato come insieme *ordinato*, ossia dotato della usuale relazione di ordine \leq . Scriveremo inoltre $f: [n] \rightarrow [m]$ per indicare un'applicazione *monotona non decrescente*

$$f: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}, \quad f(0) \leq f(1) \leq \dots \leq f(n).$$

LEMMA 4.1.1 (Fattorizzazione epi-moni). *Ogni morfismo $f: [n] \rightarrow [m]$ si fattorizza in modo unico come $f = hg$ con $g: [n] \rightarrow [p]$ surgettiva e $h: [p] \rightarrow [m]$ iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Se l'immagine $f([n]) \subset [m]$ contiene $p + 1$ elementi, esiste un'unica applicazione bigettiva e monotona $h: [p] \rightarrow f([n])$ e si definisce g come la composizione

$$g: [n] \xrightarrow{f} f([n]) \xrightarrow{h^{-1}} [p].$$

□

Particolare importanza hanno i morfismi **faccia**:

$$\delta_k: [n-1] \rightarrow [n], \quad \delta_k(p) = \begin{cases} p & \text{se } p < k \\ p+1 & \text{se } p \geq k \end{cases}, \quad k = 0, \dots, n,$$

ed i morfismi **degenerazione**:

$$\sigma_k: [n+1] \rightarrow [n], \quad \sigma_k(p) = \begin{cases} p & \text{se } p \leq k \\ p-1 & \text{se } p > k \end{cases}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Si noti che $\delta_k: [n-1] \rightarrow [n]$ è l'unica applicazione iniettiva monotona la cui immagine non contiene k e che $\sigma_k: [n+1] \rightarrow [n]$ è l'unica applicazione surgettiva monotona tale che il bersaglio k è colpito due volte (da k e $k+1$).

Le regole di commutazione di facce e degenerazioni sono regolate dal seguente lemma.

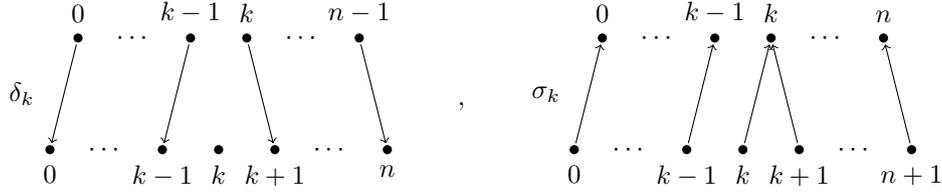


FIGURA 1. Facce e degenerazioni

LEMMA 4.1.2 (Identità cosimpliciali). *Nelle notazioni precedenti si ha*

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \delta_i \delta_j &= \delta_{j+1} \delta_i \quad \text{per ogni } i \leq j; \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_{i+1} \quad \text{per ogni } i \geq j; \\ \sigma_i \delta_j &= \begin{cases} \delta_{j-1} \sigma_i & \text{per ogni } j > i+1 \\ \text{Id} & \text{per } j = i, i+1 \\ \delta_j \sigma_{i-1} & \text{per ogni } j < i. \end{cases} \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è del tutto elementare ma decisamente noiosa; qui proviamo solamente le regole di commutazione delle facce e per le altre ci fidiamo dei tanti di libri di testo dove le identità cosimpliciali sono riportate (e quasi sempre lasciate per esercizio). Siano dunque $i \leq j \leq n$. La composizione

$$[n-1] \xrightarrow{\delta_j} [n] \xrightarrow{\delta_i} [n+1].$$

è iniettiva monotona ed il complementare dell'immagine è esattamente $\{i, \delta_i(j)\} = \{i, j+1\}$. Analogamente, la composizione

$$[n-1] \xrightarrow{\delta_i} [n] \xrightarrow{\delta_{j+1}} [n+1].$$

è iniettiva monotona ed il complementare dell'immagine è esattamente $\{j+1, \delta_{j+1}(i)\} = \{i, j+1\}$. Dunque le due applicazioni iniettive monotone $\delta_i \delta_j$ e $\delta_{j+1} \delta_i$ hanno la stessa immagine e quindi coincidono.

Va osservato che con il semplice cambio di indici $h = j+1$ e $k = i$, da tale identità segue

$$\delta_h \delta_k = \delta_k \delta_{h-1}, \quad \text{per ogni } h > k.$$

□

OSSERVAZIONE 4.1.3. Possiamo raffinare ulteriormente la fattorizzazione epi-moni osservando che ogni $f: [n] \rightarrow [m]$ possiede un'unica decomposizione del tipo

$$(4.2) \quad f = \delta_{i_1} \cdots \delta_{i_k} \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_h}$$

con

$$m \geq i_1 > i_2 > \cdots > i_k \geq 0, \quad 0 \leq j_1 < \cdots < j_h < n.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

DEFINIZIONE 4.1.4. Un **insieme simpliciale** X_\bullet è una collezione di insiemi ed applicazioni così definita:

- (1) per ogni intero $n \geq 0$ è dato un insieme X_n ;
- (2) per ogni applicazione monotona $f: [n] \rightarrow [m]$ è data un'applicazione $f^*: X_m \rightarrow X_n$.

Le applicazioni f^* devono soddisfare le seguenti *condizioni di controvarianza*:

- (1) se $\text{Id}: [n] \rightarrow [n]$ è l'identità allora anche $\text{Id}^*: X_n \rightarrow X_n$ è l'identità;
- (2) dati comunque $[n] \xrightarrow{f} [m] \xrightarrow{g} [p]$ si ha $(gf)^* = f^* g^*: X_p \rightarrow X_n$.

Dato un insieme simpliciale X_\bullet , per semplicità di notazione denotiamo

$$\begin{aligned} \partial_i &= \delta_i^*: X_n \rightarrow X_{n-1}, & i &= 0, \dots, n. \\ s_i &= \sigma_i^*: X_n \rightarrow X_{n+1}, & i &= 0, \dots, n. \end{aligned}$$

ESEMPIO 4.1.5. Ad ogni insieme U è associato in modo canonico un insieme simpliciale X_\bullet ponendo $X_n = U$ per ogni n e $f^* = \text{Id}_U$ per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$.

ESEMPIO 4.1.6. Se (K, I) è un complesso simpliciale astratto, la famiglia K_\bullet degli insiemi K_p (p -simplessi orientati) ha una struttura di insieme simpliciale, dove per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$ si definisce

$$f^*: K_m \rightarrow K_n, \quad f^*(x_0, \dots, x_m) = (x_{f(0)}, \dots, x_{f(m)}).$$

Ad esempio se $f: [3] \rightarrow [2]$ è l'applicazione

$$f(0) = f(1) = 1, \quad f(2) = f(3) = 2,$$

e K è il complesso simpliciale astratto e completo dei supereroi si ha

$$f^*(\text{Batman}, \text{Superman}, \text{Superciuk}) = (\text{Superman}, \text{Superman}, \text{Superciuk}, \text{Superciuk}).$$

Equivalentemente, se interpretiamo

$$K_n = \{x: [n] \rightarrow I \mid \{x_0, \dots, x_n\} \in K\}$$

allora l'applicazione f^* coincide con la composizione a destra con f , ossia $f^*x = x \circ f$; da questa descrizione segue immediatamente che per ogni $[n] \xrightarrow{f} [m] \xrightarrow{g} [p]$ si ha

$$(gf)^*x = x \circ gf = (g^*x) \circ f = f^*(g^*x).$$

Si osservi che

$$\partial_i(x_0, \dots, x_m) = \delta_i^*(x_0, \dots, x_m) = (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_m),$$

$$s_i(x_0, \dots, x_m) = \sigma_i^*(x_0, \dots, x_m) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

Alla stessa maniera si ha che se I è totalmente ordinato, allora i simplessi debolmente ordinati

$$K_n^{\leq} = \{(x_0, \dots, x_n) \in K_n \mid x_0 \leq \dots \leq x_n\}$$

formano al variare di n un insieme simpliciale.

ESEMPIO 4.1.7. Per ogni intero $p \geq 0$ si definisce l'insieme simpliciale $\Delta[p]_\bullet$ ponendo

$$\Delta[p]_n = \{x: [n] \rightarrow [p] \text{ monotone}\}, \quad n \geq 0,$$

$$x \in \Delta[p]_m, \quad f: [n] \rightarrow [m], \quad f^*x = x \circ f: [n] \rightarrow [p].$$

Notiamo che l'insieme simpliciale $\Delta[p]_\bullet$ coincide con i simplessi debolmente ordinati del complesso simpliciale Δ^p . Questo implica, tra l'altro, che nella analogie topologiche $\Delta[1]_\bullet$ deve essere pensato come l'intervallo $[0, 1]$, $\Delta[2]_\bullet$ come il triangolo pieno a più in generale $\Delta[p]_\bullet$ come il p -simplesso topologico (realizzazione geometrica di Δ^p).

ESEMPIO 4.1.8. Per ogni insieme parzialmente ordinato (S, \leq) possiamo definire un insieme simpliciale X_\bullet ponendo per ogni $n \geq 0$

$$X_n = \{x: [n] \rightarrow S \mid x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\},$$

e per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$,

$$f^*: X_m \rightarrow X_n, \quad f^*(x) = x \circ f.$$

ESEMPIO 4.1.9 (Spazio classificante). Dato un gruppo G con elemento neutro e , il suo **spazio classificante** è l'insieme simpliciale BG_\bullet definito nel modo seguente:

- (1) $BG_0 = \{e\}$, $BG_n = G^n = \{(g_n, \dots, g_1) \mid g_i \in G\}$;
- (2) per ogni $f: [m] \rightarrow [n]$ si pone $f^*(g_n, \dots, g_1) = (h_m, \dots, h_1)$ dove

$$h_i = \begin{cases} g_{f(i)}g_{f(i)-1} \cdots g_{f(i-1)+1} & \text{se } f(i) > f(i-1) \\ e & \text{se } f(i) = f(i-1) \end{cases}$$

Lasciamo al lettore la verifica che BG_\bullet è un insieme simpliciale.

ESEMPIO 4.1.10. Dati due insiemi simpliciali X_\bullet, Y_\bullet la famiglia dei prodotti cartesiani $X_n \times Y_n$ possiede una naturale struttura simpliciale dove, per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$ si definisce

$$f^*: X_m \times Y_m \rightarrow X_n \times Y_n, \quad f^*(x, y) = (f^*x, f^*y).$$

Il corrispondente insieme simpliciale viene detto il **prodotto** di X_\bullet, Y_\bullet e si denota con il simbolo $X_\bullet \times Y_\bullet$.

ESEMPIO 4.1.11. Un (multi)grafo orientato può essere pensato come il dato di: un insieme V (vertici), un insieme E (lati) e due applicazioni $a, p: E \rightarrow V$. Graficamente ogni lato $e \in E$ va pensato come un cammino orientato che unisce il vertice di partenza $p(e)$ con il vertice di arrivo $a(e)$.

Ad ogni grafo orientato possiamo associare un insieme simpliciale X_\bullet ponendo

$$X_n = V \amalg (E \times S_n), \quad n \geq 0,$$

dove \amalg denota l'unione disgiunta e

$$S_n = \{f: [n] \rightarrow \{0, 1\} \text{ monotona non costante}\}.$$

In particolare $X_0 = V$ e $X_1 = V \cup E$ (S_1 contiene solo l'identità); si noti che S_n contiene esattamente n applicazioni.

Data $f: [n] \rightarrow [m]$ l'applicazione $f^*: X_m \rightarrow X_n$ è definita nel modo seguente:

- (1) $f^*(v) = v$ per $v \in V$;
- (2) $f^*(e, \alpha) = (e, \alpha f)$ se $\alpha f \in S_n$;
- (3) se $(e, \alpha) \in E \times S_m$ e αf è costante si pone:
 - (a) $f^*(e, \alpha) = a(e) \in V$ se $\alpha f \equiv 0$,
 - (b) $f^*(e, \alpha) = p(e) \in V$ se $\alpha f \equiv 1$.

Lasciamo al lettore la semplice verifica che X_\bullet è un insieme simpliciale.

DEFINIZIONE 4.1.12. Un **morfismo di insiemi simpliciali** $\alpha: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ è una successione di applicazioni $\alpha_n: X_n \rightarrow Y_n$ tali che per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$ si ha $f^* \alpha_m = \alpha_n f^*$.

I morfismi simpliciali si compongono nel modo ovvio ($(\alpha \circ \beta)_n = \alpha_n \circ \beta_n$) e la composizione è ancora un morfismo di insiemi simpliciali

ESEMPIO 4.1.13. Ecco alcuni esempi di morfismi di insiemi simpliciali:

- 1) Ogni $\alpha: [n] \rightarrow [m]$ induce un morfismo di insiemi simpliciali

$$\alpha: \Delta[n]_\bullet \rightarrow \Delta[m]_\bullet, \quad \alpha_p(x) = \alpha \circ x, \quad x: [p] \rightarrow [n].$$

- 2) Ogni morfismo $\beta: K \rightarrow L$ di complessi simpliciali astratti induce un morfismo di insiemi simpliciali

$$\beta: K_\bullet \rightarrow L_\bullet, \quad \beta_n(x_0, \dots, x_n) = (\beta(x_0), \dots, \beta(x_n)).$$

- 3) Ogni omomorfismo di gruppi $\gamma: G \rightarrow H$ induce un morfismo di insiemi simpliciali

$$\gamma: BG_\bullet \rightarrow BH_\bullet, \quad \gamma(g_n, \dots, g_1) = (\gamma(g_n), \dots, \gamma(g_1)).$$

- 4) Dati due insiemi simpliciali X_\bullet e Y_\bullet , le proiezioni naturali sui fattori

$$X_\bullet \times Y_\bullet \rightarrow X_\bullet, \quad X_\bullet \times Y_\bullet \rightarrow Y_\bullet,$$

sono morfismi simpliciali.

ESEMPIO 4.1.14. Siano $0 \leq k \leq p$ interi; per ogni $n \geq 0$ denotiamo con $\widehat{k} \in \Delta[p]_n$ l'applicazione $[n] \rightarrow [p]$ che vale costantemente k . Allora per ogni insieme simpliciale X le applicazioni $X_n \rightarrow \Delta[p]_n$, $x \mapsto \widehat{k}$ per ogni x , definiscono un morfismo di insiemi simpliciali, dato che per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$ si ha $f^* \widehat{k} = \widehat{k}$.

ESEMPIO 4.1.15. L'Esempio 4.1.14 è un caso particolare di morfismo costante, ossia di un morfismo definito nel modo seguente.

Per ogni intero $n \geq 0$ denotiamo con $u: [n] \rightarrow [0]$ l'unica applicazione possibile. Dati due insiemi simpliciali X_\bullet, Y_\bullet ed un elemento $y \in Y_0$, le applicazioni costanti

$$X_n \rightarrow Y_n, \quad x \mapsto u^*(y)$$

definiscono un morfismo di insiemi simpliciali.

4.2. Omologia degli insiemi simpliciali

Sia X_\bullet insieme simpliciale fissato. Applicando le condizioni di controvarianza alle identità cosimpliciali (4.1) otteniamo, per ogni insieme simpliciale le **identità simpliciali**:

$$\begin{aligned} \partial_i: X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad s_i: X_n \rightarrow X_{n+1}, \quad i = 0, \dots, n, \\ \partial_j \partial_i = \partial_i \partial_{j+1} \quad \text{per ogni } i \leq j; \\ s_j s_i = s_{i+1} s_j \quad \text{per ogni } i \geq j; \\ (4.3) \quad \partial_j s_i = \begin{cases} s_i \partial_{j-1} & \text{per ogni } j > i + 1 \\ \text{Id} & \text{per } j = i, i + 1 \\ s_{i-1} \partial_j & \text{per ogni } j < i. \end{cases} \end{aligned}$$

Per ogni n denotiamo con $C_n(X_\bullet)$ il gruppo abeliano libero generato da X_n . Per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$, l'applicazione indotta $f^*: X_m \rightarrow X_n$ si estende per linearità ad un omomorfismo di gruppi abeliani liberi $f^*: C_m(X_\bullet) \rightarrow C_n(X_\bullet)$. In particolare le facce e le degenerazioni inducono omomorfismi

$$\partial_i: C_n(X_\bullet) \rightarrow C_{n-1}(X_\bullet), \quad s_i: C_n(X_\bullet) \rightarrow C_{n+1}(X_\bullet), \quad i = 0, \dots, n.$$

LEMMA 4.2.1. *Nelle notazioni precedenti, gli omomorfismi*

$$\partial: C_n(X_\bullet) \rightarrow C_{n-1}(X_\bullet), \quad \partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i, \quad n > 0,$$

soddisfano le identità $\partial^2 = 0$ e quindi definiscono un complesso di gruppi abeliani.

DIMOSTRAZIONE. Sia $n \geq 0$ fissato e mostriamo le precedenti identità su $C_n(X_\bullet)$; per $n = 0, 1$ non c'è nulla da dimostrare e quindi possiamo supporre $n \geq 2$.

$$\partial^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i$$

Nella prima sommatoria usiamo le identità simpliciali e nella seconda scambiamo i con j

$$\partial^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \partial_i \partial_{j+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j} \partial_i \partial_j$$

Nella prima sommatoria sostituiamo j con $j-1$ e nella seconda scambiamo i simboli di sommatoria

$$\partial^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j-1} \partial_i \partial_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \partial_i \partial_j = 0.$$

□

Dunque

$$C(X_\bullet): \quad \cdots \xrightarrow{\partial} C_2(X_\bullet) \xrightarrow{\partial} C_1(X_\bullet) \xrightarrow{\partial} C_0(X_\bullet) \rightarrow 0$$

è un complesso di catene ed ha quindi senso considerare i gruppi di omologia

$$H_n(X_\bullet) = H_n(C(X_\bullet)).$$

Segue immediatamente dalla definizione che se K_\bullet è l'insieme simpliciale dei semplici orientati di un complesso simpliciale astratto K , allora $H_n(K) = H_n(K_\bullet)$ per ogni n .

ESEMPIO 4.2.2. Siccome ogni elemento di $\Delta[n]_p$ può essere interpretato come una successione (x_0, \dots, x_p) con $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_p \leq n$ si ha che $C(\Delta[n]_\bullet)$ coincide con il complesso $C(\Delta^n, \leq)$ delle catene debolmente ordinate del complesso simpliciale astratto Δ^n e quindi $H_p(\Delta[n]_\bullet) = H_p(\Delta^n)$ per ogni p , ossia $H_0(\Delta[n]_\bullet) = \mathbb{Z}$ e $H_p(\Delta[n]_\bullet) = 0$ per ogni $p \neq 0$.

Dato un morfismo di insiemi simpliciali $\alpha: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$, i morfismi $\alpha_n: X_n \rightarrow Y_n$ commutano con le facce ∂_i ; lo stesso vale per le loro estensioni lineari $\alpha_n: C_n(X_\bullet) \rightarrow C_n(Y_\bullet)$ ed è quindi definito un morfismo di complessi di catene $\alpha: C(X_\bullet) \rightarrow C(Y_\bullet)$ che a sua volta induce omomorfismi in omologia.

TEOREMA 4.2.3. *Sia X_\bullet un insieme simpliciale. Allora la proiezione*

$$X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet \rightarrow X_\bullet$$

induce un isomorfismo in omologia.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $n \geq 0$ l'insieme $\Delta[1]_n = \{\alpha: [n] \rightarrow [1]\}$ contiene esattamente $n+2$ elementi ciascuno dei quali si può rappresentare come una $n+1$ -upla (y_0, \dots, y_n) con $0 \leq y_0 \leq \dots \leq y_n \leq 1$: la $n+1$ -upla (y_0, \dots, y_n) corrisponde all'applicazione $[n] \rightarrow [1]$, $i \mapsto y_i$.

Per ogni coppia di interi $n, k \geq 0$ definiamo

$$T_n^k = \{(y_0, \dots, y_n) \in \Delta[1]_n \mid y_i = 0 \text{ per ogni } i \leq n-k\}.$$

Osserviamo che

$$T_n^0 = \Delta[0]_n = \{(0, \dots, 0)\} \subset T_n^1 \subset T_n^2 \subset \dots \subset T_n^k = \Delta[1]_n \text{ per ogni } k > n.$$

Osserviamo inoltre che i sottoinsiemi T_n^k si comportano bene rispetto agli operatori ∂_i , e più precisamente:

- (1) $\partial_i T_n^k \subset T_{n-1}^k$ per ogni $n > 0$ ed ogni $0 \leq i \leq n$;
- (2) $\partial_i T_n^k \subset T_{n-1}^{k-1}$ per ogni $n > 0$ ed ogni $n-k < i \leq n$.

Consideriamo gli operatori

$$\tau: T_n^k \rightarrow T_{n+1}^k, \quad \tau(y_0, \dots, y_n) = (0, y_0, \dots, y_n).$$

Dato un qualunque elemento $y \in T_n^k$, sono di immediata verifica le relazioni:

- (1) $\partial_0 \tau(y) = y$;
- (2) $\partial_{i+1} \tau(y) = y$ se $0 \leq i \leq n-k$;
- (3) $\partial_{i+1} \tau(y) \in T_n^{k-1}$ se $i > n-k$ e $0 \leq i \leq n$;
- (4) $\partial_{i+1} \tau(y) = \tau \partial_i(y)$ se $n > 0$ e $0 \leq i \leq n$.

Per ogni $k \geq 0$ consideriamo il sottocomplesso $C^k \subset C(X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet)$ generato in grado n dagli elementi di $X_n \times T_n^k$.

Siccome T_n^0 contiene un solo elemento, il morfismo $C(X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet) \rightarrow C(X_\bullet)$ indotto dalla proiezione stabilisce un isomorfismo $C^0 \simeq C(X_\bullet)$, quindi $H_n(C^0) = H_n(X_\bullet)$.

D'altra parte $C_n^k = C_n(X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet)$ per ogni $k > n$ e quindi $H_n(C^k) = H_n(X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet)$ per ogni $k \geq n+2$.

Per dimostrare il teorema sarà quindi sufficiente provare che ogni inclusione $C^k \subset C^{k+1}$ è un quasi-isomorfismo. Per il Lemma 3.4.3 basta trovare, per ogni $k > 0$, un'omotopia $h: C^k \rightarrow C^{k+1}$ tale che:

- (1) $h(C^{k-1}) \subset C^{k-1}$;
- (2) se $\phi = \partial h + h \partial - \text{Id}$, allora $\phi(C^k) \subset C^{k-1}$.

Sia quindi $k > 0$ fissato e definiamo le applicazioni

$$h_n: C_n^k \rightarrow C_{n+1}^k, \quad h_n(x, y) = \begin{cases} (-1)^{n-k+1} (s_{n-k+1} x, \tau y) & \text{se } n+1 \geq k, \\ 0 & \text{se } n+1 < k. \end{cases}$$

La condizione $h(C^{k-1}) \subset C^{k-1}$ è chiara; occupiamoci adesso di studiare, per ogni $n \geq 0$, l'immagine dell'operatore $\phi = \partial h + h \partial - \text{Id}: C_n^k \rightarrow C_n^k$; trattiamo separatamente i tre casi $k > n+1$, $k = n+1$ e $k < n+1$.

1) Se $k > n+1$ allora $C_n^k = C_n^{k-1}$ e quindi l'immagine di ϕ è contenuta in C_n^{k-1} .

2) Se $k = n+1$ si ha $\phi = \partial h - \text{Id}$ e per ogni $(x, y) \in X_n \times T_n^k$, siccome $\partial_0 s_0 = \text{Id}$ si ha

$$\phi(x, y) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (\partial_i s_0 x, \partial_i \tau y) - (x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (\partial_i s_0 x, \partial_i \tau y)$$

e ogni elemento nella sommatoria a destra appartiene a $T_n^{k-1} = T_n^n$. Quindi anche in questo caso l'immagine di ϕ è contenuta in C_n^{k-1} .

3) Se $k < n + 1$ e $(x, y) \in X_n \times T_n^k$, usando le identità simpliciali

$$\partial_{n-k+1}s_{n-k+1} = \text{Id}, \quad \partial_i s_{n-k+1} = s_{n-k} \partial_i, \quad 0 \leq i \leq n-k,$$

e le uguaglianze $\partial_i \tau y = y$ per ogni $0 \leq i \leq n-k+1$, si ha:

$$\begin{aligned} \partial h(x, y) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1+i} (\partial_i s_{n-k+1} x, \partial_i \tau y) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+1+i} (\partial_i s_{n-k+1} x, y) + (x, y) + \sum_{i=n-k+2}^{n+1} (-1)^{n-k+1+i} (\partial_i s_{n-k+1} x, \partial_i \tau y) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+1+i} (s_{n-k} \partial_i x, y) + (x, y) + \sum_{i=n-k+2}^{n+1} (-1)^{n-k+1+i} (\partial_i s_{n-k+1} x, \partial_i \tau y), \\ h \partial(x, y) &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+i} (s_{n-k} \partial_i x, y) + \sum_{i=n-k+1}^n (-1)^{n-k+i} (s_{n-k} \partial_i x, \tau \partial_i y). \end{aligned}$$

Dunque

$$\phi(x, y) = \sum_{i=n-k+2}^{n+1} (-1)^{n-k+1+i} (\partial_i s_{n-k+1} x, \partial_i \tau y) + \sum_{i=n-k+1}^n (-1)^{n-k+i} (s_{n-k} \partial_i x, \tau \partial_i y)$$

ed è chiaro che ogni addendo in ciascuna sommatoria appartiene a C_n^{k-1} . \square

Per ogni insieme simpliciale X_\bullet possiamo considerare i due morfismi di insiemi simpliciali

$$i_0, i_1: X_\bullet \rightarrow X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet$$

$$i_0(x) = (x, (0, 0, \dots, 0)), \quad i_1(x) = (x, (1, 1, \dots, 1)).$$

La verifica che si tratta di morfismi di insiemi simpliciali è immediata in quanto per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$ si ha

$$f^*(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0), \quad f^*(1, \dots, 1) = (1, \dots, 1).$$

COROLLARIO 4.2.4. *Nelle notazioni precedenti, per ogni insieme simpliciale X_\bullet i due morfismi di insiemi simpliciali*

$$i_0, i_1: X_\bullet \rightarrow X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet$$

inducono lo stesso isomorfismo in omologia

$$i_0 = i_1: H_n(X_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet).$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema precedente la proiezione $\pi: X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet \rightarrow X_\bullet$ induce un isomorfismo in omologia e siccome $\pi i_0 = \pi i_1 = \text{Id}$ si ha che

$$i_0, i_1: H_n(X_\bullet) \rightarrow H_n(X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet)$$

coincidono entrambi con l'inverso dell'isomorfismo

$$\pi: H_n(X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(X_\bullet).$$

\square

DEFINIZIONE 4.2.5. Diremo che due morfismi di insiemi simpliciali $\alpha, \beta: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ sono **direttamente omotopi**, e scriveremo $\alpha \Rightarrow \beta$, se esiste un morfismo di insiemi simpliciali

$$\theta: X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet \rightarrow Y_\bullet$$

tale che

$$\alpha = \theta i_0, \quad \beta = \theta i_1.$$

In tal caso

La relazione di omotopia diretta gode della proprietà riflessiva, ossia $\alpha \Rightarrow \alpha$ per ogni $\alpha: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$: basta infatti considerare il morfismo di insiemi simpliciali

$$\theta = \alpha \times \text{Id}: X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet \rightarrow Y_\bullet, \quad \theta(x, y) = (\alpha(x), y).$$

DEFINIZIONE 4.2.6. Due morfismi di insiemi simpliciali $\alpha, \beta: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ si dicono **omotopi** se esiste uno zigzag finito di omotopie dirette

$$\begin{array}{ccccc} & \gamma_0 & & \dots & & \gamma_n & \\ & \swarrow & & & & \swarrow & \\ \alpha & & & & & & \beta \\ & \searrow & & & & \searrow & \\ & \gamma_1 & & \dots & & \gamma_{n-1} & \end{array}$$

La definizione è analoga alla definizione di omotopia di applicazioni continue, dato che $\Delta[1]_\bullet$ è l'analogo simpliciale dell'intervallo chiuso $[0, 1]$; la necessità di prendere lo zigzag serve a garantire le proprietà simmetrica e transitiva dell'omotopia.

Ad esempio, se α, β sono direttamente omotopi, allora β, α sono omotopi, come segue considerando lo zigzag

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \alpha \times \text{Id} \swarrow & & \searrow \\ \alpha & & \beta \end{array}$$

La relazione di omotopia si comporta bene con le composizioni, nel senso descritto dal seguente lemma.

LEMMA 4.2.7. *Siano $\alpha, \beta: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ due morfismi (direttamente) omotopi di insiemi simpliciali. Allora:*

- (1) *per ogni morfismo di insiemi simpliciali $f: Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet$, i due morfismi $f\alpha$ e $f\beta$ sono (direttamente) omotopi;*
- (2) *per ogni morfismo di insiemi simpliciali $g: W_\bullet \rightarrow X_\bullet$, i due morfismi αg e βg sono (direttamente) omotopi.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo prima il caso in cui α e β sono direttamente omotopi, ossia che esiste $\theta: X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ tale che $\alpha = \theta i_0$, $\beta = \theta i_1$. Siccome $\alpha = \theta i_0$ e $\beta = \theta i_1$ si ha $f\alpha = (f\theta)i_0$ e $f\beta = (f\theta)i_1$, che prova che α e β sono direttamente omotopi.

Similmente se consideriamo il morfismo di insiemi simpliciali

$$g \times \text{Id}: W_\bullet \times \Delta[1]_\bullet \rightarrow X_\bullet \times \Delta[1]_\bullet, \quad (w, y) \mapsto (g(w), y),$$

si ha $i_k g = (g \times \text{Id})i_k$ per ogni $k = 0, 1$ e quindi

$$\alpha g = \theta i_0 g = \theta(g \times \text{Id})i_0, \quad \beta g = \theta i_1 g = \theta(g \times \text{Id})i_1.$$

In generale, α e β sono connesse da uno zigzag finito di omotopie dirette, applicando il precedente risultato a ciascuna freccia \Rightarrow dello zigzag si ottiene la dimostrazione. \square

COROLLARIO 4.2.8. *Due morfismi omotopi di insiemi simpliciali $\alpha, \beta: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ inducono lo stesso morfismo in omologia.*

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre α e β direttamente omotopi, e sia θ come nella Definizione 4.2.5. Siccome i_0, i_1 inducono lo stesso morfismo in omologia, pure i morfismi θi_0 e θi_1 inducono lo stesso morfismo in omologia. \square

4.3. Complementi: catene degeneri e complesso di Moore

Questa sezione non è essenziale per il seguito e può essere pertanto omessa ad una prima lettura.

LEMMA 4.3.1. *Sia X_\bullet un insieme simpliciale. Nelle notazioni precedenti, gli omomorfismi*

$$\begin{aligned}\partial: C_n(X_\bullet) &\rightarrow C_{n-1}(X_\bullet), & \partial &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i, \\ s: C_n(X_\bullet) &\rightarrow C_{n+1}(X_\bullet), & s &= \sum_{i=0}^n (-1)^i s_i,\end{aligned}$$

soddisfano le seguenti identità:

$$\partial^2 = 0, \quad s^2 = 0, \quad \partial s + s\partial = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già dimostrato che $\partial^2 = 0$. Proviamo adesso che $s^2 = 0$.

$$s^2 = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} s_j s_i = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} s_j s_i + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j} s_j s_i$$

Nella prima sommatoria usiamo le identità simpliciali e nella seconda scambiamo i con j

$$s^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} s_{i+1} s_j + \sum_{j=0}^n \sum_{i=j+1}^{n+1} (-1)^{i+j} s_i s_j$$

Nella prima sommatoria sostituiamo i con $i-1$ e nella seconda scambiamo i simboli di sommatoria

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j-1} s_i s_j + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} s_i s_j = 0$$

Rimane da dimostrare che $\partial s = -s\partial$. Se $n = 0$ abbiamo $s\partial = 0$ e $\partial s = \partial_0 s_0 - \partial_1 s_0 = \text{Id} - \text{Id} = 0$ e quindi per l'uguaglianza $\partial s + s\partial = 0$ possiamo assumere $n \geq 1$.

$$\partial s = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j s_i$$

Siccome $\partial_j s_i = \text{Id}$ per $j = i, i+1$ possiamo scrivere

$$\partial s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \partial_j s_i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} \partial_j s_i$$

E usando le identità simpliciali

$$\partial s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} s_{i-1} \partial_j + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} s_i \partial_{j-1}$$

Scambiando i con $i+1$ nella prima e j con $j+1$ nella seconda si ottiene

$$\partial s = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j+1} s_i \partial_j + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j+1} s_i \partial_j$$

$$\partial s = - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} s_i \partial_j = -s\partial.$$

□

Sia X_\bullet un insieme simpliciale; come nel caso dei complessi simpliciali astratti è possibile trovare dei sottocomplessi molto più piccoli di $C(X_\bullet)$ che calcolano la stessa omologia. A tal fine osserviamo che per ogni $0 \leq k \leq n$ l'operatore $\partial s_k: C_n(X_\bullet) \rightarrow C_n(X_\bullet)$ è uguale a

$$\begin{aligned}(4.4) \quad \partial s_k &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i s_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \partial_i s_k + \sum_{i=k+2}^{n+1} (-1)^i \partial_i s_k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{k-1} \partial_i + \sum_{i=k+2}^{n+1} (-1)^i s_k \partial_{i-1},\end{aligned}$$

e quindi se denotiamo con $D_n(X_\bullet) \subset C_n(X_\bullet)$ il sottogruppo abeliano libero generato dagli elementi del tipo $s_k x$, con $0 \leq k \leq n-1$ e $x \in X_{n-1}$, si ha $\partial(D_n(X_\bullet)) \subset D_{n-1}(X_\bullet)$ e quindi tali sottogruppi definiscono un sottocomplesso $D(X_\bullet) \subset C(X_\bullet)$, detto delle **catene degeneri** e che però non è quello che cerchiamo dato che:

LEMMA 4.3.2. *Nelle notazioni precedenti il complesso $D(X_\bullet)$ è aciclico.*

DIMOSTRAZIONE. La Formula (4.4) ci consente di definire una catena ascendente di sottocomplessi

$$0 = D^{-1} \subset D^0 \subset D^1 \subset \dots \subset D(X_\bullet),$$

dove D^k è il sottocomplesso generato da tutti gli elementi del tipo $s_k x$, con $0 \leq k \leq p$. Più precisamente, per ogni $n \geq 0$, $D_n^k \subset D_n(X_\bullet)$ è il sottogruppo abeliano libero generato dagli elementi del tipo $s_i x$, con $0 \leq i \leq \min(k, n-1)$ e $x \in X_{n-1}$. Siccome $D_n^k = D_n(X_\bullet)$ per ogni $k \geq n-1$, per dimostrare che $D_n(X_\bullet)$ è aciclico basta dimostrare che per ogni $k \geq 0$ l'inclusione $D^{k-1} \subset D^k$ è un quasi-isomorfismo.

A tal fine considerando l'omotopia $h = (-1)^k s_k : D^k \rightarrow D^{k-1}$; per un elemento del tipo $s_h x \in D_n^{k-1}$, $h < k$, si ha

$$(-1)^k h(s_h x) = s_k s_h x = s_h s_{k-1} x \in D_n^{k-1}.$$

Ponendo $\phi = \partial h + h \partial - \text{Id}$, vogliamo dimostrare che per ogni generatore $s_h x \in D_n^k$, $n > 1$, $h \leq k$, $x \in X_{n-1}$, si ha $\phi(s_h x) \in D_n^{k-1}$. Se $h < k$ abbiamo già visto che $h(s_h x)$ appartiene al sottocomplesso D^{k-1} e a maggior ragione $\phi(s_h x) \in D^{k-1}$. Se $h = k$, usando la Formula (4.4) e le identità simpliciali si ha

$$\begin{aligned} (-1)^k \phi(s_k x) &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{k-1} \partial_i s_k x + \sum_{i=k+2}^{n+1} (-1)^i s_k \partial_{i-1} s_k x + \sum_{i=0}^n (-1)^i s_k \partial_i s_k x - (-1)^k s_k x \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{k-1} \partial_i s_k x - \sum_{i=k+1}^n (-1)^i s_k \partial_i s_k x + \sum_{i=0}^n (-1)^i s_k \partial_i s_k x - (-1)^k s_k x \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{k-1} \partial_i s_k x + \sum_{i=0}^k (-1)^i s_k \partial_i s_k x - (-1)^k s_k x \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{k-1} \partial_i s_k x + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_k \partial_i s_k x \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{k-1} \partial_i s_k x + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_k s_{k-1} \partial_i x \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{k-1} \partial_i s_k x + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{k-1} s_{k-1} \partial_i x \in D_n^{k-1}. \end{aligned}$$

□

Sia X_\bullet un insieme simpliciale, definiamo $N_0(X_\bullet) = C_0(X_\bullet)$ e per ogni $n > 0$

$$N_n(X_\bullet) = \{a \in C_n(X_\bullet) \mid \partial_i a = 0 \text{ per ogni } 0 < i \leq n\}.$$

Se $a \in N_n(X_\bullet)$ si ha $\partial a = \partial_0 a$ e per ogni $i \geq 0$ vale

$$\partial_i \partial a = \partial_i \partial_0 a = \partial_0 \partial_{i+1} a = 0,$$

e quindi $\partial a \in N_{n-1}(X_\bullet)$, ossia i sottogruppi $N_n(X_\bullet)$ definiscono un sottocomplesso $N(X_\bullet) \subset C(X_\bullet)$ detto **complesso di Moore** dell'insieme simpliciale.

TEOREMA 4.3.3. *Nelle notazioni precedenti si ha $C(X_\bullet) = N(X_\bullet) \oplus D(X_\bullet)$ e l'inclusione di complessi di catene $N(X_\bullet) \subset C(X_\bullet)$ induce un isomorfismo in omologia.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che $D_0(X_\bullet) = 0$, $N_0(X_\bullet) = C_0(X_\bullet)$ basta provare che per ogni $n > 0$ si ha $C_n(X_\bullet) = N_n(X_\bullet) \oplus D_n(X_\bullet)$. Per provare che $N_n(X_\bullet) \cap D_n(X_\bullet) = 0$ supponiamo

per assurdo che esista $0 \neq a \in N_n(X_\bullet) \cap D_n(X_\bullet)$ e sia $0 \leq p \leq n-1$ il più piccolo intero per cui è possibile scrivere $a = \sum_{i=0}^p s_i(a_i)$, con $a_i \in C_{n-1}(X_\bullet)$. Allora

$$\begin{aligned} 0 = \partial_{p+1}(a) &= \sum_{i=0}^{p-1} \partial_{p+1} s_i(a_i) + a_p = \sum_{i=0}^{p-1} s_i \partial_p(a_i) + a_p, \\ s_p(a_p) &= - \sum_{i=0}^{p-1} s_p s_i \partial_p(a_i) = - \sum_{i=0}^{p-1} s_i s_{p-1} \partial_p(a_i), \end{aligned}$$

da cui segue

$$y = \sum_{i=0}^{p-1} s_i(a_i - s_{p-1} \partial_p(a_i)),$$

in contraddizione con la definizione di p .

Per dimostrare che $C_n(X_\bullet) = N_n(X_\bullet) + D_n(X_\bullet)$ sia $a \in C_n(X_\bullet)$ e sia $-1 \leq p \leq n$ il più piccolo intero tale che $\partial_i a = 0$ per ogni $1 \leq i \leq n-p$. Se $p = -1$ allora $a \in N_n(X_\bullet)$. Se $p \geq 0$ consideriamo la catena $b = a - s_{n-p} \partial_{n-p} a$. Allora

$$\partial_{n-p} b = \partial_{n-p} a - \partial_{n-p} s_{n-p} \partial_{n-p} a = \partial_{n-p} a - \partial_{n-p} a = 0,$$

mentre se $1 \leq i < n-p$ si ha

$$\partial_i b = \partial_i a - \partial_i s_{n-p} \partial_{n-p} a = -s_{n-p-1} \partial_i \partial_{n-p} a = -s_{n-p-1} \partial_{n-p-1} \partial_i a = 0.$$

Per induzione su p si ha $b \in N_n(X_\bullet) + D_n(X_\bullet)$ e quindi

$$a = b + s_{n-p} \partial_{n-p} a \in N_n(X_\bullet) + D_n(X_\bullet).$$

Per concludere, abbiamo dimostrato che il sottocomplesso $D(X_\bullet)$ delle catene degeneri è aciclico e quindi

$$H_n(C(X_\bullet)) = H_n(N(X_\bullet)) \oplus H_n(D(X_\bullet)) = H_n(N(X_\bullet)).$$

□

OSSERVAZIONE 4.3.4. Per evitare un errore comune, se per ogni n definiamo $M_n \subset C_n(X_\bullet)$ come il sottogruppo abeliano libero generato dagli elementi di $X_n - \cup_i s_i(X_{n-1})$, è chiaro che $C_n(X_\bullet) = M_n \oplus D_n(X_\bullet)$ per ogni n , ma la successione degli M_n **non** è in generale un sottocomplesso. Consideriamo ad esempio l'insieme simpliciale Δ_\bullet^1 dei simplessi orientati del complesso simpliciale astratto Δ^1 . Allora $(0, 1, 0) \in M_2$ ma

$$\partial(0, 1, 0) = (1, 0) - (0, 0) + (0, 1) = (1, 0) - s_0(0) + (0, 1) \notin M_1.$$

4.4. Introduzione all'omologia singolare

Per ogni $n \geq 0$ consideriamo l'applicazione "base canonica" $e: [n] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo poi il **simplesso topologico standard** di dimensione n , denotato $\Delta_{\mathbb{R}}^n$, come l'involuppo convesso di $e([n])$:

$$\Delta_{\mathbb{R}}^n = \langle e([n]) \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i e_i \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\} = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}$$

(per semplicità di scrittura intendiamo il vettore riga (t_0, \dots, t_n) con lo stesso significato del corrispondente vettore colonna). Abbiamo già osservato che ciascun $\Delta_{\mathbb{R}}^n$ è un sottospazio metrico compatto e connesso di \mathbb{R}^{n+1} .

Ogni morfismo $f: [n] \rightarrow [m]$ si estende ad un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{f} & [m] \\ \downarrow e & & \downarrow e \\ \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{f_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}^{m+1} \end{array}$$

dove $f_{\mathbb{R}}$ è l'unica applicazione lineare che fa commutare il diagramma. In concreto:

$$f_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=0}^n t_i e_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i e_{f(i)} \iff f_{\mathbb{R}}(t_0, \dots, t_n) = \left(\sum_{\{i|f(i)=0\}} t_i, \dots, \sum_{\{i|f(i)=m\}} t_i \right).$$

Sono evidenti sia la continuità di $f_{\mathbb{R}}$ sia le proprietà functoriali della precedente costruzione, ossia $\text{Id}_{\mathbb{R}} = \text{Id}$ e $(fg)_{\mathbb{R}} = f_{\mathbb{R}} g_{\mathbb{R}}$. È anche immediato osservare che i semplici topologici standard sono stabili per le applicazioni $f_{\mathbb{R}}$, ossia che:

$$f: [n] \rightarrow [m] \implies f_{\mathbb{R}}: \Delta_{\mathbb{R}}^n \rightarrow \Delta_{\mathbb{R}}^m.$$

In particolare:

$$(\delta_i)_{\mathbb{R}}(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n),$$

$$(\sigma_i)_{\mathbb{R}}(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n),$$

e per ogni applicazione faccia $\delta_i: [n] \rightarrow [n+1]$ si ha un omeomorfismo

$$(\delta_i)_{\mathbb{R}}: \Delta_{\mathbb{R}}^n \xrightarrow{\cong} \{(t_0, \dots, t_{n+1}) \in \Delta_{\mathbb{R}}^{n+1} \mid t_i = 0\}.$$

DEFINIZIONE 4.4.1. Un n -**simplexso singolare** di uno spazio topologico X è un'applicazione continua $\alpha: \Delta_{\mathbb{R}}^n \rightarrow X$. L'insieme degli n -simplexsi singolari di X viene denotato $S_n(X)$.

Per ogni morfismo $f: [n] \rightarrow [m]$ possiamo definire

$$f^*: S_m(X) \rightarrow S_n(X), \quad f^* \alpha = \alpha \circ f_{\mathbb{R}},$$

ed è immediato osservare che tutto ciò definisce un insieme simpliciale $S_{\bullet}(X)$, detto **insieme singolare** dello spazio topologico X .

DEFINIZIONE 4.4.2. Il complesso $C(S_{\bullet}(X))$ viene detto complesso delle **catene singolari** di X ed i gruppi

$$H_n(X) \xlongequal{\text{per definizione}} H_n(S_{\bullet}(X))$$

sono detti gruppi di **omologia singolare** dello spazio topologico X .

Lo studio dell'omologia singolare è uno degli argomenti principali dei corsi di topologia algebrica; in queste note ci limiteremo a dimostrare la loro invarianza omotopica ed a enunciare (senza dimostrazioni) alcuni teoremi fondamentali. Per approfondimenti e maggiori dettagli rimandiamo a [3, 4, 9, 10, 21].

ESEMPIO 4.4.3. Se $X = \emptyset$, allora $S_n(X) = \emptyset$ per ogni $n \geq 0$ e quindi $H_n(\emptyset) = 0$ per ogni n .

ESEMPIO 4.4.4. Se $X = *$ è formato da un solo punto, allora $S_n(X)$ contiene solo il simplexso singolare costante $c_n: \Delta_{\mathbb{R}}^n \rightarrow *$ e quindi $\partial_i c_n = c_{n-1}$ per ogni $n > 0$ $0 \leq i \leq n$. Per ogni $n > 0$ si ha

$$\partial c_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i c_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_{n-1} = \begin{cases} c_{n-1} & \text{se } n \text{ pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Dunque il complesso delle catene singolari diventa

$$\cdots \rightarrow C_4 = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} C_3 = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} C_2 = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} C_1 = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} C_0 = \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

che ha come omologia $H_0 = \mathbb{Z}$ e $H_n = 0$ per ogni $n > 0$.

Alternativamente, si può osservare che $S_{\bullet}(*)$ coincide con l'insieme simpliciale dei simplexsi orientati di Δ^0 , di cui abbiamo già calcolato l'omologia.

OSSERVAZIONE 4.4.5. Per definizione $S_0(X) = X$ (ogni 0-simplesso $\Delta_{\mathbb{R}}^0 \rightarrow X$ viene identificato con la sua immagine).

Siccome esiste un ovvio omeomorfismo

$$\Delta_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow [0, 1], \quad (t_0, t_1) \mapsto t_1,$$

esiste una naturale bigezione tra $S_1(X)$ e l'insieme dei cammini continui $[0, 1] \rightarrow X$. Ogni cammino continuo $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ corrisponde all'1-simplesso singolare

$$\alpha': \Delta_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow X, \quad \alpha'(t_0, t_1) = \alpha(t_1).$$

Per ogni cammino $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ scriveremo

$$\partial\alpha = \partial\alpha' = \partial_0\alpha' - \partial_1\alpha' = \alpha'(0, 1) - \alpha'(1, 0) = \alpha(1) - \alpha(0).$$

LEMMA 4.4.6. *Per ogni spazio topologico X , il gruppo $H_0(X)$ è abeliano libero generato dalle componenti connesse per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y \subset X = S_0(X)$ un insieme di rappresentanti delle componenti connesse per archi. Denotando con $F \subset C_0(S_{\bullet}(X))$ il sottogruppo libero generato da Y basta dimostrare che esiste una decomposizione in somma diretta $C_0(S_{\bullet}(X)) = F \oplus B_0(S_{\bullet}(X))$.

Per ogni $x \in X$ esistono $y \in Y$ ed un cammino $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ tali che $\alpha(0) = y$ e $\alpha(1) = x$. Possiamo allora scrivere

$$(x) = (y) + \partial\alpha \in C_0(S_{\bullet}(X));$$

dunque ogni generatore di $C_0(S_{\bullet}(X))$ appartiene a $F + B_0(S_{\bullet}(X))$ e questo implica che $F + B_0(S_{\bullet}(X)) = C_0(S_{\bullet}(X))$.

Sia $p: X \rightarrow \pi_0(X)$ l'applicazione che ad ogni punto di x associa la sua componente connessa per archi: per costruzione la sua restrizione a Y è bigettiva. Denotiamo con G il gruppo abeliano libero generato da $\pi_0(X)$, allora p si estende ad un omomorfismo surgettivo $p: C_0(S_{\bullet}(X)) \rightarrow G$ e la sua restrizione $p: F \rightarrow G$ è un isomorfismo. Per ogni cammino α si ha $p\partial\alpha = p(\alpha(1)) - p(\alpha(0)) = 0$ e quindi $p(B_0(S_{\bullet}(X))) = 0$. Ma questo implica che $F \cap B_0(S_{\bullet}(X)) = 0$ e di conseguenza che $C_0(S_{\bullet}(X)) = F \oplus B_0(S_{\bullet}(X))$. \square

PROPOSIZIONE 4.4.7. *Siano X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un punto base. Esiste allora un omomorfismo canonico di gruppi $\theta: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$.*

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo per definire θ insiemisticamente e dimostriamo successivamente che è un omomorfismo. Sia $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ è un cammino chiuso con punto base $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, allora lo 1-simplesso singolare $\alpha'(1-t, t) = \alpha(t)$ è un ciclo in $C_1(S_{\bullet}(X))$: infatti

$$\partial\alpha' = \partial_0\alpha' - \partial_1\alpha' = \alpha'(0, 1) - \alpha'(1, 0) = \alpha(1) - \alpha(0) = x_0 - x_0 = 0.$$

Se $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ sono due cammini chiusi omotopi e con punto base x_0 , vogliamo dimostrare che la differenza $\alpha' - \beta'$ è un bordo in $C(S_{\bullet}(X))$ e quindi che i cicli α' e β' definiscono la stessa classe di omologia.

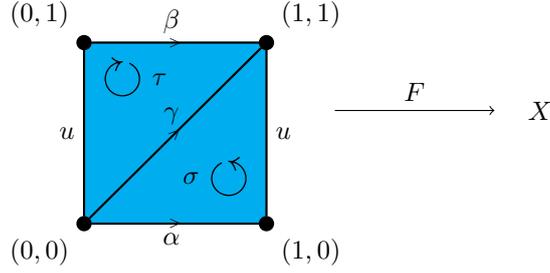
Denotiamo con $u: [0, 1] \rightarrow X$ il cammino costante $u(t) = x_0$. Per ipotesi esiste un'omotopia di cammini $F: [0, 1]^2 \rightarrow X$:

$$F(t, 0) = \alpha(t), \quad F(t, 1) = \beta(t), \quad F(0, s) = F(1, s) = x_0, \quad s, t \in [0, 1].$$

Consideriamo adesso il cammino "diagonale" $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, $\gamma(t) = F(t, t)$ ed i due semplici singolari (vedi Figura 2) $\sigma, \tau: \Delta_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow X$,

$$\sigma(t_0, t_1, t_2) = F(t_0(0, 0) + t_1(1, 0) + t_2(1, 1)) = F(t_1 + t_2, t_2),$$

$$\tau(t_0, t_1, t_2) = F(t_0(0, 0) + t_1(0, 1) + t_2(1, 1)) = F(t_2, t_1 + t_2).$$

FIGURA 2. I cammini chiusi α e β sono omologhi.

Le facce di σ, τ sono (ricordarsi che $t_0 + t_1 + t_2 = 1$):

$$\begin{aligned} \partial_0\sigma(t_0, t_1) &= \sigma(0, t_0, t_1) = F(1, t_1) = u(t_1) = u'(t_0, t_1), & \Rightarrow \quad \partial_0\sigma &= u', \\ \partial_1\sigma(t_0, t_1) &= \sigma(t_0, 0, t_1) = F(t_1, t_1) = \gamma(t_1) = \gamma'(t_0, t_1), & \Rightarrow \quad \partial_1\sigma &= \gamma', \\ \partial_2\sigma(t_0, t_1) &= \sigma(t_0, t_1, 0) = F(t_1, 0) = \alpha(t_1) = \alpha'(t_0, t_1), & \Rightarrow \quad \partial_2\sigma &= \alpha', \\ \partial_0\tau(t_0, t_1) &= \tau(0, t_0, t_1) = F(t_1, 1) = \beta(t_1) = \beta'(t_0, t_1), & \Rightarrow \quad \partial_0\tau &= \beta', \\ \partial_1\tau(t_0, t_1) &= \tau(t_0, 0, t_1) = F(t_1, t_1) = \gamma(t_1) = \gamma'(t_0, t_1), & \Rightarrow \quad \partial_1\tau &= \gamma', \\ \partial_2\tau(t_0, t_1) &= \tau(t_0, t_1, 0) = F(0, t_1) = u(t_1) = u'(t_0, t_1), & \Rightarrow \quad \partial_2\tau &= u', \end{aligned}$$

da cui segue

$$\partial(\sigma - \tau) = (\partial_0 - \partial_1 + \partial_2)(\sigma - \tau) = \alpha' - \beta'.$$

La precedente costruzione $\alpha \mapsto \alpha'$ permette quindi di definire un'applicazione di insiemi $\theta: \pi(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. Se $\sigma \in S_2(X)$ è il semplice che vale costantemente x_0 , allora $\partial\sigma = u' - u' + u' = u'$ e quindi u' è un bordo.

Per concludere resta da dimostrare che per ogni coppia di cammini chiusi $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ con punto base x_0 si ha $\theta(\alpha\beta) = \alpha' + \beta'$ in $H_1(X)$. Si consideri il 2-simplesso singolare

$$\sigma(s_0, s_1, s_2) = \begin{cases} \alpha(s_1 + 2s_2) = \alpha(1 + s_2 - s_0) & \text{se } s_0 \geq s_2 \\ \beta(s_2 - s_0) = \beta(2s_2 + s_1 - 1) & \text{se } s_0 \leq s_2 \end{cases}.$$

Se $s_0 = s_2$ allora $s_1 + 2s_2 = 1$ e $s_2 - s_0 = 0$ e quindi σ è ben definito poiché $\alpha(1) = \beta(0)$. Si ha:

$$\partial_0\sigma(t_0, t_1) = \sigma(0, t_0, t_1) = \beta(t_1) = \beta'(t_0, t_1)$$

$$\partial_2\sigma(t_0, t_1) = \sigma(t_0, t_1, 0) = \alpha(t_1) = \alpha'(t_0, t_1)$$

$$\partial_1\sigma(t_0, t_1) = \sigma(t_0, 0, t_1) = \begin{cases} \alpha(2t_1) & \text{se } t_1 \leq t_0 \iff t_1 \leq 1/2 \\ \beta(t_1 - t_0) = \beta(2t_1 - 1) & \text{se } t_1 \geq t_0 \iff t_1 \geq 1/2 \end{cases}$$

Ricordando la definizione di prodotto di giunzione di cammini chiusi si ha dunque che $\partial_1\sigma = (\alpha\beta)'$ è omologo (=equivalente in omologia) a $\partial_0\sigma + \partial_2\sigma = \alpha' + \beta'$. \square

Riportiamo senza dimostrazione, che è lunga ma non particolarmente difficile, il seguente risultato che estende la precedente proposizione.

TEOREMA 4.4.8. *Siano X uno spazio topologico connesso per archi e $x_0 \in X$ un punto base. Allora l'omomorfismo $\theta: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ è surgettivo ed ha come nucleo il sottogruppo dei commutatori, ossia il sottogruppo generato da tutti i prodotti del tipo $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ al variare di $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$.*

Possiamo reinterpretare il teorema dicendo che negli spazi connessi per archi, il primo gruppo di omologia è il più grande quoziente abeliano del gruppo fondamentale.

La costruzione dei semplici singolari commuta con i prodotti: infatti, per ogni coppia di spazi topologici X_1, X_2 , dare un'applicazione continua $\alpha: \Delta_{\mathbb{R}}^n \rightarrow X_1 \times X_2$ è la stessa cosa che

dare le due componenti $\alpha_i: \Delta_{\mathbb{R}}^n \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$. Ne segue che esiste un isomorfismo canonico

$$S_{\bullet}(X_1 \times X_2) = S_{\bullet}(X_1) \times S_{\bullet}(X_2).$$

Ogni applicazione continua $\phi: X \rightarrow Y$ induce per composizione un morfismo di insiemi simpliciali $\phi_{\bullet}: S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}(Y)$:

$$\phi_n: S_n(X) \rightarrow S_n(Y), \quad \phi_n \alpha = \phi \circ \alpha, \quad \alpha: \Delta_{\mathbb{R}}^n \rightarrow X.$$

Infatti, per ogni $f: [n] \rightarrow [m]$ ed ogni $\alpha \in S_m(X)$ si ha:

$$f^*(\phi_n \alpha) = (\phi_n \alpha) \circ f_{\mathbb{R}} = \phi \circ \alpha \circ f_{\mathbb{R}} = \phi \circ (f^* \alpha) = \phi_n(f^* \alpha).$$

È chiaro che se ϕ è un omeomorfismo, allora ϕ_{\bullet} è un isomorfismo di insiemi simpliciali.

Di conseguenza ogni applicazione continua $\phi: X \rightarrow Y$ induce un morfismo di complessi di catene $\phi: C(S_{\bullet}(X)) \rightarrow C(S_{\bullet}(Y))$ e quindi dei morfismi tra gruppi di omologia singolare

$$\phi: H_n(X) \rightarrow H_n(Y).$$

DEFINIZIONE 4.4.9. Per ogni $p \geq 0$ è definito in maniera canonica un morfismo di insiemi simpliciali

$$(-)_{\mathbb{R}}: \Delta[p]_{\bullet} \rightarrow S_{\bullet}(\Delta_{\mathbb{R}}^p), \quad f \mapsto f_{\mathbb{R}}.$$

Infatti, per ogni $\alpha \in \Delta[p]_m$ ed ogni $f: [n] \rightarrow [m]$ si ha

$$f^*(\alpha_{\mathbb{R}}) = \alpha_{\mathbb{R}} \circ f_{\mathbb{R}} = (\alpha \circ f)_{\mathbb{R}} = (f^* \alpha)_{\mathbb{R}}.$$

Per future applicazioni è utile osservare che se $f: [n] \rightarrow [p]$ è il morfismo costante $f(i) = k$, $\forall i$, allora $f_{\mathbb{R}}: \Delta_{\mathbb{R}}^n \rightarrow \Delta_{\mathbb{R}}^p$ vale costantemente e_k .

LEMMA 4.4.10. Per ogni spazio topologico X le due applicazioni continue

$$j_0, j_1: X \rightarrow X \times \Delta_{\mathbb{R}}^1, \quad j_0(x) = (x, e_0), \quad j_1(x) = (x, e_1),$$

inducono lo stesso morfismo in omologia singolare

$$j_0 = j_1: H_*(X) \rightarrow H_*(X \times \Delta_{\mathbb{R}}^1).$$

(Nota: vedremo a posteriori che j_0, j_1 sono isomorfismi in omologia in quanto equivalenze omotopiche).

DIMOSTRAZIONE. Definiamo il morfismo di insiemi simpliciali

$$H: S_{\bullet}(X) \times \Delta[1]_{\bullet} \rightarrow S_{\bullet}(X) \times S_{\bullet}(\Delta_{\mathbb{R}}^1) = S_{\bullet}(X \times \Delta_{\mathbb{R}}^1), \quad H(x, f) = (x, f_{\mathbb{R}}).$$

Siano $i_0, i_1: S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}(X) \times \Delta[1]_{\bullet}$ i morfismi di insiemi simpliciali definiti nel Corollario 4.2.4. È chiaro dalle definizioni che per $a = 0, 1$ si ha

$$j_a = Hi_a: S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}(X) \times \Delta[1]_{\bullet} \rightarrow S_{\bullet}(X \times \Delta_{\mathbb{R}}^1)$$

e siccome i_0, i_1 inducono lo stesso morfismo in omologia, a maggior ragione lo stesso vale per j_0, j_1 . \square

Ricordiamo che due applicazioni continue $f, g: X \rightarrow Y$ si dicono omotope se esiste un'applicazione continua $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $f(x) = F(x, 0)$ e $g(x) = F(x, 1)$. Usando l'omeomorfismo canonico

$$[0, 1] \rightarrow \Delta_{\mathbb{R}}^1, \quad t \mapsto (1-t)e_0 + te_1,$$

possiamo dire che f è omotopa a g se esiste un'applicazione continua $F: X \times \Delta^1(\mathbb{R}) \rightarrow Y$ tale che $f(x) = F(x, e_0)$, $g(x) = F(x, e_1)$.

TEOREMA 4.4.11. Due applicazioni continue omotope $f, g: X \rightarrow Y$ inducono gli stessi morfismi in omologia $f = g: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $F: X \times \Delta_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow Y$ continua tale che $f = Fj_0$ e $g = Fj_1$. Siccome le due immersioni $j_0, j_1: X \rightarrow X \times \Delta_{\mathbb{R}}^1$ inducono gli stessi morfismi in omologia, a maggior ragione lo stesso vale per le composizioni Fj_0 e Fj_1 . \square

In particolare se $f: X \rightarrow X$ è omotopa all'identità, allora f induce l'identità in omologia.

Ricordiamo che un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ si dice un'equivalenza omotopica se esiste $g: Y \rightarrow X$ continua e tale che entrambe le composizioni gf e fg sono omotope all'identità, su X e Y rispettivamente.

COROLLARIO 4.4.12. *Ogni equivalenza omotopica induce isomorfismi in omologia.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ continue con entrambe le composizioni gf e fg omotope all'identità. Allora entrambe le composizioni

$$H_n(X) \xrightarrow{f} H_n(Y) \xrightarrow{g} H_n(X), \quad H_n(Y) \xrightarrow{g} H_n(X) \xrightarrow{f} H_n(Y),$$

sono le applicazioni identiche e quindi g è l'inversa di f in omologia. \square

In particolare tutti gli spazi topologici contraibili (ad esempio i sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n) hanno la stessa omologia del punto.

Enunciamo adesso senza dimostrazione alcuni teoremi riguardanti l'omologia singolare.

TEOREMA 4.4.13 (Omologia delle sfere). *Sia $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ la sfera di dimensione n . Per ogni $n > 0$ si ha:*

$$H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}, \quad H_i(S^n) = 0 \text{ per ogni } i \neq 0, n.$$

In particolare S^n è omotopicamente equivalente a S^m se e solo se $n = m$. Più in generale, se $X = S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ è un prodotto di sfere, con $n_i > 0$ per ogni i , allora per ogni m il gruppo $H_m(X)$ è abeliano libero di rango uguale al numero di sottoinsiemi $A \subset \{1, \dots, k\}$ tali che $m = \sum_{i \in A} n_i$.

Ad esempio, se $n_i = 1$ per ogni i , ossia $X = (S^1)^k$, allora il gruppo $H_m(X)$ è abeliano libero di rango $\binom{k}{m}$.

TEOREMA 4.4.14. *Se X è una varietà differenziabile compatta, i gruppi di omologia $H_i(X)$ sono finitamente generati.*

TEOREMA 4.4.15. *Sia $|K| \subset \mathbb{R}^n$ la realizzazione geometrica di un complesso simpliciale astratto K . Allora $H_n(|K|) = H_n(K)$ per ogni n .*

TEOREMA 4.4.16 (Successione esatta di Mayer-Vietoris). *Siano $U, V \subset X$ due aperti tali che $X = U \cup V$. Allora esiste una successione esatta lunga*

$$\cdots \rightarrow H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X) \rightarrow 0.$$

Se l'inclusione $U \cap V \subseteq V$ induce un isomorfismo in omologia, allora anche l'inclusione $U \subseteq X$ induce un isomorfismo in omologia.

La dimostrazione della successione esatta di Mayer-Vietoris in omologia singolare è in parte simile al caso dei complessi simpliciali, ma con una complicazione aggiuntiva. Infatti le inclusioni $U \subset X$ e $V \subset X$ inducono due inclusioni di insiemi simpliciali $S_\bullet(U) \subset S_\bullet(X)$, $S_\bullet(V) \subset S_\bullet(X)$ tali che $S_\bullet(U) \cap S_\bullet(V) = S_\bullet(U \cap V)$ e lo stesso argomento usato nella dimostrazione del Teorema 3.3.2 mostra che esiste una successione esatta

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(S_\bullet(U) \cup S_\bullet(V)) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(S_\bullet(U) \cup S_\bullet(V)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Data la natura dei semplici singolari in generale si ha $S_\bullet(U) \cup S_\bullet(V) \neq S_\bullet(X)$ e quindi per concludere è necessario ricorrere al seguente teorema.

TEOREMA 4.4.17 (di suddivisione dei semplici). *Sia $X = \cup_i U_i$ un (qualunque) ricoprimento aperto di uno spazio topologico X . Allora l'inclusione di insiemi simpliciali*

$$\bigcup_i S_\bullet(U_i) \subset S_\bullet(X)$$

induce un'equivalenza omotopica di complessi di catene

$$C_*\left(\bigcup_i S_\bullet(U_i)\right) = \bigoplus_i C_*(S_\bullet(U_i)) \rightarrow C_*(S_\bullet(X))$$

e di conseguenza un isomorfismo in omologia

$$H_n\left(\bigcup_i S_\bullet(U_i)\right) = H_n(S_\bullet(X)), \quad \forall n.$$

4.5. Omologia con coefficienti

Sia X_\bullet un insieme simpliciale. Abbiamo definito il gruppo delle p -catene $C_p(X_\bullet)$ come il gruppo abeliano libero generato da X_p . Dato che i gruppi abeliani liberi sono anche detti \mathbb{Z} -moduli liberi, spesso si usa la notazione $H_n(X_\bullet, \mathbb{Z})$ per indicare $H_n(X_\bullet)$. La stessa notazione si applica sia ai complessi simpliciali astratti, sia agli spazi topologici.

La stessa identica costruzione si può fare considerando un qualsiasi campo \mathbb{K} e definire $C_p(X_\bullet, \mathbb{K})$ come lo spazio vettoriale su \mathbb{K} generato da X_p . Tutta la teoria generale si comporta allo stesso modo (con spazi vettoriali al posto di gruppi abeliani ed applicazioni lineari al posto degli omomorfismi) ed otteniamo un complesso di catene $C(X_\bullet, \mathbb{K})$ i cui spazi vettoriali di omologia sono denotati $H_n(X_\bullet, \mathbb{K})$. Lo stesso si può fare per complessi simpliciali astratti e spazi topologici.

In linea teorica, lo studio dei gruppi $H_n(X, \mathbb{K})$ non ci fornisce alcuna ulteriore informazione su X dato che per un teorema generale di algebra omologica (lo studio dei complessi di catene) detto **teorema dei coefficienti universali**, i gruppi $H_n(X, \mathbb{Z}) = H_n(X)$ determinano univocamente i gruppi $H_n(X, \mathbb{K})$. Ad esempio è abbastanza facile dimostrare che se \mathbb{K} è un campo di caratteristica 0, allora $H_n(X, \mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale al rango di $H_n(X, \mathbb{Z})$. Se la caratteristica del campo è positiva allora la dimensione è maggiore od uguale al rango e la differenza dipende (in maniera ben definita ma di lunga e laboriosa descrizione) dal sottogruppo di torsione di $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$.

Tuttavia, lo studio dei gruppi di omologia con coefficienti è importante per almeno tre ordini di motivi:

- (1) i gruppi $H_n(X, \mathbb{K})$ sono generalmente più semplici da calcolare rispetto ai gruppi $H_n(X)$. Ad esempio in *topologia computazionale*, dove si ha a che fare con complessi simpliciali astratti K con moltissimi vertici, il calcolo di $H_n(K, \mathbb{Z}/(2))$ richiede una potenza computazionale molto minore di quella necessaria per determinare $H_n(K, \mathbb{Z})$.
- (2) alcuni teoremi generali forniscono strumenti per calcolare i gruppi $H_n(X, \mathbb{K})$ per opportuni campi \mathbb{K} ma non i gruppi $H_n(X, \mathbb{Z})$. Ad esempio, per X varietà differenziabile, il *teorema di de Rham* fornisce una ricetta per il calcolo degli spazi vettoriali duali di $H_n(X, \mathbb{R})$ in termini di forme differenziali su X .
- (3) i gruppi $H_n(X, \mathbb{K})$ intervengono naturalmente in svariate teorie matematiche. Ad esempio:
 - (a) con $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2$ in *omologia persistente* e nella teoria delle *classi caratteristiche*;
 - (b) con $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ in *omotopia razionale* e *teoria di Hodge*;
 - (c) con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ in *geometria algebrica* e *teoria di de Rham*.

Spazi pseudometrici

Vogliamo introdurre una struttura matematica che si pone a metà strada tra gli spazi metrici e gli spazi topologici.

Innanzitutto estendiamo, nel modo naturale, la relazione di ordine e l'operazione di somma all'insieme $[0, +\infty] = [0, +\infty] \cup \{+\infty\}$, ossia:

$$a + \infty = +\infty, \quad a \leq +\infty, \quad \forall a \in [0, +\infty].$$

Notiamo che, con tale ordinamento, ogni sottoinsieme di $[0, +\infty]$ possiede estremo inferiore ed estremo superiore. È curioso osservare che, in totale spregio all'intuizione, nel caso del sottoinsieme vuoto $\emptyset \subset [0, +\infty]$ si ha

$$\inf \emptyset = +\infty > 0 = \sup \emptyset :$$

Infatti $[0, +\infty]$ è contemporaneamente l'insieme dei maggioranti e dei minoranti del sottoinsieme vuoto.

DEFINIZIONE 5.0.1. Uno **spazio pseudo-metrico** è una coppia (X, d) con X insieme e $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ un'applicazione, detta **pseudo-distanza** o più semplicemente **distanza**, che soddisfa le seguenti proprietà:

- (1) $d(x, x) = 0$ per ogni $x \in X$;
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.

È immediato dalle definizioni che uno spazio pseudo-metrico (X, d) è uno spazio metrico nel senso usuale se in aggiunta alle precedenti valgono le due ulteriori condizioni:

- $d(x, y) = 0$ solo se $x = y$;
- $d(x, y) < +\infty$ per ogni $x, y \in X$.

Nelle prossime sezioni, dopo aver studiato le prime proprietà degli spazi pseudo-metrici, illustreremo alcuni esempi che rivestiranno un certo interesse nel prossimo capitolo.

5.1. Proprietà ed esempi basilari

Ogni spazio metrico è un esempio di spazio pseudo-metrico. Ogni spazio pseudo-metrico (X, d) è anche uno spazio topologico, con gli aperti definiti nel modo usuale, ossia $U \subset X$ è aperto se e solo se per ogni $x \in U$ esiste $r > 0$ tale che $B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subset U$.

DEFINIZIONE 5.1.1. Diremo che uno spazio pseudo-metrico (X, d) è **di Hausdorff** se $d(x, y) \neq 0$ per ogni $x \neq y$.

È immediato verificare che uno spazio pseudo-metrico è di Hausdorff se e solo se la topologia indotta è di Hausdorff.

ESEMPIO 5.1.2. Siano (X, d) uno spazio pseudo-metrico e $f: Y \rightarrow X$ un'applicazione qualsiasi. Allora la funzione

$$\delta: Y \times Y \rightarrow [0, +\infty], \quad \delta(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)),$$

è una pseudo-distanza su Y .

ESEMPIO 5.1.3. Sia X l'insieme delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone decrescenti, ossia tali che $f(x) \leq f(y)$ per ogni $x \geq y$.

Date $f, g \in X$ definiamo

$$I(f, g) = \{\epsilon \in [0, +\infty[\mid f(x) \geq g(x + \epsilon) \text{ e } g(x) \geq f(x + \epsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$d_{\bowtie}(f, g) = \begin{cases} +\infty & \text{se } I(f, g) = \emptyset \\ \inf I(f, g) & \text{se } I(f, g) \neq \emptyset \end{cases}.$$

Allora la coppia (X, d_{\bowtie}) è uno spazio pseudo-metrico.

Le condizioni $d_{\bowtie}(f, f) = 0$ e $d_{\bowtie}(f, g) = d_{\bowtie}(g, f)$ sono evidenti, così come la disuguaglianza triangolare $d_{\bowtie}(f, g) \leq d_{\bowtie}(f, h) + d_{\bowtie}(h, g)$ qualora $d_{\bowtie}(f, h) + d_{\bowtie}(h, g) = +\infty$. Supponiamo quindi che $a = d_{\bowtie}(f, h) < +\infty$ e $b = d_{\bowtie}(h, g) < +\infty$. Siccome ogni funzione in X è decrescente, se $\epsilon \in I(f, g)$ e $\delta > \epsilon$, allora $\delta \in I(f, g)$, ciò significa che per ogni $\epsilon > 0$ ed ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$f(x) \geq h(x + a + \epsilon), \quad h(x) \geq f(x + a + \epsilon), \quad h(x) \geq g(x + b + \epsilon), \quad g(x) \geq h(x + b + \epsilon),$$

da cui segue

$$f(x) \geq h(x + a + \epsilon) \geq g(x + a + b + 2\epsilon), \quad g(x) \geq h(x + b + \epsilon) \geq f(x + a + b + 2\epsilon),$$

$$a + b + 2\epsilon \in I(f, g), \quad d_{\bowtie}(f, g) \leq a + b + 2\epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Da notare che lo spazio pseudo-metrico (X, d_{\bowtie}) **non** è di Hausdorff. Infatti per le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

vale $f(x) \geq g(x) \geq f(x + \epsilon)$ per ogni x ed ogni $\epsilon > 0$ da cui segue $d_{\bowtie}(f, g) = 0$.

ESEMPIO 5.1.4. Sia (X, d) uno spazio pseudo-metrico e consideriamo l'applicazione

$$\delta: X \times X \rightarrow [0, +\infty], \quad \delta(x, y) = \min(1, d(x, y)).$$

Allora δ è una pseudo-distanza che induce la stessa topologia di d .

Dato uno spazio pseudo-metrico (X, d) segue immediatamente dalle proprietà di d che la relazione “ $x \sim y$ se e solo se $d(x, y) = 0$ ” è una relazione di equivalenza. Se $x_1 \sim x_2$ e $y_1 \sim y_2$, per la disuguaglianza triangolare si ottiene

$$d(x_2, y_2) \leq d(x_2, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) = d(x_1, y_1),$$

$$d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) + d(y_2, y_1) = d(x_2, y_2),$$

e quindi $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$, ossia d si fattorizza ad una applicazione al quoziente

$$d: \frac{X}{\sim} \times \frac{X}{\sim} \rightarrow [0, +\infty].$$

Lasciamo al lettore la semplice verifica che $(X/\sim, d)$ è uno spazio pseudo-metrico di Hausdorff.

DEFINIZIONE 5.1.5. Sia (X, d) uno spazio pseudo-metrico. Per ogni sottoinsieme $A \subset X$, l'applicazione *distanza da A* è definita come:

$$d_A: X \rightarrow [0, +\infty], \quad d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Ad esempio, se $A = X$ allora d_A vale costantemente 0, mentre se $A = \emptyset$ allora d_A vale costantemente $+\infty$.

LEMMA 5.1.6. Siano (X, d) uno spazio pseudo-metrico e $A \subset X$. Allora per ogni $x, y \in X$ vale la disuguaglianza “triangolare”:

$$d_A(x) \leq d_A(y) + d(x, y).$$

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre $d_A(y) + d(x, y) < +\infty$ ed è sufficiente dimostrare che $d_A(x) \leq d_A(y) + d(x, y) + r$ per ogni $r > 0$.

Sia dunque $r > 0$ fissato, siccome $d_A(y) < +\infty$ esiste $z \in A$ tale che $d(y, z) \leq d_A(y) + r$. Ma allora

$$d_A(x) \leq d(x, z) \leq d(y, z) + d(y, x) \leq d_A(y) + r + d(x, y).$$

□

LEMMA 5.1.7. Siano (X, d) uno spazio pseudo-metrico e $A \subset X$. Allora, nella topologia indotta dalla pseudo-metrica, per ogni $r \in [0, +\infty]$ l'insieme

$$V_r(A) = \{x \in X \mid d_A(x) < r\} = \{x \in X \mid B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

è un aperto e

$$\overline{A} = \{x \in X \mid d_A(x) = 0\},$$

è la chiusura di A .

DIMOSTRAZIONE. Se $r = 0$ allora $V_r(A) = \emptyset$. Se $r > 0$ e $x \in V_r(A)$, per definizione di d_A esiste un punto $a \in A$ tale che $d_A(x) \leq d(x, a) < r$. Preso un $\delta > 0$ tale che $d(x, a) + \delta < r$, segue dalla disuguaglianza triangolare che $d(a, z) < r$ per ogni $z \in B_d(x, \delta)$ da cui segue $x \in B_d(x, \delta) \subset V_r(A)$.

Sia $x \in X$; per definizione di chiusura vale $x \in \overline{A}$ se e solo se per ogni $\delta > 0$ esiste $y \in A$ tale che $d(x, y) < \delta$ e questo vale se e solo se $d_A(x) = 0$. □

LEMMA 5.1.8. Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi pseudo-metrici e sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione di Lipschitz, ossia esiste un numero reale positivo $C > 0$ tale che $\delta(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$ per ogni $x, y \in X$. Allora f è continua rispetto alle topologie indotte dalle pseudo-distanze.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. □

ESEMPIO 5.1.9. Sia X insieme dotato di una funzione $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ tale che $f(x, x) = 0$ per ogni x e $f(x, y) = f(y, x)$ per ogni $x, y \in X$. Ad esempio, X può essere un grafo semplice pesato e $f(x, y)$ l'inverso del peso del lato di estremi x, y .

Partendo da f possiamo definire diverse pseudo-distanze su X , come ad esempio:

(1) **distanza del minimo cammino (shortest-path)**

$$d_s(x, y) = \inf_{S(x, y)} \sum_i f(x_i, x_{i+1});$$

(2) **distanza del collo di bottiglia (bottleneck)**¹

$$d_b(x, y) = \inf_{S(x, y)} \max_i f(x_i, x_{i+1});$$

dove entrambi gli estremi inferiori sono presi sull'insieme $S(x, y)$ di tutte le successioni finite $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $x_0 = x$ e $x_n = y$. La verifica che si tratta di pseudo-distanze è quasi ovvia.

5.2. Le distanze di Hausdorff e del collo di bottiglia

Dato uno spazio pseudo-metrico (X, d) esistono varie costruzioni di pseudo-distanze sull'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$; in questa sezione ne vedremo due, dette rispettivamente *distanza di Hausdorff* e *distanza del collo di bottiglia*.

Per ogni sottoinsieme $A \subset X$ ed ogni $r \in [0, +\infty]$ abbiamo definito il sottoinsieme

$$V_r(A) = \{x \in X \mid d_A(x) < r\} = \{x \in X \mid B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

che abbiamo visto essere aperto nella topologia indotta.

DEFINIZIONE 5.2.1. Dati due sottoinsiemi A, B di uno spazio pseudo-metrico (X, d) , la loro **distanza di Hausdorff** è definita come

$$d_H(A, B) = \inf\{r \in [0, +\infty] \mid A \subset V_r(B) \text{ e } B \subset V_r(A)\}.$$

¹Sarebbe più corretto dire "distanza del cammino con il minimo collo di bottiglia".

È chiara la simmetria $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ mentre dal fatto che $A \subset \bar{A}$ segue che $d_H(A, A) = 0$. Si noti che se $A = \emptyset$ allora $d_H(A, B) = +\infty$ qualunque sia B .

Rimane da dimostrare la disuguaglianza triangolare, ossia che per A, B, C sottoinsiemi di X vale $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$.

Non è restrittivo supporre $d_H(A, C) + d_H(C, B) < +\infty$ e denotiamo $r = d_H(A, C)$, $s = d_H(C, B)$. Per simmetria basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ vale $A \subset V_B(r + s + 2\varepsilon)$, ossia che per ogni $a \in A$ esiste $x \in B$ tale che $d(a, x) < r + s + 2\varepsilon$.

Sia $a \in A$, allora esiste $y \in C$ tale che $d(a, y) < r + \varepsilon$. Poi esiste $x \in B$ tale che $d(y, x) < s + \varepsilon$ e tutto segue dalla disuguaglianza triangolare per la distanza d .

ESEMPIO 5.2.2. Nel piano \mathbb{R}^2 , dotato della distanza euclidea, la distanza di Hausdorff tra un insieme limitato ed uno illimitato è $+\infty$. La distanza di Hausdorff tra le due circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $(x - 5)^2 + y^2 = 1$ è 5.

OSSERVAZIONE 5.2.3. Nel caso di due sottoinsiemi finiti $I, J \subseteq X$ possiamo sostituire l'estremo inferiore con il minimo e la distanza di Hausdorff può essere definita come

$$d_H(I, J) = \min \left\{ r \mid \begin{array}{l} \text{esistono applicazioni } \phi: I \rightarrow J, \psi: J \rightarrow I \text{ tali che} \\ d(x, \phi(x)) \leq r, d(y, \psi(y)) \leq r \text{ per ogni } x \in I, y \in J \end{array} \right\}.$$

LEMMA 5.2.4. *Dati due sottoinsiemi A, B di uno spazio pseudo-metrico (X, d) , la distanza $d_H(A, B)$ è l'estremo inferiore dell'insieme degli $r \in [0, +\infty]$ tali che per ogni $a \in A$ ed ogni $b \in B$ esistono $x \in B$ ed $y \in A$ tali che $d(a, x) < r$ e $d(b, y) < r$.*

DIMOSTRAZIONE. Per simmetria basta dimostrare che per $r \in [0, +\infty]$ fissato vale $A \subset V_r(B)$ se e solo se per ogni $a \in A$ esiste $x \in B$ tale che $d(a, x) < r$. Questo segue immediatamente dalla definizione di d_A e dalle proprietà dell'estremo inferiore. \square

Applicando l'assioma della scelta al lemma precedente otteniamo immediatamente il seguente risultato.

LEMMA 5.2.5. *Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio pseudo-metrico (X, d) tali che $d_H(A, B) < +\infty$. Allora per ogni $r > d_H(A, B)$ esistono due applicazioni $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ tali che $d(a, f(a)) < r$ per ogni $a \in A$ e $d(b, g(b)) < r$ per ogni $b \in B$.*

OSSERVAZIONE 5.2.6. In certi casi può essere interessante considerare la seguente generalizzazione nella definizione della distanza di Hausdorff. Supponiamo di avere uno spazio pseudo-metrico (X, d) dotato di un'applicazione $r: X \rightarrow [0, +\infty]$ che soddisfa la condizione

$$r(x) \leq r(y) + d(x, y) \text{ per ogni } x, y \in X.$$

Per ogni sottoinsieme $A \subset X$ ed ogni $t \in [0, +\infty]$ denotiamo

$$W_t(A) = \{x \in X \mid d_A(x) < t\} \cup \{x \in X \mid r(x) < t\}$$

e definiamo

$$\tilde{d}(A, B) = \inf \{t \in [0, +\infty] \mid A \subset W_t(B) \text{ e } B \subset W_t(A)\}.$$

Per mostrare che anche \tilde{d} è una pseudo-distanza si può ragionare nel modo seguente. Se $r = d_C$ è la distanza da un sottoinsieme $C \subset X$ si ha $\tilde{d}(A, B) = d_H(A \cup C, B \cup C)$. Nel caso generale prendiamo un qualsiasi insieme C non vuoto e disgiunto da X , ed estendiamo la pseudo-distanza d ad una pseudo distanza $\delta: (X \cup C) \times (X \cup C) \rightarrow [0, +\infty]$ ponendo $\delta(x, y) = d(x, y)$ se $x, y \in X$, $\delta(c, d) = 0$ se $c, d \in C$ e $\delta(x, c) = \delta(c, x) = r(x)$ se $x \in X$ e $c \in C$. Allora $r = d_C$ e ci siamo ricondotti al caso particolare.

Occupiamoci adesso della distanza bottleneck. Per future applicazioni conviene definire direttamente tale distanza nel contesto più generale dell'Osservazione 5.2.6, ossia di uno spazio pseudo-metrico (X, d) dotato di una funzione "di rumore" $r: X \rightarrow [0, +\infty]$ tale che

$$(5.1) \quad r(x) \leq d(x, y) + r(y), \quad \forall x, y \in X.$$

Tipicamente si considera come funzione di rumore la funzione $r = d_C$, distanza da un sottoinsieme $C \subset X$, vedi Lemma 5.1.6.

Osserviamo che, siccome $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ la condizione (5.1) equivale a dire che $r(y) \leq r(x) + d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Dati due sottoinsiemi $A, B \subset X$, per *appaiamento parziale* tra A e B si intende una terna (P, Q, f) , con $P \subset A$, $Q \subset B$ e $f: P \rightarrow Q$ bigettiva: è consentito a P, Q di essere vuoti. Vi è un'ovvia bigezione $(P, Q, f) \rightarrow (Q, P, f^{-1})$ tra gli appaiamenti parziale tra A e B e quelli tra B ed A .

Definiamo il costo di un appaiamento parziale come

$$\begin{aligned} c(P, Q, f) &= \sup \left(\{d(x, f(x)) \mid x \in P\} \cup \{r(x) \mid x \in (A - P) \cup (B - Q)\} \right) \\ &= \sup \left(\{d(x, f^{-1}(x)) \mid x \in Q\} \cup \{r(x) \mid x \in (A - P) \cup (B - Q)\} \right) \\ &= c(Q, P, f^{-1}). \end{aligned}$$

Definiamo poi la **distanza bottleneck**

$$d_b(A, B) = \inf c(P, Q, f) = \inf c(Q, P, f^{-1}),$$

dove l'estremo inferiore è calcolato sull'insieme di tutti gli appaiamenti parziali tra A e B .

È immediato osservare che $d_b(A, A) = 0$ e $d_b(A, B) = d_b(B, A)$ per ogni $A, B \subset X$. La dimostrazione della disuguaglianza triangolare

$$d_b(A, B) \leq d_b(A, C) + d_b(C, B)$$

richiede invece alcune considerazioni non banali.

Ovviamente basta considerare il caso in cui $a = d_b(A, C)$ e $b = d_b(C, B)$ sono entrambi $< +\infty$. Sia $\delta > 0$ fissato: scegliamo un appaiamento parziale (P, Q, f) di A e C tale che $c(P, Q, f) \leq a + \delta$ ed un appaiamento parziale (R, S, g) di C e B tale che $c(R, S, g) \leq b + \delta$.

Possiamo allora considerare la composizione $(f^{-1}(Q \cap R), g(Q \cap R), gf)$ che è un accoppiamento parziale di A e B . Per provare che $d_b(A, B) \leq a + b + 2\delta$ basta dimostrare che $c(f^{-1}(Q \cap R), g(Q \cap R), gf) \leq c(R, S, g) + c(P, Q, f)$; a tal fine dobbiamo analizzare separatamente 5 casi possibili:

- 1) se $x \in A - P$, allora $r(x) \leq c(P, Q, f)$;
- 2) se $x \in B - S$, allora $r(x) \leq c(R, S, g)$;
- 3) se $x \in P$ e $f(x) \notin R$ allora

$$r(x) \leq d(x, f(x)) + r(f(x)) \leq c(P, Q, f) + c(R, S, g);$$

- 4) se $x \in S - g(R \cap Q)$ allora esiste unico $y \in R - Q$ tale che $x = g(y)$ e si ha

$$r(x) \leq d(x, y) + r(y) \leq c(R, S, g) + c(P, Q, f);$$

- 5) se $x \in f^{-1}(Q \cap R)$ allora

$$d(x, gf(x)) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), gf(x)) \leq c(P, Q, f) + c(R, S, g).$$

5.3. La distanza di contiguità

La distanza di contiguità si applica alla classe dei complessi simpliciali astratti filtrati, che saranno di importanza fondamentale nello studio dell'omologia persistente.

DEFINIZIONE 5.3.1. Sia K un complesso simpliciale astratto. Una **funzione filtrante** su K è un'applicazione $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ tale che se $s \in K$ e $r \subset s$ allora $f(r) \leq f(s)$.

Equivalentemente, un'applicazione $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione filtrante se per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme **di livello**

$$K(t) = \{s \in K \mid f(s) \leq t\} = f^{-1}(] - \infty, t])$$

è un sottocomplesso simpliciale.

I sottocomplessi $K(t)$ soddisfano le condizioni

$$(5.2) \quad \bigcap_t K(t) = \emptyset, \quad \bigcup_t K(t) = K, \quad K(s) = \bigcap_{t>s} K(t) \text{ per ogni } s \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, è facile dimostrare che ogni famiglia $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, di sottocomplessi simpliciali di K che soddisfa le condizioni (5.2) è la famiglia dei sottoinsiemi di livello della funzione filtrante $f(\sigma) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \sigma \in K(t)\}$.

Per semplicità notazionale, quando non ci saranno rischi di ambiguità, chiameremo semplicemente **complesso filtrato** una coppia (K, f) con K complesso simpliciale astratto e $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ funzione filtrante.

ESEMPIO 5.3.2. Dato un complesso simpliciale astratto (K, I) , ogni applicazione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si estende ad una funzione filtrante

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\{x_0, \dots, x_p\}) = \max_i f(x_i).$$

ESEMPIO 5.3.3. Dato un qualunque sottoinsieme Y di uno spazio metrico (X, d) , la funzione

$$f: \Delta^Y \rightarrow [0, +\infty[, \quad f(\{y_0, \dots, y_p\}) = \frac{1}{2} \max_{i,j} d(y_i, y_j),$$

è filtrante. Il complesso filtrato (Δ^Y, f) viene chiamato, con un leggero abuso, **filtrazione di Vietoris-Rips** di Y .

Vedremo ulteriori ed interessanti esempi di complessi filtrati nei prossimi capitoli.

DEFINIZIONE 5.3.4. Un **morfismo** $\phi: (K, f) \rightarrow (H, g)$ di complessi filtrati è un morfismo di complessi simpliciali astratti $\phi: K \rightarrow H$ che preserva i sottocomplessi di livello, ossia tale che $\phi(K(t)) \subset H(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Il nostro prossimo obiettivo è quello di introdurre una struttura di spazio pseudo-metrico in una qualunque famiglia di complessi filtrati.

DEFINIZIONE 5.3.5. Sia $\epsilon \geq 0$ un numero reale. Un **ϵ -morfismo** $\phi: (K, f) \rightarrow (H, g)$ di complessi filtrati è un morfismo di complessi simpliciali astratti $\phi: K \rightarrow H$ tale che $\phi(K(t)) \subset H(t + \epsilon)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

È chiaro che i morfismi di complessi filtrati sono esattamente gli 0-morfismi. La composizione di un ϵ -morfismo con un ϱ -morfismo, qualora sia definita, è un $(\epsilon + \varrho)$ -morfismo. Infine, un ϵ -morfismo è automaticamente un ϱ -morfismo per ogni $\varrho \geq \epsilon$.

La condizione $\phi(K(t)) \subset H(t + \epsilon)$ può essere descritta in termini di funzioni filtranti grazie al seguente lemma.

LEMMA 5.3.6. *Siano (K, f) , (H, g) due complessi filtrati ed $\epsilon \geq 0$. Per un morfismo di complessi simpliciali $\phi: K \rightarrow H$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) $\phi(K(t)) \subset H(t + \epsilon)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ossia ϕ è un ϵ -morfismo;
- (2) $g(\phi(s)) \leq f(s) + \epsilon$ per ogni $s \in K$.

DIMOSTRAZIONE. Se $g(\phi(s)) \leq f(s) + \epsilon$ per ogni $s \in K$, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed ogni $s \in K(t)$ si ha $f(s) \leq t$, $g(\phi(s)) \leq f(s) + \epsilon \leq t + \epsilon$ e quindi $\phi(s) \in H(t + \epsilon)$.

Viceversa, se $\phi(K(t)) \subset H(t + \epsilon)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ allora, dato $s \in K$ si ha $s \in K(f(s))$; dunque $\phi(s) \in H(f(s) + \epsilon)$ che equivale a dire $g(\phi(s)) \leq f(s) + \epsilon$. \square

DEFINIZIONE 5.3.7. Sia $\epsilon \geq 0$. Una ϵ -contiguità tra due complessi filtrati (K, f) , (H, g) è una coppia di ϵ -morfismi $\phi: (K, f) \rightarrow (H, g)$, $\psi: (H, g) \rightarrow (K, f)$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha:

- (1) la composizione $\psi\phi: K(t) \rightarrow K(t + 2\epsilon)$ è contigua al morfismo di inclusione $K(t) \subset K(t + 2\epsilon)$;
- (2) la composizione $\phi\psi: H(t) \rightarrow H(t + 2\epsilon)$ è contigua al morfismo di inclusione $H(t) \subset H(t + 2\epsilon)$.

Diremo che due complessi filtrati sono ϵ -contigui se esiste una ϵ -contiguità tra loro.

Dal fatto che la relazione di contiguità commuta con le composizioni (Proposizione 3.2.10) si ha che ogni ϵ -contiguità $\phi: (K, f) \rightarrow (H, g)$, $\psi: (H, g) \rightarrow (K, f)$, è automaticamente una

ρ -contiguità per ogni $\rho \geq \epsilon$. Si consideri infatti, per ogni $t \in \mathbb{R}$, il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} K(t) & \longrightarrow & K(t+2\epsilon) & \longrightarrow & K(t+\epsilon+\rho) & \longrightarrow & K(t+2\rho) \\ & \searrow \phi & & \uparrow \psi & & \uparrow \psi & \nearrow \psi \\ & & H(t+\epsilon) & \longrightarrow & H(t+\rho) & & \end{array}$$

con le frecce orizzontali i morfismi di inclusione. Siccome il triangolo a sinistra commuta a meno di contiguità, mentre il rettangolo centrale ed il triangolo a destra sono commutativi in senso stretto, tutto il diagramma è commutativo a meno di contiguità. In particolare la composizione

$$K(t) \xrightarrow{\phi} H(t+\rho) \xrightarrow{\psi} K(t+2\rho)$$

è contigua all'inclusione $K(t) \rightarrow K(t+2\rho)$.

DEFINIZIONE 5.3.8 (Distanza di contiguità). Dati due complessi filtrati (K, f) , (H, g) definiamo

$$d_c((K, f), (H, g)) = \inf\{\epsilon \geq 0 \mid (K, f), (H, g) \text{ sono } \epsilon\text{-contigui}\}.$$

Poniamo inoltre $d_c((K, f), (H, g)) = +\infty$ se non esiste alcuna ϵ -contiguità.

È chiaro che $d_c((K, f), (K, f)) = 0$ e che $d_c((K, f), (H, g)) = d_c((H, g), (K, f))$.

TEOREMA 5.3.9. *Dati tre complessi filtrati (K, f) , (H, g) e (L, h) , si ha*

$$d_c((K, f), (L, h)) \leq d_c((K, f), (H, g)) + d_c((H, g), (L, h)).$$

Dunque la distanza di contiguità definisce una struttura di spazio pseudo-metrico su un qualunque insieme di complessi filtrati.

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con $d_c((K, f), (H, g)) = a$, $d_c((H, g), (L, h)) = b$. Se $\max(a, b) = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Se invece $a, b < +\infty$, come capita spesso con le disuguaglianze triangolari, dimostriamo che per ogni $\delta > 0$ si ha

$$d_c((K, f), (L, h)) \leq a + b + 2\delta.$$

Per ipotesi esiste $0 \leq \epsilon \leq a + \delta$ ed una ϵ -contiguità

$$\phi: (K, f) \rightarrow (H, g), \quad \psi: (H, g) \rightarrow (K, f).$$

Similmente esiste $0 \leq \rho \leq b + \delta$ ed una ρ -contiguità

$$\eta: (H, g) \rightarrow (L, h), \quad \mu: (L, h) \rightarrow (H, g).$$

Per concludere basta dimostrare che le composizioni

$$\eta\phi: (K, f) \rightarrow (L, h), \quad \psi\mu: (L, h) \rightarrow (K, f)$$

formano una $(\epsilon + \rho)$ -contiguità. Per simmetria, basta mostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ la composizione

$$K(t) \xrightarrow{\phi} H(t+\epsilon) \xrightarrow{\eta} L(t+\epsilon+\rho) \xrightarrow{\mu} H(t+\epsilon+2\rho) \xrightarrow{\psi} K(t+2\epsilon+2\rho)$$

è contigua all'inclusione $K(t) \rightarrow K(t+2\epsilon+2\rho)$. Ma questo segue dal fatto che la relazione di contiguità commuta con le composizioni e che si ha un diagramma commutativo a meno di contiguità

$$\begin{array}{ccccc} K(t) & \xrightarrow{\quad} & K(t+2\epsilon) & \xrightarrow{\quad} & K(t+2\epsilon+2\rho) \\ & \searrow \phi & & \searrow \phi & \nearrow \psi \\ & & H(t+\epsilon) & \xrightarrow{\quad} & H(t+\epsilon+2\rho) \\ & & & \searrow \eta & \nearrow \mu \\ & & & & L(t+\epsilon+\rho) \end{array}$$

con le frecce orizzontali i morfismi di inclusione. □

Siccome gli isomorfismi di complessi filtrati sono 0-contiguità, complessi filtrati isomorfi hanno pseudo-distanza nulla tra loro e quindi d_c definisce una struttura di spazio pseudo-metrico in qualsiasi famiglia di classi di isomorfismo di complessi filtrati.

TEOREMA 5.3.10. *Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio metrico (X, d) e dotiamo i complessi simpliciali completi Δ^A, Δ^B delle filtrazioni di Vietoris-Rips. Allora*

$$d_c(\Delta^A, \Delta^B) \leq d_H(A, B).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $d_H(A, B) < +\infty$ e proviamo che per ogni numero reale $r > d_H(A, B)$ vale $d_c(\Delta^A, \Delta^B) \leq r$.

Abbiamo visto che esistono due applicazioni $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ tali che $d(a, f(a)) < r$ e $d(b, g(b)) < r$ per ogni $a \in A$ ed ogni $b \in B$.

Il morfismo di complessi simpliciali $f: \Delta^A \rightarrow \Delta^B$ è un r -morfismo, ossia $f(\Delta^A(t)) \subset \Delta^B(t+r)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infatti se $\{x_0, \dots, x_n\} \in \Delta^A(t)$, per come è definita la filtrazione si ha $d(x_i, x_j) \leq 2t$ per ogni i, j e quindi

$$d(f(x_i), f(x_j)) \leq d(f(x_i), x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, f(x_j)) < t + 2r.$$

Similmente $g(\Delta^B(t)) \subset \Delta^A(t+r)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e resta da provare che le composizioni gf e fg sono contigue alle inclusioni.

Mostriamo che gf è direttamente contigua all'inclusione $A(t) \subset A(t+2r)$ per ogni t ossia che per ogni $\{x_0, \dots, x_n\} \in \Delta^A(t)$ vale $\{x_0, \dots, x_n, gf(x_1), \dots, gf(x_n)\} \in \Delta^A(t+2r)$. Per ogni $x \in A$ vale $d(x, gf(x)) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), gf(x)) < 2r$ e quindi, per ogni $i, j = 1, \dots, n$ si ha:

- (1) $d(x_i, x_j) \leq 2t \leq 2(t+2r)$;
- (2) $d(x_i, gf(x_j)) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, gf(x_j)) \leq 2t + 2r \leq 2(t+2r)$;
- (3) $d(gf(x_i), gf(x_j)) \leq d(x_i, x_j) + d(x_i, gf(x_i)) + d(x_j, gf(x_j)) \leq 2t + 4r$.

Per simmetria anche la composizione fg è direttamente contigua all'inclusione $B(t) \subset B(t+2r)$ per ogni t .

Dunque la coppia (f, g) è una r -contiguità e quindi $d_c(\Delta^A, \Delta^B) \leq r$. \square

5.4. Distanza di interfoglia

Introduciamo adesso uno degli oggetti principali di queste note.

DEFINIZIONE 5.4.1. Sia $T \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Un **modulo di persistenza** su T è il dato di:

- (1) per ogni $t \in T$ un gruppo abeliano $A(t)$;
- (2) per ogni $s, t \in T$ con $s \leq t$ un omomorfismo di gruppi $a_s^t: A(s) \rightarrow A(t)$.

Gli omomorfismi a_s^t devono soddisfare le seguenti condizioni:

- $a_s^s = \text{Id}_{A(s)}$ per ogni s ;
- $a_t^r \circ a_s^t = a_s^r$ per ogni $s \leq t \leq r$.

Per convenzione, quando l'insieme T non viene nominato, si intende un modulo di persistenza su \mathbb{R} .

Dal punto di vista notazionale, indicheremo i moduli di persistenza su T con delle terne (A, a, T) , dove A denota la totalità dei gruppi $A(s)$ ed a la totalità degli omomorfismi a_s^t . Quando $T = \mathbb{R}$ si scrive semplicemente (A, a) al posto di (A, a, \mathbb{R}) .

In alcuni casi, per ulteriore semplicità notazionale, scriveremo solamente (A, T) al posto di (A, a, T) , ed A al posto di (A, a, \mathbb{R}) .

OSSERVAZIONE 5.4.2. In linea teorica possiamo definire i moduli di persistenza su ogni insieme parzialmente ordinato, e più in generale su ogni categoria piccola. Tali trattazioni vanno al di là dei nostri obiettivi e vengono ignorate.

ESEMPIO 5.4.3. Sia K un complesso simpliciale filtrato, con sottocomplessi di livello $K(t)$. Per ogni $n \geq 0$ possiamo definire il modulo di persistenza (H_n, h) ponendo $H_n(t) = H_n(K(t))$ e $h_s^t: H_n(s) \rightarrow H_n(t)$ il morfismo in omologia indotto dall'inclusione di complessi simpliciali $K(s) \subset K(t)$.

Se $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione filtrante associata e l'insieme dei vertici di K è dotato di un ordinamento totale tale che l'applicazione $f: K^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona, allora il morfismo $h_{t,s}$ è indotto dal morfismo tra complessi di catene ordinate $C_*(K(s), <) \rightarrow C_*(K(t), <)$.

ESEMPIO 5.4.4. Siano X uno spazio topologico e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua; per ogni $t \in \mathbb{R}$ denotiamo $X(t) = \{x \in X \mid f(x) \leq t\}$. Per ogni $n \geq 0$ possiamo definire il modulo di persistenza (H_n, h) ponendo $H_n(t) = H_n(K(t))$ e $h_s^t: H_n(s) \rightarrow H_n(t)$ il morfismo in omologia singolare indotto dall'inclusione $X(s) \subset X(t)$.

La nozione di modulo di persistenza è molto generale e, al fine di estrarre invarianti algebrici significativi, è necessario aggiungere condizioni di regolarità e finitezza. Le più comuni sono elencate nelle seguenti quattro definizioni.

DEFINIZIONE 5.4.5. Un modulo di persistenza (A, a, T) si dice **q-tame** se per ogni $s, t \in T$, con $s > t$, l'immagine di $a_t^s: A(t) \rightarrow A(s)$ è un sottogruppo finitamente generato.

DEFINIZIONE 5.4.6. Un modulo di persistenza (A, a, T) si dice **semicontinuo** se per ogni $t \in T$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che a_t^s è un isomorfismo per ogni $s \in T \cap [t, t + \varepsilon[$.

DEFINIZIONE 5.4.7. Un modulo di persistenza (A, a, T) si dice **di tipo finito** se T è un insieme finito ed il gruppo $A(t)$ è finitamente generato per ogni $t \in T$.

DEFINIZIONE 5.4.8. Sia $\Delta \geq 0$ un numero reale non negativo; un modulo di persistenza (A, a, T) si dice un **Δ -modulo** se per ogni $t, s \in T$ con $s - t \geq \Delta$ si ha $a_t^s = 0$.

Esiste una nozione naturale di morfismo che rende i moduli di persistenza su di un T fissato una categoria.

DEFINIZIONE 5.4.9. Un **morfismo** $f: (P, p, T) \rightarrow (Q, q, T)$ di moduli di persistenza su T è il dato, per ogni $t \in T$ di un omomorfismo di gruppi $f_t: P(t) \rightarrow Q(t)$ tale che per ogni $s \leq t$ si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} P(s) & \xrightarrow{p_s^t} & P(t) \\ \downarrow f_s & & \downarrow f_t \\ Q(s) & \xrightarrow{q_s^t} & Q(t) \end{array}$$

Un **isomorfismo** è un morfismo f tale che ogni f_t è un isomorfismo di gruppi abeliani.

Dato un qualunque morfismo $f: (P, p, T) \rightarrow (Q, q, T)$ possiamo definire nella maniera ovvia il suo nucleo ed il suo conucleo, che risultano ancora essere moduli di persistenza su T :

$$\ker(f)(t) = \ker(f_t: P(t) \rightarrow Q(t)), \quad \text{coker}(f)(t) = \text{coker}(f_t: P(t) \rightarrow Q(t)).$$

DEFINIZIONE 5.4.10. Per un dato numero reale $\Delta \geq 0$, diremo che f ha Δ -nucleo (resp.: Δ -conucleo) se $\ker(f)$ (resp.: $\text{coker}(f)$) è un Δ -modulo.

Da questo momento, fino al termine della sezione consideriamo solamente moduli di persistenza su $T = \mathbb{R}$. Dato (P, p) un modulo di persistenza e $\delta \in \mathbb{R}$ possiamo definire il traslato di P tramite δ come il modulo di persistenza $(P[\delta], p[\delta])$, dove

$$P[\delta](t) = P(t + \delta), \quad p[\delta]_t^s = p_{t+\delta}^{s+\delta}.$$

È chiaro che $P[\delta + \kappa] = (P[\delta])[\kappa]$ e che per ogni $\delta \geq 0$ è definito un morfismo canonico “di sospensione”

$$s^\delta: P \rightarrow P[\delta], \quad s_t^\delta = p_t^{t+\delta}: P(t) \rightarrow P[\delta](t).$$

Inoltre la traslazione possiede le principali proprietà functoriali: in particolare, per ogni morfismo $f: P \rightarrow Q$ è definito il morfismo

$$f[\delta]: P[\delta] \rightarrow Q[\delta], \quad f[\delta]_t = f_{t+\delta},$$

che si comporta bene rispetto alla composizione.

DEFINIZIONE 5.4.11. Dato un numero reale ε e due moduli di persistenza (P, p) e (Q, q) , un morfismo $P \rightarrow Q[\varepsilon]$ viene detto ε -**morfismo** da P a Q

In altri termini, un ε -morfismo da P a Q è una famiglia di omomorfismi di gruppi

$$f_t: P(t) \rightarrow Q(t + \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R},$$

tali che per ogni $s \leq t$ si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} P(s) & \xrightarrow{p_s^t} & P(t) \\ \downarrow f_s & & \downarrow f_t \\ Q(s + \varepsilon) & \xrightarrow{q_{s+\varepsilon}^{t+\varepsilon}} & Q(t + \varepsilon) \end{array}$$

Ad esempio, per ogni $\varepsilon \geq 0$ il morfismo di sospensione $s^\varepsilon: P \rightarrow P[\varepsilon]$ è un ε -morfismo. Più in generale, per ogni ε -morfismo $f: P \rightarrow Q[\varepsilon]$ ed ogni $\delta \geq 0$ si ha che

$$s^\delta f = f[\delta]s^\delta: P \rightarrow Q[\varepsilon + \delta]$$

è un $(\varepsilon + \delta)$ -morfismo.

È chiaro dalle definizioni che gli 0-morfismi sono esattamente i morfismi definiti precedentemente, mentre l'analogo dell'isomorfismo per gli ε -morfismi viene detta ε -interfoggia.

DEFINIZIONE 5.4.12. Dato un numero reale $\varepsilon \geq 0$, chiameremo ε -**interfoggia** tra due moduli di persistenza (P, p) e (Q, q) il dato di due ε -morfismi

$$f: P \rightarrow Q[\varepsilon], \quad g: Q \rightarrow P[\varepsilon],$$

tali che le composizioni siano i morfismi di sospensione:

$$g[\varepsilon]f = s^{2\varepsilon}, \quad f[\varepsilon]g = s^{2\varepsilon}.$$

Si noti che la nozione di 0-interfoggia è del tutto equivalente a quella di isomorfismo. Si noti anche che se esiste una ε -interfoggia $f: P \rightarrow Q[\varepsilon]$, $g: Q \rightarrow P[\varepsilon]$, allora esiste anche una ρ -interfoggia per ogni $\rho \geq \varepsilon$, ad esempio:

$$s^{\rho-\varepsilon}f: P \rightarrow Q[\rho], \quad s^{\rho-\varepsilon}g: Q \rightarrow P[\rho].$$

LEMMA 5.4.13. *Sia*

$$f: P \rightarrow Q[\varepsilon], \quad g: Q \rightarrow P[\varepsilon],$$

una ε -interfoggia. Allora i due morfismi f, g hanno entrambi 2ε -nucleo e 2ε -conucleo.

DIMOSTRAZIONE. Per simmetria basta considerare il morfismo f . Siano $t \in \mathbb{R}$ e $x \in P(t)$ tale che $f_t(x) = 0$. Allora $p_t^{t+2\varepsilon}(x) = g_{t+\varepsilon}f_t(x) = 0$; quindi $p_t^{t+2\varepsilon}$ si annulla sul nucleo. Similmente se $x \in \text{coker}(f)_t$ è rappresentato da $y \in Q(t + \varepsilon)$, allora $q_{t+\varepsilon}^{t+3\varepsilon}$ è rappresentato da $f_{t+2\varepsilon}g_{t+\varepsilon}(y)$ che quindi appartiene all'immagine di f . \square

DEFINIZIONE 5.4.14. Dati due moduli di persistenza P, Q , definiamo la **distanza interfoggia**

$$d_i(P, Q) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid \text{esiste una } \varepsilon\text{-interfoggia tra } P \text{ e } Q \}.$$

Si ha $d_i(P, Q) = +\infty$ se e solo se non esistono interfoglie tra P e Q .

ESEMPIO 5.4.15. Dato che ogni isomorfismo è una 0-interfoggia, se P, Q sono due moduli di persistenza isomorfi, allora $d_i(P, Q) = 0$. Il viceversa è generalmente falso, ad esempio i due moduli

$$(P, p) = \begin{cases} P(t) = 0 & \text{se } t \leq 0 \\ P(t) = \mathbb{Z} & \text{se } t > 0 \\ p_s^t = \text{Id} & \text{per } s > 0 \end{cases}, \quad (Q, q) = \begin{cases} Q(t) = 0 & \text{se } t < 0 \\ Q(t) = \mathbb{Z} & \text{se } t \geq 0 \\ q_s^t = \text{Id} & \text{per } s \geq 0 \end{cases}$$

non sono isomorfi ma sono ε -interfogliati per ogni $\varepsilon > 0$

PROPOSIZIONE 5.4.16. *La distanza di interfoggia definisce una struttura di spazio pseudo-metrico su una qualunque insieme di moduli di persistenza su \mathbb{R} .*

DIMOSTRAZIONE. L'unica verifica non completamente banale è quella della disuguaglianza triangolare. Siano P, Q, R moduli di persistenza e si assuma $d_i(P, Q) + d_i(Q, R) < +\infty$; vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > d_i(P, Q)$ ed ogni $\delta > d_i(Q, R)$ esiste una $\varepsilon + \delta$ -interfoggia tra P e R .

Scegliamo una ε -interfoggia

$$f_t: P(t) \rightarrow Q(t + \varepsilon), \quad g_t: Q(t) \rightarrow P(t + \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R},$$

ed una δ -interfoggia

$$h_t: Q(t) \rightarrow R(t + \delta), \quad k_t: R(t) \rightarrow Q(t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si vede immediatamente che

$$h_{t+\varepsilon}f_t: P(t) \rightarrow R(t + \varepsilon + \delta), \quad g_{t+\delta}k_t: R(t) \rightarrow P(t + \varepsilon + \delta)$$

è la $\varepsilon + \delta$ -interfoggia cercata. \square

Mettiamoci adesso nella situazione dell'Esempio 5.4.3 e mostriamo che la distanza di interfoggia non supera la distanza di contiguità.

TEOREMA 5.4.17. *Siano K e L due complessi filtrati, $n \geq 0$, e consideriamo i due moduli di persistenza $H_n(K(t)), H_n(L(t))$. Allora*

$$d_i(H_n(K(t)), H_n(L(t))) \leq d_c(K, L).$$

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre $d_c(K, L) < +\infty$ e basta dimostrare che se esiste una ε -contiguità $f_t: K(t) \rightarrow L(t + \varepsilon)$, $g_t: L(t) \rightarrow K(t + \varepsilon)$ allora esiste anche una ε -interfoggia tra $H_n(K(t))$ e $H_n(L(t))$. Per definizione, $g_{t+\varepsilon}f_t$ è contigua all'inclusione $K(t) \subset K(t + 2\varepsilon)$. Dato che morfismi contigui inducono lo stesso morfismo in omologia si ha che $g_{t+\varepsilon}f_t = h_t^{t+2\varepsilon}: H_n(K(t)) \rightarrow H_n(K(t + 2\varepsilon))$. Per simmetria vale anche $f_{t+\varepsilon}g_t = h_t^{t+2\varepsilon}: H_n(L(t)) \rightarrow H_n(L(t + 2\varepsilon))$ e quindi i due ε -morfismi f_t, g_t definiscono una ε -interfoggia. \square

OSSERVAZIONE 5.4.18. Dati due spazi topologici X, Y dotati di funzioni continue $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$, il lettore volenteroso può provare a definire la "distanza di omotopia" tra (X, f) e (Y, g) e dimostrare l'analogo del Teorema 5.4.17.

Omologia Persistente

Per **analisi topologica dei dati** (TDA) si intende un insieme di tecniche, prevalentemente di natura topologica e statistica, che consentono di analizzare grandi quantità di dati in maniera estremamente stabile rispetto alle componenti di rumore, ossia rispetto a piccole e generiche perturbazioni dei dati raccolti.

Uno dei metodi topologici più usati in TDA è detto **omologia persistente**. Questo strumento permette di descrivere caratteristiche dei dati sotto forma di “buchi”, il cui numero e qualità dipende da uno o più parametri reali: l’abilità di identificare i “buchi” più persistenti al variare dei parametri fornisce un metodo piuttosto potente nell’analisi dei dati.

Attualmente il software open-source di riferimento in ambito scientifico per la TDA è *Mapper* [15].

6.1. L’incredibile ubiquità della topologia persistente

Riportiamo in questa breve sezione un estratto dall’articolo di Massimo Ferri (Università di Bologna) pubblicato su Maddmaths il 12 agosto 2015 e recuperabile per intero al sito maddmaths.simai.eu/divulgazione/focus/lincredibile-ubiquita-della-topologia-persistente/.

C’è una branca della matematica chiamata “Topologia persistente” che ha applicazioni spesso sorprendenti all’analisi della forma e ai problemi di classificazione e recupero dei dati. Cerchiamo di capire meglio di cosa si tratta.

La geometria offre ottimi strumenti alla visione artificiale e alla pattern recognition. I problemi di classificazione, riconoscimento, ricerca di difetti, recupero in database estesi si risolvono talvolta trovando una trasformazione (euclidea, affine o proiettiva) che sovrapponga un’immagine a un’altra; qui l’algebra matriciale risulta vincente. Soprattutto, però, questi problemi si affrontano associando ad ogni immagine una stringa di misure geometriche (descrittori di forma) compiute su di essa ed eseguendo classificazione, riconoscimento, ecc. sulle stringhe invece che sulle immagini. Questa prassi funziona benissimo su pezzi meccanici, veicoli, oggetti rigidi: per esempio Google riconosce un monumento anche se fotografato da un’angolazione insolita. Però le cose cambiano con immagini di origine naturale; la rigidità della geometria diventa un ostacolo: riconoscere la somiglianza fra un uomo seduto e uno in piedi è problematico.

È qui che la topologia, molto più “libera” della geometria, sembra essere la carta giusta da giocare. Invece che dalla sovrapposibilità mediante trasformazioni geometriche, l’equivalenza fra due spazi topologici X, Y è data dall’eventuale esistenza di un omeomorfismo $\varphi: X \rightarrow Y$, cioè una funzione continua con inversa continua. L’uomo seduto e l’uomo in piedi sono omeomorfi, cioè esiste fra loro un omeomorfismo, ma non una trasformazione geometrica. Allora basta sostituire la geometria con la topologia, l’algebra matriciale con l’omeomorfismo? Purtroppo ci sono due problemi.

In genere è difficile capire se due spazi sono omeomorfi o no. Allora interviene la topologia algebrica, che associa a uno spazio degli enti (invarianti) che risultano uguali per spazi omeomorfi. Perciò se due spazi X, Y hanno invarianti diversi sono sicuramente non omeomorfi (purtroppo il viceversa non vale).

Invarianti di questo tipo sono i numeri di Betti: $b_0(X)$ è il numero di componenti connesse (o 0-cicli), in pratica il numero di pezzi separati da cui è composto X ; $b_1(X)$ conta i buchi fatti “a circonferenza” di X (o 1-cicli, come quello di una ciambella); $b_2(X)$ conta i vuoti bidimensionali di X (come quelli di un pallone o di una camera d’aria; 2-cicli) e così via. Per

capire davvero il significato di questi concetti occorrono definizioni formali; non sono male l'articolo di Wikipedia *Betti number* e il più generale *Omologia*.

C'è un secondo problema: la geometria è troppo rigida, ma la topologia è troppo libera. La battuta “per un topologo una tazza con manico e una ciambella sono la stessa cosa” è fondata: i due oggetti sono omeomorfi; i numeri di Betti naturalmente coincidono: $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ eccetera per entrambi.

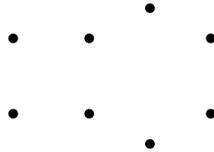
L'idea base della topologia persistente è di associare il concetto di forma non solo a uno spazio topologico X , ma ad una coppia (X, f) dove f è una funzione continua (che chiameremo *funzione filtrante*) definita su X , a valori solitamente nei numeri reali. A questo punto la topologia algebrica (in particolare il suo settore omologia, di cui fanno parte i numeri di Betti) viene applicata ad ogni insieme di sottolivello $X(t)$, costituito dai punti $x \in X$ per cui $f(x) \leq t$. Per esempio possiamo appoggiare una tazza X e una ciambella Y di eguale altezza sul tavolo, e usare come funzione f la quota, ossia la distanza dal pavimento. Entrambi gli oggetti hanno quota minima a e massima c . Se $a - \epsilon$ è un numero appena sotto ad a , allora $X(a - \epsilon) = Y(a - \epsilon) = \emptyset$; invece $X(c) = X$, $Y(c) = Y$. Se applichiamo l'omologia agli insiemi di sottolivello intermedi, ecco che possiamo distinguere tazza e ciambella! In realtà la teoria è più complicata (e più informativa) e si avvale di suoi specifici descrittori di forma: numeri di Betti persistenti, diagrammi di persistenza, barcode.

6.2. Allarga i punti e sfoca le immagini

persistente agg. [part. pres. di *persistere*]. - Che permane costantemente nel tempo, che si prolunga oltre il previsto o comunque per un lungo periodo; continuo, ostinato: ...

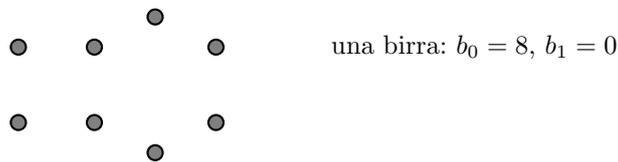
(dal Dizionario Treccani).

Consideriamo la seguente costellazione di 8 stelle nel cielo

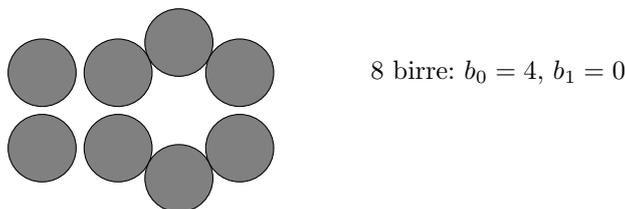


e chiediamoci quale figura rappresenta.

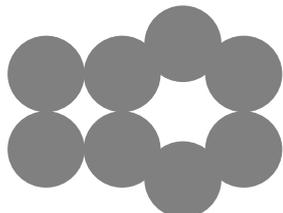
Una persona sobria vede solamente 8 punti separati, quindi una figura con 8 componenti connesse contraibili, ossia $b_0 = 8$ e $b_1 = 0$. Dopo una birretta (ed una salsiccia) inizia a vedere le immagini un po' sfocate:



ma i numeri di Betti iniziali persistono. Continuando a bere birre e mangiare salsicce, all'ottava birra le immagini diventano talmente sfocate da cambiare la topologia

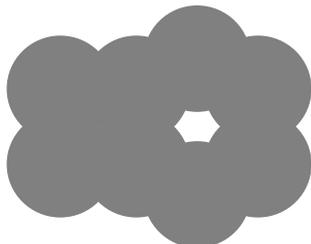


Alla nona birra la topologia cambia ancora:



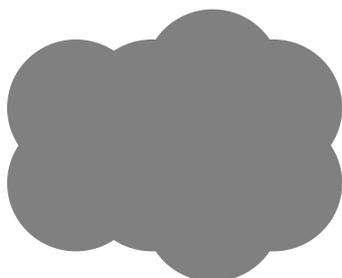
9 birre: $b_0 = 1, b_1 = 2$

Alla tredicesima birra quello che si vede è:



13 birre: $b_0 = 1, b_1 = 1$

mentre alla diciassettesima birra, quello che si vede dalla lettiga dell'ambulanza è:



17 birre: $b_0 = 1, b_1 = 0$

Dunque dovendo decidere quanti “buchi” ci sono nella figura, osserviamo che il buco a sinistra ha *persistenza* 4, ossia è durato 4 birre (dalla 9 alla 12), mentre quello a destra ha *persistenza* 8 (dalla nona alla 16a birra). Quindi la figura ha avuti per 4 birre 1 buco e per altre 4 birre 2 buchi. Nella misura in cui il numero di birre viene considerato una giusta misura di persistenza, possiamo valutare i due eventi con uguale probabilità.

6.3. Complessi filtrati

In queste note ci occuperemo solamente della parte “algebro-geometrica” dell’omologia persistente. Con riferimento alla Figura 1, studieremo nelle prossime sezioni con sufficiente dettaglio i passaggi (b) e (c), mentre studieremo in questa sezione il passaggio (a) in alcuni casi molto particolari. Per quanto riguarda l’interpretazione, che richiede strumenti di natura analitica e statistica, rimandiamo alla letteratura sull’argomento: un buon punto di partenza è dato dagli articoli [2, 6, 7, 22].



FIGURA 1. La catena di montaggio dell’omologia persistente.

Riscriviamo ed ampliamo la nozione di complesso simpliciale filtrato.

DEFINIZIONE 6.3.1. Sia K un complesso simpliciale astratto. Una **funzione filtrante** su K è un’applicazione $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ tale che se $s \in K$ e $r \subset s$ allora $f(r) \leq f(s)$.

Equivalentemente, un'applicazione $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione filtrante se per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme **di livello**

$$K(t) = \{s \in K \mid f(s) \leq t\} = f^{-1}(]-\infty, t])$$

è un sottocomplesso simpliciale. Abbiamo già osservato che i sottocomplessi di livello soddisfano le condizioni

$$(5.2) \quad \bigcap_t K(t) = \emptyset, \quad \bigcup_t K(t) = K, \quad K(s) = \bigcap_{t>s} K(t) \text{ per ogni } s \in \mathbb{R},$$

e che ogni famiglia $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, di sottocomplessi simpliciali di K che soddisfa tali condizioni è la famiglia dei sottoinsiemi di livello della funzione filtrante $f(\sigma) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \sigma \in K(t)\}$.

Per semplicità notazionale, quando non ci saranno rischi di ambiguità, chiameremo semplicemente **complesso filtrato** una coppia (K, f) con K complesso simpliciale astratto e $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ funzione filtrante.

Ecco altri esempi di complessi filtrati, in aggiunta a 5.3.2 e 5.3.3.

ESEMPIO 6.3.2. Dato un complesso simpliciale astratto (K, I) ed una applicazione $d: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ per ogni $x, y \in I$, possiamo definire una funzione filtrante

$$f: K \rightarrow [0, +\infty[, \quad f(\{x_0, \dots, x_p\}) = \max_{i,j} d(x_i, x_j).$$

ESEMPIO 6.3.3. Siano X un insieme finito e $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, una famiglia di sottoinsiemi di X . Sul complesso simpliciale dato dal nervo di \mathcal{U} (Esempio 1.2.15):

$$N(\mathcal{U}) = \{\{i_0, \dots, i_p\} \in \Delta^I \mid U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset\}$$

possiamo considerare la funzione filtrante

$$f: N(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\{i_0, \dots, i_p\}) = \frac{1}{|U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}|}.$$

ESEMPIO 6.3.4. Sia K un complesso simpliciale astratto e sia $K(0) \subset K(1) \subset K(2) \subset \dots$ una catena ascendente di sottocomplessi simpliciali tali che $\cup_n K(n) = K$. Allora la funzione

$$f: K \rightarrow [0, +\infty[, \quad f(x) = \min\{n \mid x \in K(n)\}$$

è una funzione filtrante tale che $K(n) = \{x \in K \mid f(x) \leq n\}$.

Dato un complesso filtrato (K, f) , l'immagine $f(K) \subset \mathbb{R}$ viene detto **luogo dei valori critici** di f . Segue dalla definizione dei sottocomplessi di livello che per ogni valore critico t si ha $K(s) \neq K(t)$ per ogni $s < t$.

Diremo che un complesso filtrato (K, f) è di **tipo finito** se K è un complesso simpliciale astratto finito. In particolare ogni complesso filtrato di tipo finito possiede un numero finito di valori critici.

Diremo che un complesso filtrato (K, f) è **localmente di tipo finito** se $K(t)$ è un sottocomplesso finito per ogni $t \in \mathbb{R}$. In tal caso luogo dei valori critici è chiuso, discreto e inferiormente limitato: infatti per ogni t il luogo dei valori critici della restrizione di $f: K(t) \rightarrow \mathbb{R}$ è finito e dunque per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'intersezione $f(K) \cap]-\infty, t]$ è finita.

LEMMA 6.3.5. *Sia (K, f) un complesso filtrato localmente di tipo finito. Allora un numero reale t è un valore critico se e solo se $K(s) \neq K(t)$ per ogni $s < t$.*

DIMOSTRAZIONE. Facile esercizio. □

I prossimi esempi descrivono alcuni casi del passaggio (a) di Figura 1.

ESEMPIO 6.3.6. Si consideri un ben definito insieme I di matematici, ad esempio l'insieme dei docenti afferenti al Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo il 18 settembre 2021. Il complesso simpliciale astratto (K, I) delle collaborazioni scientifiche di I è definito dalla regola che un elemento $\{x_0, \dots, x_p\} \in \Delta^I$ appartiene a K se e solo se esiste (almeno) una pubblicazione in cui tra gli autori figurano x_0, \dots, x_p .

La funzione filtrante temporale $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ è definita ponendo $f(s)$ come l'anno della prima pubblicazione avente s come sottoinsieme di autori.

ESEMPIO 6.3.7 (Cf. [20]). Si consideri l'insieme I dei personaggi di un film e per ogni coppia $(x, y) \in I \times I$ sia $d(x, y)$ il numero di scene (o se preferite il numero di fotogrammi) in cui x, y compaiono simultaneamente. Si consideri adesso il complesso di cricche (K, I) , dove $\{x_0, \dots, x_p\} \in K$ se e solo se $d(x_i, x_j) > 0$ per ogni i, j .

Una possibile funzione filtrante $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ sensata in tale situazione è data da

$$f(\{x_0, \dots, x_p\}) = \max_{i,j} \frac{1}{d(x_i, x_j)}.$$

Costruzioni analoghe hanno senso, o perlomeno sono state studiate, quando I è l'insieme dei cellulari agganciati ad un insieme di antenne in corrispondenza di un attentato terroristico e $d(x, y)$ il numero di telefonate/messaggini intercorsi tra x e y .

Nel seguito, useremo i termini **nuvola di punti** e **point cloud** per indicare un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}^n$ con un numero finito ma molto grande di elementi, ossia $n \ll |I| < \infty$. Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni numero reale r denotiamo

$$U_x(r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}.$$

Ciascun $U_x(r)$ è un chiuso limitato che, per ogni $r > 0$ coincide con la chiusura della sua parte interna (la palla aperta di raggio r). Chiameremo $U_x(r)$ il disco chiuso di centro x e raggio r .

ESEMPIO 6.3.8 (Complessi di Čech e Vietoris–Rips). Dato un qualsiasi sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}^n$, per ogni numero reale positivo $r \geq 0$ possiamo definire i complessi simpliciali astratti $C_I(r)$ e V_I nel modo seguente:

$$C_I(r) = \{\{x_0, \dots, x_p\} \in \Delta^I \mid U_{x_0}(r) \cap \dots \cap U_{x_p}(r) \neq \emptyset\}, \quad (\check{\text{C}}\text{ech}),$$

$$V_I(r) = \{\{x_0, \dots, x_p\} \in \Delta^I \mid \|x_i - x_j\| \leq 2r \text{ per ogni } i, j\}, \quad (\text{Vietoris–Rips}).$$

È evidente che se $r \leq t$ allora $V_I(r) \subseteq V_I(t)$ e $C_I(r) \subseteq C_I(t)$ (vedi Figura 2). Una semplice applicazione della disuguaglianza triangolare mostra che $C_I(r) \subseteq V_I(r) \subseteq C_I(2r)$.

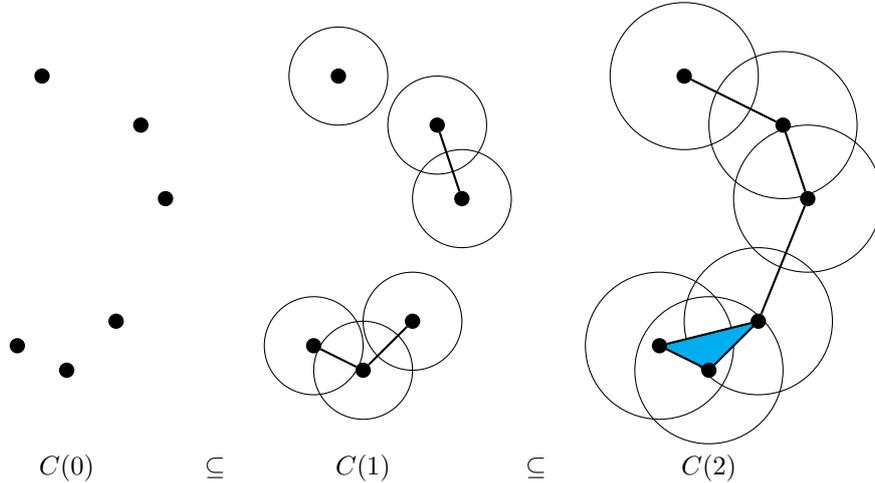


FIGURA 2. Filtrazione di Čech. Credits: la figura è tratta da [17].

È facile descrivere i complessi di Vietoris–Rips e Čech come sottocomplessi di livello per delle opportune funzioni filtranti, che denoteremo rispettivamente v, c .

Nel caso Vietoris–Rips, sia $K = \Delta^I$ e si consideri la funzione filtrante

$$v: K \rightarrow [0, +\infty[, \quad v(\{x_0, \dots, x_p\}) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \|x_i - x_j\|.$$

È chiaro per definizione che $K(t) = V_I(t)$ per ogni t .

Nel caso Čech si prende $K = \Delta^I$ assieme alla funzione filtrante

$$c: K \rightarrow [0, +\infty[, \quad c(\{x_0, \dots, x_p\}) = \min\{r \in \mathbb{R} \mid U_{x_0}(r) \cap \dots \cap U_{x_p}(r) \neq \emptyset\},$$

ed è chiaro per definizione che $K(t) = C_I(t)$ per ogni t . Il fatto che c sia ben definita richiede un semplice ragionamento topologico: sia $\{x_0, \dots, x_p\} \in K$ fissato e scegliamo un numero reale $R > 0$ sufficientemente grande e tale che $U_{x_0}(R) \cap \dots \cap U_{x_p}(R) \neq \emptyset$. Adesso consideriamo il sottoinsieme chiuso e limitato (quindi compatto):

$$Z = \{(y, r) \in U_{x_0}(R) \times [0, R] \mid \|y - x_i\| \leq r, \forall i\}.$$

Per le ipotesi su R si ha

$$(y, r) \in Z \iff r \leq R \text{ e } y \in U_{x_0}(r) \cap \dots \cap U_{x_p}(r).$$

In particolare il compatto Z è non vuoto ed ha senso definire

$$c(\{x_0, \dots, x_p\}) = \min_{(y, r) \in Z} r.$$

ESEMPIO 6.3.9 (Complessi Alpha). Dato un qualsiasi sottoinsieme non vuoto $I \subset \mathbb{R}^n$, per ogni $u \in I$ ed ogni numero reale positivo $r > 0$ denotiamo $R_u(r) = U_u(r) \cap V_u$, dove $U_u(r)$ è il disco di centro u e raggio r , e V_u è la regione di Voronoi di u , definita nell'Esempio 1.2.15:

$$V_u := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - u\| \leq \|x - v\| \quad \forall v \in I\}.$$

Il complesso simpliciale Alpha(r) è definito come il nervo della famiglia $\{R_u(r)\}$, $u \in I$ (vedi Figura 3).

Equivalentemente un simpleso $\{s_0, \dots, s_p\} \in \Delta^I$ appartiene al complesso Alpha(r) se e solo se esiste $x \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$\|x - s_0\| = \|x - s_1\| = \dots = \|x - s_p\| \leq \min(r, \|x - t\|) \text{ per ogni } t \in I.$$

Possiamo riscrivere le due condizioni precedenti dicendo che un simpleso $\{s_0, \dots, s_p\} \in \Delta^I$ appartiene al complesso Alpha(r) se e solo se esiste in \mathbb{R}^n un disco chiuso di raggio $\leq r$ la cui parte interna non interseca I ma il cui bordo contiene s_0, \dots, s_p .

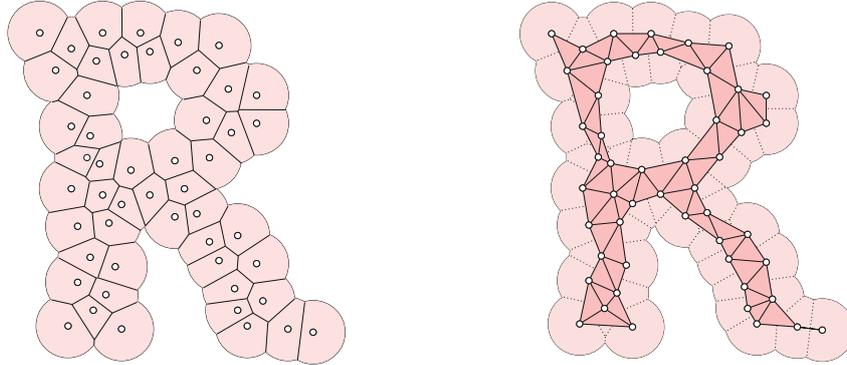


FIGURA 3. A sinistra una nuvola di punti in \mathbb{R}^2 (i pallini \circ) e le intersezioni $R_u(r)$ delle regioni di Voronoi V_u con le palle $B(u, r)$ (in rosa chiaro). A destra il complesso Alpha(r) (in rosa scuro). Credits: la figura è tratta da [5]

Per scrivere i complessi Alpha come sottocomplessi di livello, basta prendere la restrizione al sottocomplesso di Delaunay $D_I \subset \Delta^I$ della funzione filtrante che definisce la filtrazione di Čech.

Riassumendo gli esempi precedenti, ad ogni sottoinsieme finito e non vuoto $I \subset \mathbb{R}^n$ abbiamo associato tre diversi complessi filtrati: (Δ^I, v) , (Δ^I, c) e (D_I, α) , nell'ordine dal più semplice (ma meno informativo) al più complesso (ma anche con più informazioni).

ESEMPIO 6.3.10 (Grafì pesati). Un altro caso molto studiato, e formalmente analogo all'Esempio 6.3.7, riguarda i grafì pesati. Per **grafo pesato** si intende un un grafo semplice finito $G = (V, E)$ equipaggiato di una funzione “peso” $w: E \rightarrow [0, +\infty[$, che ad ogni lato associa un numero reale positivo. Indichiamo con $w(E) = \{w_0 > w_1 > \dots > w_n\}$ la successione insieme dei pesi dei vari lati del grafo, in ordine decrescente. Per ogni $k = 0, \dots, n$ possiamo considerare il sottografo

$$G_k = (V, E_k) \subset G, \quad E_k = \{e \in E \mid w(e) \geq w_k\}.$$

In altri termini il grafo G_k ha gli stessi vertici di G ed ha come lati quelli di peso $\geq w_k$. Abbiamo allora una filtrazione di grafì

$$G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G.$$

Una tale filtrazione di grafì produce una filtrazione dei complessi di cricche associati.

Esercizi.

ESERCIZIO 27. Sia $I \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme dei vertici di un esagono regolare di lato 1. Determinare il complesso di Vietoris–Rips $V_I(2)$.

ESERCIZIO 28. Dato un $I \subset \mathbb{R}^n$ provare che $\text{Alpha}(r) \subset D_I \cap C(r)$ e mostrare con un esempio che in generale $\text{Alpha}(r) \neq D_I \cap C_I(r)$.

6.4. Moduli di persistenza

Secondo alcuni la persistenza è “semplice, naturale ed intuitiva”. Tuttavia per poterla raccontare correttamente e in modo monosemantico è necessario sviluppare un apposito linguaggio.

Riprendiamo dalla Sezione 5.4 la definizione di modulo di persistenza

DEFINIZIONE 6.4.1. Sia $T \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Un **modulo di persistenza** su T è il dato di:

- (1) per ogni $t \in T$ un gruppo abeliano $A(t)$;
- (2) per ogni $s, t \in T$ con $s \leq t$ un omomorfismo di gruppi $a_s^t: A(s) \rightarrow A(t)$.

Gli omomorfismi a_s^t devono soddisfare le seguenti condizioni:

- $a_s^s = \text{Id}_{A(s)}$ per ogni s ;
- $a_t^r \circ a_s^t = a_s^r$ per ogni $s \leq t \leq r$.

Per convenzione, quando l'insieme T non viene nominato, si intende un modulo di persistenza su \mathbb{R}

Se $A = (A(t), a_s^t)$ è un modulo di persistenza su \mathbb{R} , allora possiamo prendere la sua restrizione $A|_T$ ad qualunque sottoinsieme $T \subset \mathbb{R}$ e ottenere un modulo di persistenza su T . Viceversa, se $T \subset \mathbb{R}$ è chiuso e $A = (A(t), a_s^t, T)$ è un modulo di persistenza su T , allora possiamo vedere A come la restrizione a T di un modulo di persistenza \tilde{A} su \mathbb{R} definito nel modo seguente:

$$\tilde{A}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < t \ \forall t \in T \\ A(\max(T \cap]-\infty, s]) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\tilde{a}_s^r = \begin{cases} 0 & \text{se } s < t \ \forall t \in T \\ a_{\max(T \cap]-\infty, s])}^{\max(T \cap]-\infty, r])} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In riferimento alle costruzioni precedenti, nel caso in cui T è un sottoinsieme chiuso e discreto di \mathbb{R} , chiameremo l'operazione $A \mapsto A|_T$ **discretizzazione** di A , e l'operazione $A \mapsto \tilde{A}$ **estensione semicontinua** di A .

Sebbene molti risultati, come ad esempio il teorema di esistenza e stabilità del diagramma di persistenza, valgono per moduli q -tame (vedi [16]), per semplicità espositiva

tratteremo esclusivamente moduli di persistenza di tipo finito. Tale restrizione non influisce negativamente sulla stragrande maggioranza delle applicazioni pratiche. Riportiamo, in maggior dettaglio, la definizione di modulo di persistenza di tipo finito:

DEFINIZIONE 6.4.2. Sia $T = \{t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m\}$ un insieme finito di numeri reali. Un **modulo di persistenza** di tipo finito su T è una successione di omomorfismi di gruppi abeliani finitamente generati

$$(6.1) \quad P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_{m-1}} P(t_m)$$

indicizzata in ordine crescente dagli elementi di T .

Prima di illustrare alcuni esempi facciamo alcune considerazioni di tipo notazionale.

- (1) Nelle notazioni del capitolo precedente, per ogni $i \leq j$ il morfismo $p_{t_i}^{t_j}$ non è altro che la composizione $p_{j-1} \circ \dots \circ p_i$.
- (2) È spesso utile estendere convenzionalmente ogni modulo di persistenza P su $T \subset \mathbb{R}$ ad un modulo di persistenza su $T \cup \{+\infty\}$ ponendo $P(+\infty) = 0$.
- (3) Esiste un modo naturale di estendere la Definizione 6.4.2 se il sottoinsieme T viene rimpiazzato da una successione finita monotona $t_0 \leq t_1 \leq \dots$ di numeri reali: in tal caso bisogna però imporre che $p_i = \text{Id}$ se $t_i = t_{i+1}$.

ESEMPIO 6.4.3. Siano V uno spazio vettoriale ed $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo nilpotente, diciamo $f^n = 0$ per qualche $n > 0$. Se poniamo $V(0) = V$ e $V(i) = f^i(V)$ per ogni $i > 0$, si ha un modulo di persistenza

$$(6.2) \quad 0 \rightarrow V(0) \xrightarrow{f} V(1) \xrightarrow{f} V(2) \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} V(n) = 0,$$

con le applicazioni $p_i = f$ surgettive per $i \geq 0$.

ESEMPIO 6.4.4. Sia (K, f) un complesso filtrato di tipo finito e sia $n \geq 0$ fissato. Sia $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ la successione dei valori critici di f in ordine crescente. Gli n -esimi gruppi di omologia della catena ascendente dei sottocomplessi di livello $K(t_0) \subset K(t_1) \subset \dots$ determinano un pre-modulo di persistenza di tipo finito

$$(6.3) \quad H_n(K(t_0)) \xrightarrow{p_0} H_n(K(t_1)) \xrightarrow{p_1} H_n(K(t_2)) \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_{m-1}} H_n(K(t_m)),$$

dove p_s è il morfismo indotto in omologia dall'inclusione $K(t_s) \subset K(t_{s+1})$. Osserviamo inoltre che, essendo per ipotesi $K(t)$ un complesso simpliciale astratto finito per ogni t , i gruppi di omologia $H_n(K(t_i))$ sono finitamente generati.

Giova osservare che per ogni $i \leq j$ l'immagine dell'applicazione $H_n(K(t_i)) \rightarrow H_n(K(t_j))$ è il gruppo

$$\frac{Z_n(K(t_i))}{C_n(K(t_i)) \cap B_n(K(t_j))}.$$

ESEMPIO 6.4.5. Dato un modulo di persistenza di tipo finito

$$\dots P(t_i) \xrightarrow{p_i} P(t_{i+1}) \xrightarrow{p_{i+1}} P(t_{i+2}) \xrightarrow{p_{i+2}} \dots$$

chiameremo cancellazione di $P(t_{i+1})$ il modulo di persistenza

$$\dots P(t_i) \xrightarrow{p_{i+1} \circ p_i} P(t_{i+2}) \xrightarrow{p_{i+2}} \dots$$

ottenuto eliminando $P(t_{i+1})$ e componendo p_i con p_{i+1} . Se \tilde{P} e \tilde{Q} sono rispettivamente le estensioni semicontinue del suddetto modulo e della sua cancellazione in $P(t_{i+1})$, allora $Q(t) = P(t)$ se $t < t_{i+1}$ oppure se $t \geq t_{i+2}$, mentre se $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$ si ha $Q(t) = P(t_i)$ e $P(t) = P(t_{i+1})$. Esiste quindi un morfismo naturale $f: Q \rightarrow P$ definito da $f_t = \text{Id}$ se $t < t_{i+1}$ oppure se $t \geq t_{i+2}$ e $f_t = p_i$ se $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$. In particolare, f è un isomorfismo se e solo se p_i è un isomorfismo.

Vogliamo adesso estrarre alcuni invarianti discreti dai moduli di persistenza semicontinui di tipo finito; a tale scopo facciamo lo stesso per i moduli di persistenza di tipo finito su insiemi finiti, assicurandoci poi che moduli con estensioni isomorfe abbiano gli stessi invarianti.

DEFINIZIONE 6.4.6. Dato un modulo di persistenza P su un insieme finito $T = \{t_0 < \dots < t_m\}$, diremo che un elemento $x \in P(t_i)$ è **primordiale** se non appartiene all'immagine di p_{i-1} .

In particolare gli elementi primordiali non sono mai nulli ed ogni elemento di $P(t_0)$ non nullo è primordiale. Per semplicità notazionale, $i \leq j$ denotiamo $p_{i,j} = p_{t_i}^{t_j}$, ossia $p_{i,j}: P(t_i) \rightarrow P(t_j)$ è la composizione di $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{j-1}$: si ha $p_{i,i} = \text{Id}$, $p_{i,i+1} = p_i$ eccetera.

Se $x \in P(t_i)$ è primordiale, diremo anche che x **nasce**, oppure che è creato, in t_i .

DEFINIZIONE 6.4.7. Diremo che un elemento primordiale $x \in P(t_i)$ **muore**, od anche che viene distrutto, in t_j se:

$$j > i, \quad p_{i,j}(x) = 0, \quad p_{i,j-1}(x) \neq 0.$$

In tal caso chiameremo $[t_i, t_j[\subset \mathbb{R}$ l'**intervallo di vita** di x . Se x è immortale, ossia se $x \in P(t_i)$ e $p_{i,j}(x) \neq 0$ per ogni $j \geq i$, allora diremo che x muore all'infinito e gli assegniamo $[t_i, +\infty[$ come suo intervallo di vita.

Dato un modulo di persistenza P come nella Definizione 6.4.2, per ogni coppia di interi $0 \leq i \leq j \leq m$ definiamo

$$P^{i,j} = \frac{P(t_i)}{\ker(p_{i,j})} \cong \text{Im}(p_{i,j}).$$

Dunque ciascun morfismo $p_{i,j}$ si fattorizza come composizione di un morfismo surgettivo $P(t_i) \rightarrow P^{i,j}$ ed un morfismo iniettivo $P^{i,j} \rightarrow P(t_j)$. Informalmente, il gruppo $P^{i,j}$ rappresenta gli elementi di $P(t_i)$ che sono ancora vivi in t_j . Osserviamo inoltre che:

- (1) se $i \leq j \leq k$ allora $\ker(p_{i,j}) \subseteq \ker(p_{i,k})$ ed è quindi definito un morfismo *surgettivo* $P^{i,j} \rightarrow P^{i,k}$;
- (2) se $i \leq h \leq j$, siccome $p_{i,j} = p_{h,j} \circ p_{i,h}$, per un elemento $x \in P(t_i)$ si ha

$$x \in \ker(p_{i,j}) \iff p_{i,h}(x) \in \ker(p_{h,j})$$

e quindi $p_{i,h}: P(t_i) \rightarrow P(t_h)$ si fattorizza ad un morfismo *iniettivo* $\overline{p_{i,h}}: P^{i,j} \rightarrow P^{h,j}$.

Dunque, per ogni quaterna $i \leq h \leq k \leq j$ di numeri naturali si ha un quadrato commutativo

$$(6.4) \quad \begin{array}{ccc} P^{i,k} & \longrightarrow & P^{h,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{i,j} & \longrightarrow & P^{h,j} \end{array}$$

con le frecce orizzontali iniettive e le frecce verticali surgettive.

In particolare, per ogni $i < j$ si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P^{i-1,j-1} & \xrightarrow{\sigma_{i,j}} & P^{i,j-1} & \longrightarrow & \text{coker}(\sigma_{i,j}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma_{i,j} \\ 0 & \longrightarrow & P^{i-1,j} & \xrightarrow{\tau_{i,j}} & P^{i,j} & \longrightarrow & \text{coker}(\tau_{i,j}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

con le righe esatte e le frecce verticali surgettive. Informalmente, il conucleo di $\sigma_{i,j}$ (rispettivamente: di $\tau_{i,j}$) rappresenta le classi primordiali di $P(t_i)$ che sono ancora vive in $P(t_{j-1})$ (rispettivamente: di $P(t_j)$). Da ciò segue che il nucleo di $\gamma_{i,j}$ è il gruppo che rappresenta le classi primordiali di $P(t_i)$ che muoiono in $P(t_j)$.

Se il modulo di persistenza è di tipo finito, per ipotesi i gruppi $P(t_i)$ sono tutti finitamente generati, e quindi lo sono anche i gruppi $P^{i,j}$: ed i loro ranghi

$$\beta_P^{i,j} = \text{rank}(P^{i,j})$$

vengono detti **numeri di Betti persistenti**. Per le precedenti osservazioni, i numeri

$$\mu_P^{i,j} = \text{rank}(\ker(\gamma_{i,j})),$$

rappresentano la “misura dimensionale” degli elementi che nascono in t_i e muoiono in t_j ; chiameremo $\mu_P^{i,j}$ la **molteplicità** dell’intervallo di vita $[t_i, t_j[$.

Scriveremo semplicemente $\beta^{i,j}$ e $\mu^{i,j}$ quando il modulo P è chiaro dal contesto, ad esempio se non ce ne sono altri nel discorso.

LEMMA 6.4.8. *Se $i \leq h \leq k \leq j$, ossia se $[t_h, t_k[\subset [t_i, t_j[$, allora:*

- (1) $\beta^{h,k} \geq \beta^{i,j}$, e cioè i numeri di Betti persistenti sono una funzione decrescente sugli intervalli di vita;
- (2) $(\beta^{h,k} - \beta^{h,j}) \geq (\beta^{i,k} - \beta^{i,j})$.

DIMOSTRAZIONE. Dal fatto che nel quadrato commutativo (6.4) le frecce orizzontali sono iniettive segue che $\beta^{i,k} \leq \beta^{h,k}$, mentre dal fatto le frecce verticali sono surgettive segue che $\beta^{i,j} \leq \beta^{i,k}$.

Ribaltando il quadrato (6.4) rispetto alla diagonale principale ed aggiungendo al diagramma i nuclei dei morfismi orizzontali (che prima del ribaltamento erano verticali) otteniamo un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P^{i,k} & \longrightarrow & P^{i,j} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & P^{h,k} & \longrightarrow & P^{h,j} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e con il morfismo σ iniettivo. A maggior ragione la restrizione $\sigma|_A: A \rightarrow B$ è iniettiva e quindi per l’additività del rango

$$\beta^{h,k} - \beta^{h,j} = \text{rank}(B) \geq \text{rank}(A) = \beta^{i,k} - \beta^{i,j}.$$

□

Per l’additività del rango abbiamo:

$$\begin{aligned} \mu^{i,j} &= \text{rank}(\ker(\gamma_{i,j})) = \text{rank}(\text{coker}(\sigma_{i,j})) - \text{rank}(\text{coker}(\tau_{i,j})) \\ &= \text{rank}(P^{i,j-1}) - \text{rank}(P^{i-1,j-1}) - \text{rank}(P^{i,j}) + \text{rank}(P^{i-1,j}) \\ &= \beta^{i,j-1} - \beta^{i-1,j-1} - \beta^{i,j} + \beta^{i-1,j} = (\beta^{i,j-1} - \beta^{i,j}) - (\beta^{i-1,j-1} - \beta^{i-1,j}). \end{aligned}$$

Le molteplicità $\mu^{i,j}$ misurano solamente le classi mortali. Per “contare” le classi immortali, se si introducono:

$$P^{i,\infty} = \frac{P(t_i)}{\cup_{j>i} \ker(p_{i,j})}, \quad \beta^{i,\infty} = \text{rank}(P^{i,\infty}), \quad \mu^{i,\infty} = \beta^{i,\infty} - \beta^{i-1,\infty}.$$

Il gruppo $P^{i,\infty}$ rappresenta le classi di $P(t_i)$ che non muoiono; dato che il morfismo $P(t_{i-1}) \rightarrow P(t_i)$ si fattorizza ad un morfismo iniettivo $P^{i-1,\infty} \xrightarrow{\sigma} P^{i,\infty}$ il cui conucleo (di rango $\mu^{i,\infty}$) rappresenta le classi di $P(t_i)$ che sono primordiali e immortali. Chiameremo $\mu^{i,\infty}$ la **molteplicità** dell’intervallo di vita $[t_i, +\infty[$.

Quindi i numeri di Betti persistenti determinano le molteplicità; viceversa le molteplicità determinano i numeri di Betti persistenti in virtù del seguente risultato.

LEMMA 6.4.9 (Lemma fondamentale dell’omologia persistente). *Dato un modulo di persistenza di tipo finito*

$$P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots P(t_m),$$

valgono le formule:

$$\begin{aligned}
\mu^{i,j} &= (\beta^{i,j-1} - \beta^{i,j}) - (\beta^{i-1,j-1} - \beta^{i-1,j}) \\
\mu^{i,\infty} &= \beta^{i,\infty} - \beta^{i-1,\infty} \\
(6.5) \quad \beta^{h,k} &= \sum_{i=0}^h \sum_{k < j \leq \infty} \mu^{i,j} = \sum_{i=0}^h \left(\mu^{i,\infty} + \sum_{j=k+1}^m \mu^{i,j} \right) \\
\beta^{h,\infty} &= \sum_{i=0}^h \mu^{i,\infty},
\end{aligned}$$

dove $\beta^{-1,h} = \beta^{-1,\infty} = 0$ per convenzione.

DIMOSTRAZIONE. Le prime due formule sono essenzialmente la definizione formale delle molteplicità degli intervalli di vita, motivate dalle considerazioni euristiche su nascita e morte degli elementi. La quarta equazione segue immediatamente dalla seconda osservando che $\beta^{-1,\infty} = 0$.

Per quanto riguarda la terza, siccome $\beta^{i,\infty} = \beta^{i,m}$ e $\mu^{i,\infty} = \beta^{i,m} - \beta^{i-1,m}$, per ogni $i \leq k$ si ha

$$\begin{aligned}
\mu^{i,\infty} + \sum_{j=k+1}^m \mu^{i,j} &= \beta^{i,m} - \beta^{i-1,m} + \sum_{j=k+1}^m (\beta^{i,j-1} - \beta^{i,j}) - \sum_{j=k+1}^{\infty} (\beta^{i-1,j-1} - \beta^{i-1,j}) \\
&= \beta^{i,k} - \beta^{i-1,k}.
\end{aligned}$$

Dato che $\beta^{-1,k} = 0$ si ottiene finalmente

$$\sum_{i=0}^h \mu^{i,\infty} + \sum_{k < j \leq m} \mu^{i,j} = \sum_{i=0}^k (\beta^{i,k} - \beta^{i-1,k}) = \beta^{h,k}.$$

□

COROLLARIO 6.4.10. *Dato un pre-modulo di persistenza localmente di tipo finito*

$$P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots,$$

con molteplicità $\mu^{i,j}$ si ha:

- (1) se $p_i: P(t_i) \rightarrow P(t_{i+1})$ è surgettivo, allora $\mu^{i+1,j} = 0$ per ogni $j > i + 1$;
- (2) se $p_j: P(t_j) \rightarrow P(t_{j+1})$ è iniettivo, allora $\mu^{i,j+1} = 0$ per ogni $i \leq j$.

In particolare, se $p_i: P(t_i) \rightarrow P(t_{i+1})$ è un isomorfismo, allora $\mu^{i+1,j} = \mu^{h,i+1} = 0$ per ogni $h < i + 1$ ed ogni $j > i + 1$. In altri termini, gli intervalli di vita che hanno t_{i+1} come estremo hanno tutti molteplicità nulla.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che nel primo caso basta osservare che nessun elemento nasce in $P(t_{i+1})$, mentre nel secondo caso nessun elemento muore in $P(t_{j+1})$. □

6.4.1. Il lemma degli scatti (snapping lemma). Consideriamo un modulo di persistenza P di tipo finito

$$P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_{m-1}} P(t_m),$$

prendiamo la sua estensione semicontinua \tilde{P} e poi la restrizione $Q = \tilde{P}|_S$ ad un sottoinsieme finito $S = \{s_0 < \dots < s_n\}$.

Lo snapping lemma ci dice come calcolare le molteplicità $\mu_Q^{i,j}$ in funzione delle molteplicità $\mu_P^{i,j}$.

LEMMA 6.4.11 (Snapping). *Nelle notazioni precedenti, per ogni $0 \leq a < b \leq n$ si ha*

$$\mu_Q^{a,b} = \sum_{t_i \in]s_{a-1}, s_a], t_j \in]s_{b-1}, s_b]} \mu_P^{i,j}.$$

Inoltre, se $s_n \geq t_m$ si ha

$$\mu_Q^{a,\infty} = \sum_{t_i \in]s_{a-1}, s_a]} \mu_P^{i,\infty},$$

dove si intende $s_{-1} = -\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Oltre che $s_{-1} = -\infty$ poniamo per convenzione $t_{-1} = -\infty$, $Q(s_{-1}) = P(t_{-1}) = 0$. Definiamo i quattro indici $-1 \leq i, j, h, k \leq m$ nel modo seguente:

- (1) $i = \max\{l \mid t_l \leq s_{a-1}\}$;
- (2) $j = \max\{l \mid t_l \leq s_a\}$;
- (3) $h = \max\{l \mid t_l \leq s_{b-1}\}$;
- (4) $k = \max\{l \mid t_l \leq s_b\}$.

Per come è stato definito Q si ha:

$$\beta_Q^{a-1,b-1} = \beta_P^{i,h}, \quad \beta_Q^{a-1,b} = \beta_P^{i,k}, \quad \beta_Q^{a,b-1} = \beta_P^{j,h}, \quad \beta_Q^{a,b} = \beta_P^{j,k}.$$

Applicando il lemma fondamentale dell'omologia persistente si ottiene

$$\begin{aligned} \mu_Q^{a,b} &= (\beta_Q^{a,b-1} - \beta_Q^{a,b}) - (\beta^{a-1,b-1})_Q - \beta_Q^{i-1,j} \\ &= (\beta_P^{j,h} - \beta_P^{j,k}) - (\beta_P^{i,h} - \beta_P^{i,k}). \end{aligned}$$

Siccome

$$\begin{aligned} \beta_P^{j,h} - \beta_P^{j,k} &= \sum_{r=0}^j \left(\mu_P^{r,\infty} + \sum_{s=h+1}^m \mu_P^{r,s} \right) - \sum_{r=0}^j \left(\mu_P^{r,\infty} + \sum_{s=k+1}^m \mu_P^{r,s} \right) \\ &= \sum_{r=0}^j \sum_{s=h+1}^k \mu_P^{r,s}, \end{aligned}$$

e similmente

$$\beta_P^{i,h} - \beta_P^{i,k} = \sum_{r=0}^i \sum_{s=h+1}^k \mu_P^{r,s},$$

si ottiene

$$\mu_Q^{a,b} = \sum_{r=i+1}^j \sum_{s=h+1}^k \mu_P^{r,s} = \sum_{t_i \in]s_{a-1}, s_a], t_j \in]s_{b-1}, s_b]} \mu_P^{i,j}.$$

Se $s_n \geq t_m$ allora $\beta_Q^{a,\infty} = \beta_Q^{a,n} = \beta_P^{i,m} = \beta_P^{j,\infty}$, $\beta_Q^{a-1,\infty} = \beta_P^{i,\infty}$ e quindi

$$\begin{aligned} \mu_Q^{a,\infty} &= \beta_Q^{a,\infty} = \beta_Q^{a-1,\infty} = \beta_P^{j,\infty} - \beta_P^{i,\infty} \\ &= \sum_{s=i+1}^j \mu_P^{s,\infty} = \sum_{t_i \in]s_{a-1}, s_a]} \mu_P^{i,\infty}. \end{aligned}$$

□

6.5. Barcode e diagramma di persistenza

Denotiamo con $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la famiglia di tutti gli intervalli del tipo $[a, b[\subset \mathbb{R}$, con $a < b \leq +\infty$. Per ogni modulo di persistenza di tipo finito

$$P: P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_{m-1}} P(t_m),$$

denotiamo con $\mu: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{N}$ la sua funzione di molteplicità, che associa ad ogni intervallo di vita la sua molteplicità. Più precisamente, nelle notazioni precedenti:

$$\mu([a, b[) = \begin{cases} \mu^{i,j} & \text{se } a = t_i, b = t_j, \\ \mu^{i,\infty} & \text{se } a = t_i, b = +\infty \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tra le varie conseguenze del Corollario 6.4.10 vi è quello che la funzione di molteplicità è invariante rispetto alla cancellazione degli isomorfismi. Più precisamente, supponiamo che

in (6.1) si abbia p_k bigettivo per qualche $k \geq 0$; allora la sua caratteristica è uguale a quella del modulo di persistenza ottenuto “cancellando” $P(t_{k+1})$, ossia

$$\dots \xrightarrow{p_{k-1}} P(t_k) \xrightarrow{p_{k+1}p_k} P(t_{k+2}) \xrightarrow{p_{k+2}} P(t_{k+3}) \dots$$

Ci sono vari modi di visualizzare graficamente le caratteristiche dei moduli di persistenza: nei più usati in letteratura (barcode, digramma di persistenza, diagramma landscape ecc.) viene fatto uso del concetto di funzione polidroma.

Fino agli inizi del XX secolo, i matematici parlavano senza imbarazzo di funzioni polidrome, ossia di funzioni che ad un punto del dominio associano più punti del codominio. Tale concetto, che sembrava scomparso, sta ritornando prepotentemente all’attenzione in teoria della persistenza (ma non solo).

DEFINIZIONE 6.5.1. Siano S, X due insiemi. Una **funzione polidroma** di base S e indici X , graficamente denotata $f: S \rightsquigarrow X$, è un’applicazione che ad ogni elemento $s \in S$ associa un sottoinsieme $f(s)$ di X .

Dunque, dare una funzione polidroma $f: S \rightsquigarrow X$ è la stessa cosa che dare un’applicazione da f nell’insieme delle parti di X .

Esempi classici di funzioni polidrome sono la radice quadrata ed il logaritmo di numeri complessi.

DEFINIZIONE 6.5.2. Sia \mathcal{I} la famiglia di tutti gli intervalli di \mathbb{R} del tipo $[a, b[$, con $a < b \leq +\infty$. Chiameremo **barcode** una funzione polidroma $\phi: \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ tale che $\phi([a, b[) \cap \phi([c, d[) = \emptyset$ se $[a, b[\neq [c, d[$.

Chiameremo **molteplicità** di un intervallo $[a, b[$ (nel barcode ϕ) la cardinalità dell’insieme $\phi([a, b[)$. Diremo che due barcode ϕ, ψ sono isomorfi se ogni intervallo $[a, b[\in \mathcal{I}$ ha la medesima molteplicità in ϕ, ψ .

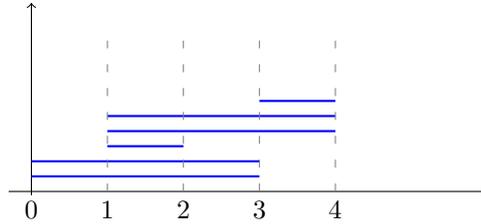


FIGURA 4. Un esempio di barcode, con gli intervalli $[0, 3[$ e $[1, 4[$ di molteplicità 2, gli intervalli $[1, 2[$ e $[3, 4[$ di molteplicità 1 (e tutti gli altri di molteplicità 0).

Per comprendere il motivo del nome barcode, supponiamo che la somma di tutte le molteplicità sia finita; allora esistono al più un numero finito di intervalli, diciamo $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ di molteplicità positiva. In tale situazione il barcode si può rappresentare graficamente a foggia di *lasagna*, ossia come unione di barre orizzontali in \mathbb{R}^2 in numero uguale alla somma delle molteplicità: in buona sostanza, per ogni j l’intervallo $I_j \times \{0\}$ viene traslato in verticale per valori distinti in quantità uguale alla molteplicità (vedi Figura 4).

Ad ogni modulo di persistenza di tipo finito si associa una classe di isomorfismo di barcode, in cui le molteplicità degli intervalli sono esattamente le molteplicità degli intervalli di vita.

ESEMPIO 6.5.3. Calcoliamo i barcode degli 0-cicli e 1-cicli del complesso filtrato di Vietoris–Rips della (micro)nuvola di punti $I = \{(0, 0), (4, 0), (0, 4), (5, 5)\} \subset \mathbb{R}^2$. I valori critici della funzione filtrante $v: \Delta^I \rightarrow \mathbb{R}$ sono tutte e sole le semidistanze tra coppie di punti di I e sono quindi

$$0 < 2 < \sqrt{13}/2 < \sqrt{8} < 5/\sqrt{2}.$$

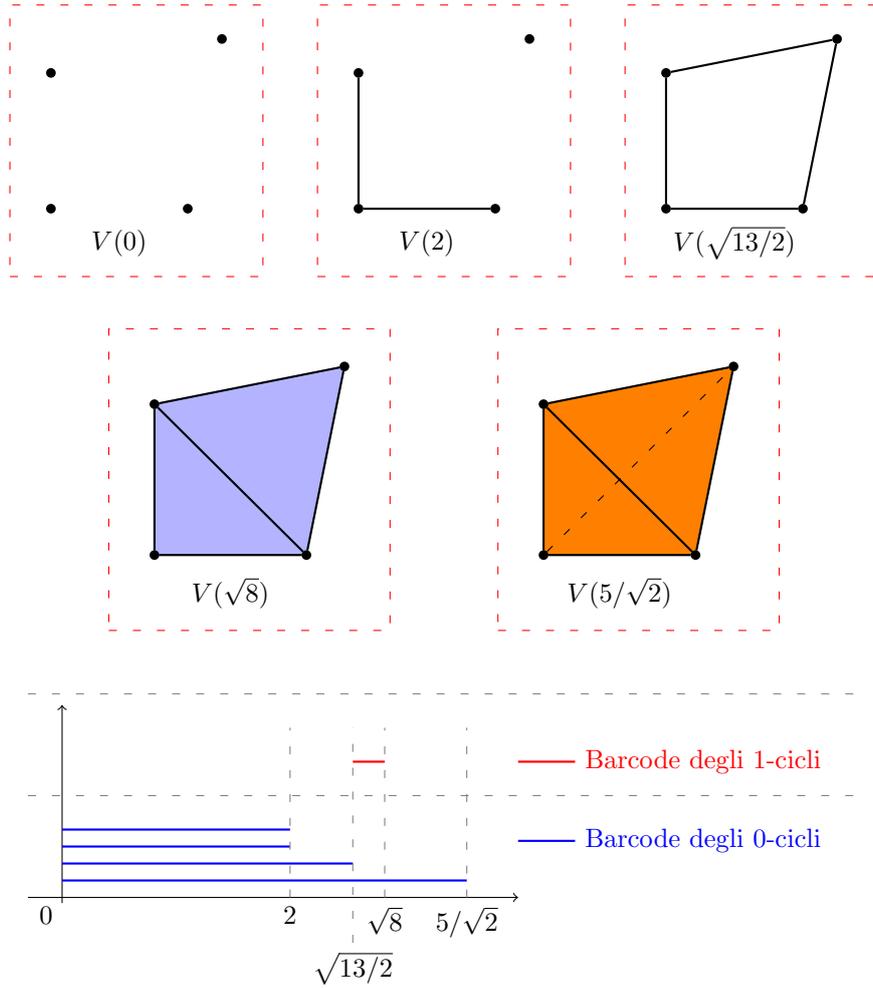


FIGURA 5. Descrizione nell'Esempio 6.5.3.

La Figura 5 mostra i sottocomplessi di livello $V(t) = \{x \in \Delta^I \mid v(x) \leq t\}$ per ciascuno dei 5 valori critici (in celeste i 2-simplessi massimali ed in arancio i 3-simplessi massimali).

Siccome $H_i(V(t)) = 0$ per ogni t ed ogni $i > 1$, gli unici moduli di persistenza omologici non banali sono quelli in grado 0 e grado 1. Nella parte inferiore di Figura 5 sono mostrati i barcode degli 0-cicli (intervalli di vita delle componenti connesse, in blu) e degli 1-cicli (intervalli di vita dei buchi a circonferenza, in rosso).

Oltre al barcode, un altro modo di rappresentazione è dato dal diagramma di persistenza, detto anche diagramma delle molteplicità, che non è altro che il grafico del barcode.

Prima di entrare nel merito della questione, è utile fare qualche considerazione aggiuntiva sulle funzioni polidrome e sui loro grafici.

In accordo con quanto affermato da Jacobson ([12, p. 5]) per le funzioni monodrome (quelle usuali), il miglior modo per formalizzare il concetto di funzione polidroma è definendo in maniera rigorosa quello che a posteriori può essere considerato il suo grafico.

DEFINIZIONE 6.5.4 (cf. [1, Defn. 2.2]). Siano S, X due insiemi. Una **rappresentazione polidroma**¹ di base S e indici X è un sottoinsieme $T \subset S \times X$. Per ogni $s \in S$, la **molteplicità** μ_s di s in T è per definizione la cardinalità della fibra $p^{-1}(s)$, dove $p: T \rightarrow S$ è la restrizione a T della proiezione sul primo fattore. Equivalentemente

$$\mu_s = |\{x \in X \mid (s, x) \in T\}|.$$

¹In inglese “multiset representation”.

Qualora $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eccetera, diremo che la rappresentazione polidroma è naturale, intera, razionale, reale eccetera.

È chiaro come ogni funzione polidroma $f: S \rightsquigarrow X$, $s \mapsto f(s) \subset X$, è univocamente determinata dal suo grafico

$$T = \cup_{s \in S} \{s\} \times f(s) \subseteq S \times X$$

che è una rappresentazione polidroma. Viceversa, ogni rappresentazione polidroma $T \subset S \times X$ è il grafico della funzione polidroma $f: S \rightsquigarrow X$, $f(s) = i_s^{-1}(T)$, dove $i_s: X \rightarrow S \times X$, $i_s(x) = (s, x)$.

DEFINIZIONE 6.5.5. Due rappresentazioni polidrome $T \subset S \times X$, $R \subset S \times Y$ sulla medesima base S si dicono **equivalenti per cambio di indici**, od anche per **reindicizzazione**, se esiste un'applicazione bigettiva $f: T \rightarrow R$ che commuta con le proiezioni sulla base, ossia se per ogni $(s, x) \in T$ vale $f(s, x) = (s, y)$ per qualche $y \in Y$.

Chiameremo **multi-insieme**², od anche **insieme con ripetizioni**, una classe di equivalenza di rappresentazioni polidrome per cambio di indici.

Ad esempio le due rappresentazioni polidrome di base \mathbb{N} :

$$T = \{(s, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid s < x < 2s\}, \quad R = \{(s, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid 3s < y < 4s\},$$

definiscono lo stesso multi-insieme: una possibile reindicizzazione è data dall'applicazione bigettiva $T \rightarrow R$, $(s, x) \mapsto (s, x + 2s)$.

È chiaro che la molteplicità di un elemento della base è invariante per reindicizzazione, ossia per cambio di indici e segue dall'assioma della scelta che due rappresentazioni polidrome sulla medesima base S sono equivalenti per cambio di indici se e solo se hanno la stessa molteplicità in ogni $s \in S$. Quindi per ogni multi-insieme risultano ben definite sia la sua base S sia le sue molteplicità per ogni $s \in S$.

ESEMPIO 6.5.6. Per ogni applicazione $p: X \rightarrow S$ possiamo considerare la sua “inversa polidroma” $f: S \rightsquigarrow X$, $f(s) = p^{-1}(s)$; quindi possiamo interpretare l'applicazione $p: X \rightarrow S$ come un multi-insieme di base S , più precisamente come la classe di equivalenza della rappresentazione polidroma di base S data dal grafico di p , ossia

$$\{(p(t), t) \mid t \in T\} = \{(s, x) \mid s \in S, x \in p^{-1}(s)\} \subset S \times T.$$

In tale multi-insieme la molteplicità di un $s \in S$ è esattamente la cardinalità della fibra $p^{-1}(s)$. Due applicazioni $p: T \rightarrow S$ e $q: R \rightarrow S$ rappresentano lo stesso multi-insieme se e solo se esiste un'applicazione bigettiva $f: T \rightarrow R$ tale che $qf = p$.

Ogni multi-insieme può essere ottenuto in questo modo, infatti ogni rappresentazione polidroma $T \subset S \times X$ è equivalente per cambio di indici al grafico della proiezione $p: T \rightarrow S$.

DEFINIZIONE 6.5.7. Sia κ un numero cardinale infinito. Un multi-insieme si dice di taglia κ se tutte le sue fibre hanno cardinalità $\leq \kappa$, equivalentemente, se è definito da una rappresentazione polidroma con insieme degli indici di cardinalità κ . Quando non viene fatto riferimento alla taglia si intende implicitamente che essa sia la più piccola possibile, $\kappa = \aleph_0$.

OSSERVAZIONE 6.5.8. Il riferimento alla taglia si comprende tenendo presente il paradosso di Russell. Infatti, mentre la collezione di tutti i multi-insiemi di base S non è un insieme, risulta invece essere un insieme la collezione di tutti i multi-insiemi di base S e taglia fissata.

DEFINIZIONE 6.5.9. Un **diagramma di persistenza** è un multi-insieme di base il **semipiano esteso**:

$$S = \{(a, b) \mid a < b \leq +\infty\} \subset (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}).$$

Un diagramma di persistenza può essere quindi determinato sia da una rappresentazione polidroma $T \subset S \times X$ che da un'applicazione $v: T \rightarrow S$. In queste note, per mantenere uniformità di notazioni, rappresenteremo sempre un diagramma di persistenza con una coppia (T, v) , dove T è un insieme e $v: T \rightarrow S$ è un'applicazione. Due applicazioni $v_1: T_1 \rightarrow S$, $v_2: T_2 \rightarrow S$ definiscono lo stesso diagramma se e solo se esiste un'applicazione bigettiva

²In inglese multiset.

$f: T_1 \rightarrow T_2$ tale che $v_1 = v_2 f$. Data una qualsiasi famiglia $v_i: T_i \rightarrow S$, $i \in I$, di diagrammi di persistenza risulta ben definita la sua unione disgiunta $\coprod_{i \in I} T_i \rightarrow S$: più concretamente, si tratta del multi-insieme definito dalla rappresentazione polidroma

$$\Gamma \subset S \times I \times (\cup_i T_i), \quad \Gamma = \{(s, i, t) \mid t \in T_i, v_i(t) = s\}.$$

Ad ogni barcode $\phi: \mathcal{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ corrisponde il diagramma di persistenza in cui la molteplicità di $(a, b) \in S$ è uguale alla cardinalità di $\phi([a, b[)$.

Riepilogando, abbiamo la seguente definizione di diagramma di persistenza di un modulo di persistenza.

DEFINIZIONE 6.5.10. Dato un modulo di persistenza di tipo finito

$$P: P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_{m-1}} P(t_m),$$

il suo **diagramma di persistenza**, o **diagramma delle molteplicità** $\text{dgm}(P)$ è il multi-insieme con base il semipiano esteso S nel quale:

- (1) per ogni $i < j$ il punto (t_i, t_j) ha molteplicità $\mu^{i,j}$;
- (2) per ogni i il punto $(t_i, +\infty)$ ha molteplicità $\mu^{i,\infty}$;
- (3) in tutti gli altri punti la molteplicità è uguale a 0.

OSSERVAZIONE 6.5.11. Ai fini esclusivamente grafici, si può rappresentare il punto $(a, \infty) \in S$ come la semiretta $\{(a, y) \mid y \geq a\} \subset \mathbb{R}^2$.

6.6. Basi cicliche e basi di persistenza

Abbiamo visto che per una matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$, il suo rango come matrice a coefficienti razionali o reali è uguale al rango dell'immagine di $A: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ come gruppo abeliano. Da ciò segue che i numeri di Betti della omologia a coefficienti razionali sono uguali a quelli dell'omologia a coefficienti interi.

Lo stesso vale per i numeri di Betti persistenti; sia infatti $L \subset K$ una inclusione di complessi simpliciali, $n \geq 0$ un intero fissato e denotiamo con: a il rango del differenziale $d: C_n(L) \rightarrow C_{n-1}(L)$, con b il rango del differenziale $d: C_{n+1}(K) \rightarrow C_n(K)$ e con c il rango dell'applicazione

$$f: C_n(L) \oplus C_{n+1}(K) \rightarrow C_n(K), \quad f(x, y) = x + dy.$$

Allora il rango dell'immagine di $H_n(L) \rightarrow H_n(K)$, ossia il rango di $Z_n(L)/(C_n(L) \cap B_n(K))$ è uguale $c - a - b$. Infatti, se $l = \text{rank}(C_n(L))$ allora il rango di $Z_n(L)$ è $l - a$. Dalla successione esatta

$$0 \rightarrow C_n(L) \cap B_n(K) \rightarrow C_n(L) \oplus B_n(K) \rightarrow C_n(L) + B_n(K) \rightarrow 0$$

segue che il rango di $C_n(L) \cap B_n(K)$ è uguale a $b + l - c$. Dunque il rango di $Z_n(L)/(C_n(L) \cap B_n(K))$ è $(l - a) - (b + l - c) = c - a - b$.

Dunque, nello studio delle molteplicità nei moduli di persistenza derivanti da complessi filtrati non è restrittivo studiare le omologie a coefficienti in un campo, dove abbiamo a disposizione migliori strumenti per comprendere la loro struttura algebrica ed i corrispondenti diagrammi di persistenza.

Innanzitutto possiamo rifare le stesse considerazioni con la dimensione al posto del rango ed abbiamo

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \beta^{i,j} &= \dim P^{i,j} = \dim P(t_i) - \dim \ker(p_{i,j}) = \text{rank}(p_{i,j}), \\ \mu^{i,j} &= \text{rank}(p_{i,j-1}) - \text{rank}(p_{i-1,j-1}) - \text{rank}(p_{i,j}) + \text{rank}(p_{i-1,j}). \end{aligned}$$

ESEMPIO 6.6.1. Lo studio delle molteplicità $\mu^{i,j}$ del modulo di persistenza dell'Esempio 6.4.3 ci restituisce quantità già studiate nei corsi di algebra lineare. Infatti, in tal caso per ogni $i \leq j$ si ha

$$\text{rank}(p_{i,j}) = \begin{cases} \text{rank}(f^j) & \text{per } i \geq 0, \\ 0 & \text{per } i < 0, \end{cases}$$

da cui segue che $\mu^{i,j} = 0$ per ogni $0 < i < j$, mentre

$$\mu^{0,j} = \text{rank}(f^{j-1}) - \text{rank}(f^j) = \text{numero di blocchi di Jordan di ordine } \geq j.$$

Attenzione: la ben nota catena di disuguaglianze $\mu^{0,1} \geq \mu^{0,2} \geq \dots$ che vale nel caso specifico dell'Esempio 6.4.3, non vale per un generico modulo di persistenza. In aggiunta, non è difficile dimostrare (esercizio per il lettore) che ogni successione $\mu^{i,j} \in \mathbb{N}$, $0 \leq i < j$, appare come dato di molteplicità di un modulo di persistenza.

DEFINIZIONE 6.6.2 (base persistenza). Sia

$$P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots P(t_m)$$

un modulo di persistenza di spazi vettoriali su di un campo \mathbb{K} e sia \mathcal{B}_i una base (non ordinata) dello spazio vettoriale $P(t_i)$ per ogni indice i . L'unione $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ viene detta una **base di persistenza** se, detto $\mathcal{B}'_i = \{e \in \mathcal{B}_i \mid p_i(e) \neq 0\}$, si ha:

- (1) $p_i(e) \in \mathcal{B}_{i+1}$ per ogni $e \in \mathcal{B}'_i$;
- (2) l'applicazione $p_i: \mathcal{B}'_i \rightarrow \mathcal{B}_{i+1}$ è iniettiva.

DEFINIZIONE 6.6.3 (base ciclica). Sia

$$P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots P(t_m)$$

un modulo di persistenza di spazi vettoriali su di un campo \mathbb{K} e sia \mathcal{B}_i^\dagger un sottoinsieme dello spazio vettoriale $P(t_i)$ per ogni indice i . L'unione $\mathcal{B}^\dagger = \cup_i \mathcal{B}_i^\dagger$ viene detta una **base ciclica** se per ogni i , l'unione disgiunta degli elementi diversi da 0 del tipo $p_{h,i}(e)$, al variare di $h \leq i$ e $e \in \mathcal{B}_i^\dagger$, è una base (non ordinata) di $P(t_i)$.

Rimandiamo alla sottosezione 6.6.1 per una dimostrazione che le basi di persistenza e le basi cicliche esistono sempre.

È chiaro dalle definizioni che i concetti di base ciclica e di base di persistenza sono sostanzialmente equivalenti; più precisamente, sia

$$P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \dots P(t_m)$$

un modulo di persistenza di spazi vettoriali su di un campo \mathbb{K} :

- (1) se $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ è una base di persistenza, allora $\mathcal{B}^\dagger = \cup_i (\mathcal{B}_i - p_{i-1}(\mathcal{B}_{i-1}))$ è una base ciclica ed ogni elemento di \mathcal{B}_j si scrive in modo unico come $p_{i,j}(e)$ con $i \leq j$ ed $e \in \mathcal{B}_i^\dagger$.
- (2) se $\mathcal{B}^\dagger = \cup_i \mathcal{B}_i^\dagger$ è una base ciclica, allora l'insieme degli elementi diversi da 0 del tipo $p_{h,i}(e)$, al variare di $h \leq i$ e $e \in \mathcal{B}_i^\dagger$, è una base di persistenza.

Le basi di persistenza sono omogenee rispetto ai nuclei ed alle immagini di tutti i morfismi $p_{i,j}$, ossia vale il seguente lemma.

LEMMA 6.6.4. *Nelle notazioni della Definizione 6.6.2, per ogni base di persistenza \mathcal{B} ed ogni $i \leq j$ si ha*

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \ker(p_{i,j}) &= \text{Span}(\{e \in \mathcal{B}_i \mid p_{i,j}(e) = 0\}), \\ \text{Im}(p_{i,j}) &= \text{Span}(\{p_{i,j}(e) \mid e \in \mathcal{B}_i, p_{i,j}(e) \neq 0\}). \end{aligned}$$

In particolare,

$$\beta^{i,j} \text{ è uguale al numero di elementi di } e \in \mathcal{B}_i \text{ tali che } p_{i,j}(e) \neq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia n la dimensione di $P(t_i)$ e scegliamo un ordinamento

$$\mathcal{B}_i = \{e_1, \dots, e_n\}$$

in modo tale che per qualche $r \leq n$ si abbia $p_{i,j}(e_h) \neq 0$ se $h \leq r$ e $p_{i,j}(e_h) = 0$ se $h > r$. Siccome $p_{i,j}(e_1), \dots, p_{i,j}(e_r)$ sono elementi distinti di \mathcal{B}_j si ha che il rango di $p_{i,j}$ è $\geq r$ e quindi $\dim \ker(p_{i,j}) \leq n - r$ per il teorema del rango. D'altra parte, $e_{r+1}, \dots, e_n \in \ker(p_{i,j})$ e quindi $\dim \ker(p_{i,j}) \geq n - r$. Ne consegue che $p_{i,j}$ ha rango r e che valgono le due uguaglianze (6.7). \square

Data una base di persistenza \mathcal{B} , denotiamo con $\mathcal{B}^\dagger \subseteq \mathcal{B}$ la corrispondente base ciclica, ossia $\mathcal{B}_i^\dagger = \mathcal{B}^\dagger \cap \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i - p_{i-1}(\mathcal{B}_{i-1}^\dagger)$. Segue dal Lemma 6.6.4 che $\text{Span}(\mathcal{B}_i^\dagger)$ è un complementare dell'immagine di p_{i-1} in $P(t_i)$; in particolare \mathcal{B}_i^\dagger ha intersezione vuota con l'immagine

di p_{i-1} ; in altri termini, *la base ciclica coincide con il sottoinsieme degli elementi primordiali della base di persistenza.*

Poniamo poi, per ogni $i < j$,

$$\mathcal{B}_{i,j}^\dagger = \{e \in \mathcal{B}_i^\dagger \mid p_{i,j}(e) = 0, p_{i,j-1}(e) \neq 0\},$$

$$\mathcal{B}_{i,\infty}^\dagger = \mathcal{B}_i^\dagger - \cup_j \mathcal{B}_{i,j}^\dagger = \{e \in \mathcal{B}_i^\dagger \mid p_{i,j}(e) \neq 0, \forall j > i\}.$$

Il seguente teorema è quindi conseguenza immediata del Lemma 6.6.4 e del lemma fondamentale dell'omologia persistente.

TEOREMA 6.6.5. *Nelle notazioni della Definizione 6.6.2, per ogni base ciclica \mathcal{B}^\dagger ed ogni $i \leq j$ si ha che per ogni intervallo di vita $[t_i, t_j]$ la molteplicità $\mu^{i,j}$ è uguale alla cardinalità di $\mathcal{B}_{i,j}^\dagger$, ossia al numero di elementi della base di persistenza che nascono in t_i e muoiono in t_j .*

Similmente la molteplicità $\mu^{i,\infty}$ è uguale alla cardinalità di $\mathcal{B}_{i,\infty}^\dagger$.

COROLLARIO 6.6.6. *Siano \mathcal{B} ed \mathcal{C} due basi di persistenza dello stesso modulo di persistenza di tipo finito P . Allora esiste una bigezione $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ la cui estensione lineare è un isomorfismo di moduli di persistenza.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $i < j \leq +\infty$ gli insiemi $\mathcal{B}_{i,j}^\dagger$ e $\mathcal{C}_{i,j}^\dagger$ hanno la stessa cardinalità. Prendiamo una qualunque bigezione $f: \mathcal{B}^\dagger \rightarrow \mathcal{C}^\dagger$ tale che $f(\mathcal{B}_{i,j}^\dagger) = \mathcal{C}_{i,j}^\dagger$ per ogni $i < j \leq +\infty$ ed estendiamola ad una bigezione $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ponendo

$$f(p_{i,s}(e)) = p_{i,s}(f(e)), \quad e \in \mathcal{B}_{i,j}, \quad i < s < j \leq +\infty.$$

□

Ogni base ciclica fornisce un rappresentante canonico del diagramma di persistenza:

COROLLARIO 6.6.7. *Sia \mathcal{B}^\dagger una base ciclica di un modulo di persistenza di tipo finito P . Allora l'applicazione*

$$v: \mathcal{B}^\dagger \rightarrow S, \quad v(e) = (t_i, t_j) \text{ per } e \in \mathcal{B}_{i,j}^\dagger$$

rappresenta il diagramma di persistenza $\text{dgm}(P)$.

Grazie alle basi di persistenza possiamo visualizzare graficamente lo snapping lemma; per semplicità espositiva faremo questo solo per le cosiddette ϵ -discretizzazioni, lasciando al lettore interessato il compito di estendere al caso generale.

Sia

$$P: \quad P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \cdots P(t_m)$$

un modulo di persistenza di tipo finito su $T = \{t_0, \dots, t_m\}$ ed estendiamolo a tutto \mathbb{R} in maniera semicontinua, ossia $P(s) = P(\max(T \cap]-\infty, s])$.

Dati due numeri reali $\epsilon > 0$, $a \leq t_0$ ed un intero n tale che $a + n\epsilon \geq t_m$, diremo che il modulo di persistenza

$$Q: \quad P(a) \rightarrow P(a + \epsilon) \rightarrow \cdots \rightarrow P(a + n\epsilon)$$

è una ϵ -discretizzazione di P .

LEMMA 6.6.8 (Snapping monodirezionale). *Nelle notazioni precedenti siano $v: \text{dgm}(P) \rightarrow S$ e $v: \text{dgm}(Q) \rightarrow S$ i diagrammi di persistenza di P, Q rispettivamente. Allora un'applicazione **iniettiva** $\phi: \text{dgm}(Q) \rightarrow \text{dgm}(P)$ tale che:*

(1) *se $e \in \text{dgm}(Q)$ e $v(e) = (x, y)$ allora*

$$v(\phi(e)) \in]x - \epsilon, x] \times]y - \epsilon, y];$$

(2) *se $e \in \text{dgm}(Q)$ e $p(e) = (x, +\infty)$ allora*

$$v(\phi(e)) \in]x - \epsilon, x] \times \{+\infty\};$$

(3) *$v(\text{dgm}(P) - \phi(\text{dgm}(Q))) \subset \cup_i]a + (i-1)\epsilon, a + i\epsilon]^2$; in particolare ogni elemento non appartenente all'immagine di ϕ ha un intervallo di vita di ampiezza minore di ϵ .*

DIMOSTRAZIONE. Sebbene sia possibile dedurre questa versione dello snapping dalla precedente con argomenti di tipo combinatorio, è istruttivo dare un approccio più diretto. Siccome ogni $P(a + i\epsilon)$ è del tipo $P(t_i)$ per qualche i , ogni base di persistenza \mathcal{B} di P determina in maniera univoca una base di persistenza \mathcal{C} di Q : se $t_i \in T$ è il massimo di $T \cap] - \infty, a + j\epsilon]$ basta prendere $\mathcal{C}_j \subset P(a + j\epsilon)$ una copia di \mathcal{B}_i .

Prendendo gli elementi primordiali in \mathcal{B} e \mathcal{C} otteniamo due rappresentazioni due diagrammi di persistenza $v: \mathcal{B}^\dagger \rightarrow S$ e $v: \mathcal{C}^\dagger \rightarrow S$.

Per ogni elemento primordiale $e \in \mathcal{C}_j^\dagger \subset P(a + j\epsilon)$ esiste un unico elemento primordiale $\phi(e) \in \mathcal{B}^\dagger$ tale che $p(\phi(e)) = e$ (p indica il generico morfismo p_s^t nell'estensione semicontinua di P). Necessariamente $\phi(e) \in P(t_i)$ per qualche $t_i \in]a + (j - 1)\epsilon, a + j\epsilon]$. Inoltre e muore in $a + k\epsilon$, allora $\phi(e)$ deve morire in un punto dell'intervallo $]a + (k - 1)\epsilon, a + k\epsilon]$. Ragionamenti simili per le classi che muoiono all'infinito. Per costruzione, l'immagine di ϕ è data da tutti e soli gli elementi di \mathcal{B}^\dagger il cui intervallo di vita contiene almeno un valore delle serie aritmetica $a, a + \epsilon, \dots, a + n\epsilon$. \square

Vediamo adesso ad una versione bidirezionale dello snapping; per semplicità espositiva tratteremo solo il caso di ϵ -discretizzazioni, ma il lettore volenteroso può adattare l'argomento ad situazioni più generali.

Consideriamo una serie aritmetica del tipo $t_i = t_0 + i\epsilon$, $i = 0, \dots, 2n + 1$ ed un modulo di persistenza di tipo finito

$$(6.8) \quad P(t_0) \rightarrow D(t_1) \rightarrow P(t_2) \rightarrow \dots \rightarrow P(2n) \rightarrow D(2n + 1)$$

in cui l'ultimo $P(2n) \rightarrow D(2n + 1)$ è un isomorfismo. Siano $v: \mu_P \rightarrow S$ e $v: \mu_D \rightarrow S$ i diagrammi di persistenza dei moduli di persistenza "pari"

$$P: \quad P(t_0) \rightarrow P(t_2) \rightarrow \dots \rightarrow P(2n)$$

e "dispari"

$$D: \quad D(t_1) \rightarrow D(t_3) \rightarrow \dots \rightarrow D(2n + 1).$$

LEMMA 6.6.9 (Snapping bidirezionale). *Nelle notazioni precedenti esiste un appaiamento parziale*

$$\text{dgm}(P) \supset A \xrightarrow{f \text{ bigettiva}} B \subset \text{dgm}(D)$$

tale che:

- (1) se $a \in A$ e $v(a) = (x, y)$ allora $v(f(a))$ è uno dei 4 valori $(x \pm \epsilon, y \pm \epsilon)$;
- (2) se $a \in A$ e $v(a) = (x, +\infty)$ allora $v(f(a))$ è uno dei 2 valori $(x \pm \epsilon, +\infty)$;
- (3) se $a \in \text{dgm}(P) - A$ allora $v_a = (t_{2i}, t_{2i+2})$ per qualche i ;
- (4) se $b \in \text{dgm}(D) - B$ allora $v(b) = (t_{2i+1}, t_{2i+3})$ per qualche i ;

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo una base di persistenza del modulo (6.8); è chiaro che le restrizioni \mathcal{B} e \mathcal{C} di tale base ai pari e dispari rispettivamente sono ancora due basi di persistenza di P e D rispettivamente.

Denotiamo con la stessa lettera p tutti i morfismi $P(t_i) \rightarrow D(t_{i+1})$, $D(t_j) \rightarrow DP(t_{j+1})$ e definiamo

$$T = \{e \in \mathcal{B}^\dagger \mid p(e) \in \mathcal{C}^\dagger\}, \quad R = \{e \in \mathcal{C}^\dagger \mid p(e) \in \mathcal{B}^\dagger\}.$$

Per le proprietà delle basi di persistenza, entrambe le applicazioni $p: T \rightarrow \mathcal{C}^\dagger$ e $p: R \rightarrow \mathcal{B}^\dagger$ sono iniettive. Mostriamo che $T \cap p(R) = \emptyset$; infatti, se esistesse $e = p(u) \in T \cap p(R)$ l'elemento $p(e) = p^2(u)$ non potrebbe appartenere a \mathcal{C}^\dagger . Alla stessa maniera si prova $p(T) \cap R = \emptyset$.

Dunque abbiamo un appaiamento parziale $A = T \cup p(R) \xrightarrow{f} p(T) \cup R \subset B$ dove $f|_T = p$ e $f|_R^{-1} = p$.

Per costruzione è chiaro che se $e \in T$ e $v(e) = (x, y)$ allora $v(f(e))$ è uno dei due valori $(x + \epsilon, y \pm \epsilon)$, mentre se $e \in p(R)$ e $v(e) = (x, y)$ allora $v(f(e))$ è uno dei due valori $(x - \epsilon, y \pm \epsilon)$. Siccome $P(2n) \simeq D(2n + 1)$ per ipotesi, un elemento $e \in \mathcal{B}$ è immortale in P se e solo se $p(e)$ è immortale in D e questo implica il punto 2).

Se $e \in \mathcal{B}^\dagger - A$ allora $p(e) = 0$ e quindi il suo intervallo di vita in P è del tipo $[t_{2i}, t_{2i+2}[$: infatti se fosse $p(e) \neq 0$ si avrebbe $p(e) \in \mathcal{C} - \mathcal{C}^\dagger$ e quindi esiste $u \in \mathcal{C}$ tale che $p^2(u) = p(e)$ da cui $p(u) = e$. Dal fatto che $e \notin A$ segue che $u \notin \mathcal{C}^\dagger$, dunque $u = p^2(z)$ e $e = p^2(p(z))$

in contraddizione con il fatto che e è primordiale. La prova che se $b \in \text{dgm}(D) - B$ allora $v(b) = (t_{2i+1}, t_{2i+3})$ per qualche i è del tutto simile.

Il lettore faccia attenzione che nei punti 3 e 4 non vale il viceversa. \square

6.6.1. Esistenza delle basi di persistenza. Dimostriamo adesso l'esistenza di basi cicliche e di persistenza come conseguenza di alcuni risultati di scomposizione in somma diretta, di cui faremo nello studio della stabilità.

Iniziamo con un semplice lemma di algebra lineare.

LEMMA 6.6.10. *Siano $g: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, $v \in V$ tale che $g(v) \neq 0$ e $H \subseteq W$ un sottospazio tale che $W = \text{Span}(g(v)) \oplus H$. Allora vale*

$$V = \text{Span}(v) \oplus g^{-1}(H), \quad \text{dove } g^{-1}(H) = \{u \in V \mid g(u) \in H\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in V$, per ipotesi esistono unici $a \in \mathbb{K}$ e $h \in H$ tali che $g(x) = ag(v) + h$. Ma allora $x - av \in g^{-1}(H)$ e quindi $x = av + (x - av) \in \text{Span}(v) + g^{-1}(H)$. Se $x \in \text{Span}(v) \cap g^{-1}(H)$, allora $x = av$ per qualche $a \in \mathbb{K}$ e $g(x) = ag(v) \in H$. Siccome $g(v) \notin H$ deve essere $a = 0$ quindi $x = av = 0$; questo dimostra che $\text{Span}(v) \cap g^{-1}(H) = 0$, da cui la tesi. \square

Nei lemmi seguenti indicheremo con

$$P: \quad P(t_0) \xrightarrow{p_0} P(t_1) \xrightarrow{p_1} P(t_2) \xrightarrow{p_2} \cdots P(t_m)$$

un modulo di persistenza di tipo finito di spazi vettoriali.

LEMMA 6.6.11. *Nelle notazioni precedenti si assuma $P(t_0) \neq 0$ e sia $0 \leq j \leq m$ il massimo intero tale che $p_{0,j} \neq 0$. Allora per ogni $e \in P(t_0)$ tale che $p_{0,j}(e) \neq 0$ esiste una decomposizione in somma diretta $P = E \oplus H$ dove E è il sottomodulo di persistenza generato dai $j+1$ vettori $e, p_{0,1}(e), \dots, p_{0,j}(e)$.*

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo una decomposizione in somma diretta $P(t_j) = \text{Span}(p_{0,j}(e)) \oplus H_j$.

Per il Lemma 6.6.10 possiamo trovare, per ogni $s = 0, \dots, j$, una decomposizione in somma diretta $P(t_h) = \text{Span}(p_{0,h}(e)) \oplus H_h$ tale che $p_h(H_h) \subseteq H_{h+1}$ per ogni $h < j$: ad esempio si può prendere, in maniera ricorsiva, $H_{j-1} = p_{j-1}^{-1}(H_j)$, $H_{j-2} = p_{j-2}^{-1}(H_{j-1})$ e così via. Abbiamo quindi definito due sottomoduli di persistenza

$$H_0 \xrightarrow{p_0} \cdots \longrightarrow H_j \xrightarrow{p_j} P(t_{j+1}) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_{m-1}} P(t_m),$$

$$\text{Span}(e) \xrightarrow{p_0} \cdots \longrightarrow \text{Span}(p_{0,j}(e)) \xrightarrow{p_j} 0 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_{m-1}} 0,$$

la cui somma diretta è P . \square

LEMMA 6.6.12. *Nelle notazioni precedenti si assuma $P(t_m) \neq 0$ e sia $0 \leq j \leq m$ il minimo intero tale che $p_{j,m} \neq 0$. Allora per ogni $e \in P(t_j)$ e $\alpha \in P(t_m)^\vee$ tali che $\alpha(p_{j,m}(e)) \neq 0$ esiste una decomposizione in somma diretta $P = E \oplus H$ dove E è il sottomodulo di persistenza generato dai $m-j+1$ vettori $e, p_{j,j+1}(e), \dots, p_{j,m}(e)$ e $H(t_i) = \ker(\alpha \circ p_{i,m})$ per ogni i .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la decomposizione in somma diretta $P(t_m) = \text{Span}(p_{j,m}(e)) \oplus \ker(\alpha)$. Ponendo $H_i = p_{i,m}^{-1}(\ker(\alpha))$ per ogni i , si ha $H_i = P(t_i)$ per $i < j$ e $P(t_s) = \text{Span}(p_{j,s}(e)) \oplus H_s$ per $s \geq j$. Dunque P è la somma diretta dei due sottomoduli di persistenza

$$P(t_0) \xrightarrow{p_0} \cdots \longrightarrow P(t_{j-1}) \xrightarrow{p_{j-1}} H_j \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_{m-1}} H_m,$$

$$0 \xrightarrow{p_0} \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{p_{j-1}} \text{Span}(e) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_{m-1}} \text{Span}(p_{j,m}(e)).$$

\square

TEOREMA 6.6.13. *Ogni modulo di persistenza di tipo finito di spazi vettoriali possiede basi di persistenza e basi cicliche.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle notazioni della Definizione 6.6.2 ragioniamo per induzione sulla somma $\sum_{i=0}^k \dim P(t_i)$ delle dimensioni degli spazi vettoriali. Possiamo usare indifferentemente sia il Lemma 6.6.11 che il Lemma 6.6.12; dovendo sceglierne uno usiamo il primo.

Se $P(t_i) = 0$ per ogni i non c'è nulla da dimostrare, altrimenti sia $i \geq 0$ il più piccolo indice tale che $P(t_i) \neq 0$. Sia j il più grande indice tale che $p_{i,j} \neq 0$ e scegliamo un vettore $e \in P(t_i)$ tale che $p_{i,j}(e) \neq 0$.

Per il Lemma 6.6.11 esiste una scomposizione in somma diretta di sottomoduli di persistenza $P = E \oplus H$, dove e è una base ciclica di E . Per induzione E ed H possiedono basi di persistenza (risp.: cicliche) e la loro unione è una base di persistenza (risp.: ciclica) per P . \square

OSSERVAZIONE 6.6.14. Vi è un'altra dimostrazione, forse meno elegante e più algoritmica, del Teorema 6.6.13 che ha il vantaggio di estendersi, con l'aiuto del lemma di Zorn, ad ogni modulo di persistenza di spazi vettoriali definito su un sottoinsieme bene ordinato di \mathbb{R} . Diamo una traccia di tale dimostrazione lasciando al lettore interessato il compito di completare i dettagli.

Se V è uno spazio vettoriale, $U \subset V$ un sottospazio e $\mathcal{A} \subset V$ un sottoinsieme, diremo che \mathcal{A} è una cobase di U in V se i vettori di \mathcal{A} sono linearmente indipendenti e se $U \oplus \text{Span}(\mathcal{A}) = V$, ossia se la proiezione di \mathcal{A} al quoziente V/U è una base.

Nelle notazioni della Definizione 6.6.2 si consideri la sequenza di istruzioni:

- prendere una cobase $\mathcal{B}_{0,j}$ di $\ker(p_{0,j-1})$ in $\ker(p_{0,j})$ per ogni $j > 0$;
- prendere una cobase $\mathcal{B}_{0,\infty}$ di $\ker(p_{0,m})$ in $P(t_0)$;
- estendere $p_0(\mathcal{B}_{0,j})$ ad una cobase $\mathcal{B}_{1,j}$ di $\ker(p_{1,j-1})$ in $\ker(p_{1,j})$ per ogni $j > 1$;
- estendere $p_0(\mathcal{B}_{0,\infty})$ ad una cobase $\mathcal{B}_{1,\infty}$ di $\ker(p_{1,m})$ in $P(t_1)$;
- estendere $p_1(\mathcal{B}_{1,j})$ ad una cobase $\mathcal{B}_{2,j}$ di $\ker(p_{2,j-1})$ in $\ker(p_{2,j})$ per ogni $j > 2$;
- estendere $p_1(\mathcal{B}_{1,\infty})$ ad una cobase $\mathcal{B}_{2,\infty}$ di $\ker(p_{2,m})$ in $P(t_2)$;
- eccetera eccetera.

L'unione di tutti i $\mathcal{B}_{i,j}$ sarà la base di persistenza cercata.

OSSERVAZIONE 6.6.15. Il metodo in assoluto più SNOB, e tuttavia ampiamente usato in letteratura, per dimostrare il Teorema 6.6.13 è quello di usare il teorema di classificazione dei moduli graduati finitamente generati sull'anello ad ideali principali dei polinomi.

Esercizi:

ESERCIZIO 29. Usare l'esistenza delle basi di persistenza per dimostrare che un modulo di persistenza di tipo finito a valori spazi vettoriali è determinato, a meno di isomorfismo, dalla successione delle molteplicità $\mu^{i,j}$.

ESERCIZIO 30. Nelle notazioni di 6.6.2, mostrare che dare una base di persistenza equivale a dare, per ogni $i = 0, \dots, m$ una base \mathcal{B}_i di $P(t_i)$ e $m - i$ sottoinsiemi $\mathcal{B}_{i,j} \subset \mathcal{B}_i$, $i < j \leq m$, tali che:

- (1) $\cup_{i < s \leq j} \mathcal{B}_{i,s}$ è una base di $\ker(p_{i,j})$ per ogni $i < j$;
- (2) $p_i(\mathcal{B}_{i,j}) \subset \mathcal{B}_{i+1,j}$ per ogni $j > i + 1$.

6.7. Stabilità del diagramma di persistenza

Riepilogando, da un insieme finito di dati (point cloud, grafo pesato ecc.) mediante varie procedure (Vietoris–Rips, complessi di cricche ecc.) si ottiene un complesso filtrato (K, f) di tipo finito.

I gruppi di omologia permettono di associare al complesso filtrato (K, f) una successione di moduli di persistenza $H_n(K(t_\bullet))$, $n \in \mathbb{N}$, tutti di tipo finito.

Sia $t_0 < t_1 < \dots$ la successione dei suoi valori critici in ordine crescente (abbiamo già dimostrato che ogni intervallo limitato contiene un numero finito di valori critici). Per ogni intero $n \geq 0$ fissato, gli n -esimi gruppi di omologia della catena ascendente dei sottocomplessi di livello $K(t_0) \subset K(t_1) \subset \dots$ determinano un diagramma di persistenza

$$(6.9) \quad 0 \rightarrow H_n(K(t_0)) \xrightarrow{p_0} H_n(K(t_1)) \xrightarrow{p_1} H_n(K(t_2)) \xrightarrow{p_2} \dots,$$

dove p_s è il morfismo indotto in omologia dall'inclusione $K(t_s) \subset K(t_{s+1})$. Osserviamo inoltre che, essendo per ipotesi $K(t)$ un complesso simpliciale astratto finito per ogni t , i gruppi di omologia $H_n(K(t_i))$ sono finitamente generati.

È chiaro dalle definizioni che un elemento può nascere e morire solo su dei valori critici di f , pertanto gli estremi degli intervalli di vita sono sempre dei valori critici. In linea teorica per ogni complesso simpliciale filtrato (K, f) abbiamo una successione infinita di moduli di persistenza; nella pratica, quasi sempre K ha dimensione finita e quindi il modulo di persistenza $H_n(K(t_\bullet))$ è banale per ogni $n > \dim K$.

Esiste il problema della stabilità rispetto a piccole perturbazioni. Ad esempio, prendendo una nuvola di punti $I \subset \mathbb{R}^n$ possiamo ad essa associare il complesso filtrato di Vietoris–Rips (K, v) , $K = \Delta^I$. Se spostiamo anche di pochissimo i punti di I , i valori critici di v cambiano e si ha una diversa filtrazione di sottocomplessi di livello.

Quello che succede, e che tra poco formalizzeremo e dimostreremo, è che a seguito di una piccola perturbazione:

- (1) le classi di omologia persistente che si creano (per effetto della perturbazione) hanno una breve durata di vita;
- (2) le classi di omologia persistente che si distruggono (per effetto della perturbazione) avevano una breve durata di vita;
- (3) ogni classe con intervallo di vita $[a, b[$ sufficientemente lungo³ si “trasforma” in una classe con intervallo di vita $[a', b'[$, con a vicino ad a' e b vicino ad b' .

Da ciò traiamo il seguente insegnamento:

1) ha senso interpretare come significativi solo gli intervalli di vita lunghi, mentre quelli corti devono essere considerati “rumore topologico” e quindi non significativi del dato che si vuole interpretare.

2) Abbiamo già dimostrato che nella filtrazione di Vietoris–Rips, piccole perturbazioni del point cloud (nel senso della distanza di Hausdorff) producono piccole perturbazioni del complesso filtrato (nel senso della distanza di contiguità), che a loro volta producono piccole perturbazioni (nel senso della distanza di interfoglia) del modulo di persistenza.

Dimostreremo tra poco (Corollario 6.7.4) che piccole perturbazioni del modulo di persistenza producono piccole perturbazioni del diagramma di persistenza nel senso della distanza bottleneck.

La proprietà che a piccole perturbazioni dei dati devono corrispondere piccole perturbazioni del diagramma di persistenza viene detta **stabilità** ed è l'ingrediente senza il quale quello che abbiamo sviluppato non sarebbe altro che un bell'esercizio intellettuale senza alcuna applicazione pratica. In generale ogni tipo di passaggio dai dati ai complessi filtrati, per avere un qualche interesse applicativo, dovrà soddisfare la condizione di stabilità.

3) Recentemente si intravedono alcune applicazioni dell'omologia persistente anche in ambiti della matematica pura, come ad esempio la geometria algebrica [14]. In tale ambito, più che come spazio metrico, l'insieme dei barcode ci interessa maggiormente come insieme degli oggetti di una categoria tale che il passaggio da complessi filtrati a barcode sia un funtore [1].

Qualora S sia uno spazio pseudo-metrico, con funzione distanza d , accessoriatamente con una funzione di rumore r , possiamo estendere la distanza bottleneck ai multi-insiemi di base S .

³Ossia contenente un numero abbastanza alto, in senso statistico, di valori critici.

Per ogni insieme non vuoto X , definiamo una pseudo-distanza ed una funzione di rumore sul prodotto $S \times X$ ponendo

$$d((s_1, x_1), (s_2, x_2)) = d(s_1, s_2), \quad r(s, x) = r(s).$$

Dati due multi-insiemi A, B di base S , scegliamo due rappresentazioni poldrome che li rappresentano $A', B' \subset S \times X$ sullo stesso insieme di indici e definiamo

$$d_b(A, B) = d_b(A', B')$$

dove $d_b(A', B')$ è la distanza bottleneck definita alla Sezione 5.2. Per vedere che tale definizione non dipende dalla scelta delle rappresentazioni poldrome, siano $A'', B'' \subset S \times Y$ e $\alpha: A' \rightarrow A'', \beta: B' \rightarrow B''$ sono due applicazioni bigettive che commutano con le proiezioni su S ; siccome $d(\alpha(a), \beta(b)) = d(a, b)$, $r(\alpha(a)) = r(a)$, e $r(\beta(b)) = r(b)$, la ovvia bigezione tra appaiamenti parziali indotta dalla coppia α, β lascia invariati i costi e quindi la distanza bottleneck risulta ben definita.

In particolare, prendendo sul semipiano esteso

$$S = \{(a, b) \mid a \leq b\} \subset (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$$

la pseudo-distanza d e la funzione di rumore r date da

$$d((a, b), (c, d)) = \max(|a - c|, |b - d|), \quad r(a, b) = \frac{1}{2}(b - a),$$

possiamo definire la distanza bottleneck su qualunque insieme di diagrammi di persistenza. Si noti che

$$r(a, b) = \frac{1}{2}(b - a) = d\left((a, b), \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)\right)$$

è la funzione distanza dalla diagonale di $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2$.

TEOREMA 6.7.1. *Sia $f: P \rightarrow Q$ un morfismo surgettivo di moduli di persistenza di tipo finito su $T \subset \mathbb{R}$ e sia $0 < \varepsilon < +\infty$ tale che f abbia ε -kernel. Esiste allora un'applicazione iniettiva*

$$g: \text{dgm}(Q) \rightarrow \text{dgm}(P)$$

tale che:

- (1) gli elementi estranei all'immagine di g hanno tempo di vita $\leq \varepsilon$.
- (2) se $e \in \text{dgm}(Q)$ e $v(e) = (a, b)$, allora $vg(e) = (a, c)$ con $b \leq c \leq b + \varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE. Prima di procedere, osserviamo che se $T = \{t_0 < \dots < t_m\}$, allora l'ipotesi di avere ε -kernel implica che $f: P(t_m) \rightarrow Q(t_m)$ è un isomorfismo e quindi $x \in P$ è immortale se e solo se $f(x)$ è immortale.

Ragioniamo per induzione sulla somma delle dimensioni degli spazi vettoriali. Possiamo supporre che $P(t_0)$ e $Q(t_0)$ non siano entrambi nulli. Se $Q(t_0) \neq 0$ allora anche $P(t_0) \neq 0$, quindi non è restrittivo supporre $P(t_0) \neq 0$ ed è ben definito il massimo intero j tale che $p_{0,j} \neq 0$.

Se $Q(t_0) = 0$ ed $e \in P(t_0)$ è tale che $p_{0,j}(e) \neq 0$, allora $f(e) = 0$ ed a maggior ragione $f p_{0,i}(e) = 0$ per ogni i . Dunque si ha $P = E \oplus H$ con e base ciclica di E . Dunque $\text{dgm}(P)$ è l'unione disgiunta di $\text{dgm}(E)$ e $\text{dgm}(H)$. Siccome $E \subset \ker(f)$ l'intervallo di vita di e ha ampiezza $\leq \varepsilon$ e la restrizione $H \rightarrow Q$ è surgettiva. Per induzione esiste $g: \text{dgm}(Q) \rightarrow \text{dgm}(H)$ che soddisfa le ipotesi del teorema.

Se $Q(t_0) \neq 0$ sia h il massimo intero tale che $q_{0,h} \neq 0$ e siano $e_1, e_2 \in P(t_0)$ tali che $p_{0,j}(e_1) \neq 0$, $f p_{0,h}(e_2) \neq 0$. Allora per e uguale ad almeno uno dei tre vettori $e_1, e_2, e_1 + e_2$ si ha $p_{0,j}(e) \neq 0$, $f p_{0,h}(e) = q_{0,h}(f(e)) \neq 0$.

Dunque si hanno due decomposizioni $P = E \oplus H$, $Q = f(E) \oplus K$ dove e è base ciclica di E e $f(e)$ base ciclica di $f(E)$. Si ha inoltre un diagramma commutativo di successioni esatte corte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & P & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f|_E & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} & & \\ 0 & \longrightarrow & f(E) & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Siccome $f|_E$ è surgettiva, il lemma del serpente implica che \bar{f} è surgettivo con ε -kernel. Al morfismo \bar{f} si applica l'ipotesi induttiva. D'altra parte $\text{dgm}(P) = \{e\} \cup \text{dgm}(H)$, $\text{dgm}(Q) = \{f(e)\} \cup \text{dgm}(K)$, $v(e) = (t_0, t_{j+1})$, $v(f(e)) = (t_0, t_{h+1})$. Siccome $p_{0,h+1}(e) \in \ker(f)$ si ha

$$p_{t_0}^{t_{h+1}+\varepsilon} = p_{t_{h+1}}^{t_{h+1}+\varepsilon}(p_{0,h+1}(e)) = 0$$

e questo implica che $t_{h+1} + \varepsilon \geq t_{j+1}$, ossia $t_{h+1} \leq t_{j+1} \leq t_{h+1} + \varepsilon$. \square

TEOREMA 6.7.2. *Sia $f: P \rightarrow Q$ un morfismo iniettivo di moduli di persistenza di tipo finito su $T \subset \mathbb{R}$ e sia $0 < \varepsilon < +\infty$ tale che f abbia ε -cokernel. Esiste allora un'applicazione iniettiva*

$$g: \text{dgm}(P) \rightarrow \text{dgm}(Q)$$

tale che:

- (1) gli elementi in $\text{dgm}(Q)$ estranei all'immagine di g hanno tempo di vita $\leq \varepsilon$.
- (2) se $e \in \text{dgm}(P)$ e $v(e) = (a, b)$, allora $vg(e) = (c, b)$ con $a - \varepsilon \leq c \leq a$.

DIMOSTRAZIONE. Prima di procedere, osserviamo che se $T = \{t_0 < \dots < t_m\}$, allora l'ipotesi di avere ε -cokernel implica che $f: P(t_m) \rightarrow Q(t_m)$ è un isomorfismo e quindi $x \in P$ è immortale se e solo se $f(x)$ è immortale.

Ragioniamo per induzione sulla somma delle dimensioni degli spazi vettoriali. Sia $h \leq m$ il massimo intero per cui $Q(t_h) \neq 0$ e j il minimo intero tale che $q_{j,h} \neq 0$. Sia $\alpha \in Q(t_h)^\vee$ tale che $\alpha q_{j,h} \neq 0$. Distinguiamo due casi:

1) $\alpha f(P(t_h)) = 0$: consideriamo la decomposizione $Q = E \oplus H$ con $H(t_i) = \ker(\alpha p_{i,h})$ e osserviamo che $f(P) \subset H$ ed il morfismo iniettivo $f: P \rightarrow H$ ha ancora ε -cokernel. Inoltre $\mu_Q = \mu_H \cup \mu_E$ e μ_E contiene un solo elemento con tempo di vita $\leq \varepsilon$.

2) $\alpha f(P(t_h)) \neq 0$ e sia k il più piccolo intero tale che $p_{k,h} \neq 0$. Siccome f è iniettiva esiste $\beta \in Q(t_h)^\vee$ tale che $\beta f p_{k,h} \neq 0$.

A meno di cambiare α con β oppure con $\alpha + \beta$, non è restrittivo assumere $\alpha q_{j,h} \neq 0$ e $\alpha f p_{k,h} \neq 0$. Prendendo $H(t_i) = \ker(\alpha q_{i,h})$ e $K(t_i) = \ker(\alpha q_{i,h} f)$ abbiamo $f: K \rightarrow H$ iniettiva e due decomposizioni in somma diretta $P = K \oplus U$, $Q = H \oplus E$, dove E, U hanno entrambi un generatore ciclico $e \in Q(t_j)$ e $u \in P(t_k)$ rispettivamente.

Si ha un diagramma commutativo di successioni esatte corte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f|_K & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} & & \\ 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Siccome \bar{f} è iniettivo ne segue che anche $f: K \rightarrow H$ ha ε -conucleo e le stesse considerazioni del teorema precedente mostrano che $t_k - t_j \leq \varepsilon$. \square

COROLLARIO 6.7.3. *Sia $f: P \rightarrow Q$ un morfismo di moduli di persistenza di tipo finito e sia $0 < \varepsilon < +\infty$ tale che f abbia ε -kernel e ε -cokernel. Allora $d_B(\text{dgm}(P), \text{dgm}(Q)) \leq \varepsilon$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $R \subset Q$ l'immagine di f . Allora $f: P \rightarrow R$ è surgettivo con ε -kernel e $R \rightarrow Q$ è iniettivo con ε -cokernel. Basta adesso applicare i risultati dei due teoremi precedenti per produrre un appaiamento parziale tra $\text{dgm}(P)$ e $\text{dgm}(Q)$ il cui costo è $\leq \varepsilon$. \square

COROLLARIO 6.7.4. *Siano P, Q due moduli di persistenza di tipo finito. Allora*

$$d_B(\text{dgm}(P), \text{dgm}(Q)) \leq 3d_i(P, Q).$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre $d_i(P, Q) < \infty$ e basta dimostrare che se P, Q sono ε -interfogliati allora $d_B(\text{dgm}(P), \text{dgm}(Q)) \leq 3\varepsilon$.

Abbiamo visto che se $f: P \rightarrow Q[\varepsilon]$ è una componente di una ε -interfoglia, allora f ha 2ε -kernel e 2ε -cokernel.

Prendendo come $T = \{t_0 < \dots < t_m\} \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme finito contenente tutti i valori critici di P e $Q[\varepsilon]$ e tale che $f: P(t_m) \rightarrow Q[\varepsilon](t_m)$ sia un isomorfismo, per il corollario precedente $d_B(\text{dgm}(P), \text{dgm}(Q[\varepsilon])) \leq 2\varepsilon$. Per concludere basta osservare che $\text{dgm}(Q)$ è ottenuto da $\text{dgm}(Q[\varepsilon])$ componendo con la traslazione in S di vettore $(\varepsilon, \varepsilon)$. \square

Nella dimostrazione del Corollario 6.7.4 abbiamo usato solo una minima parte delle condizioni conseguenti alla ε -interfoglia ed è quindi ragionevole attendersi una disuguaglianza migliore tra le distanze bottleneck e interfoglia. Infatti, vale il seguente teorema (non banale) che riportiamo senza dimostrazione.

TEOREMA 6.7.5 (teorema di isometria). *Per due moduli di persistenza di tipo finito P, Q si ha $d_B(\text{dgm}(P), \text{dgm}(Q)) = d_i(P, Q)$.*

Osserviamo inoltre che non è difficile dare una diversa dimostrazione del Corollario 6.7.4 usando le ε -discretizzazioni e gli snapping lemma mono e bidirezionali, vedi ad esempio [16].

Bibliografia

- [1] Bauer, U., Lesnick, M.: Persistence Diagrams as Diagrams: A Categorification of the Stability Theorem. arxiv:1610.10085. [108](#), [116](#)
- [2] Carlsson, G.: Topology and data. Bull. AMS Volume **46**, Number 2, 255-308 (2009). [97](#)
- [3] Deo, S.: Algebraic Topology, a Primer. Springer (2018). [76](#)
- [4] Dold, A.: Lectures on algebraic topology. Second edition, Springer, Berlin Heidelberg New York (1980). [76](#)
- [5] Edelsbrunner, H.: A short course in computational geometry and topology. [100](#)
- [6] Edelsbrunner, H., Harer, J.: Persistent Homology - a survey. Contemporary Mathematics **453**, pp. 257-282 (2008). [97](#)
- [7] Edelsbrunner, H., Morozov, D.: Persistent Homology: Theory and Practice. Proceedings of the European Congress of Mathematics, 2012, pp. 31-50. [97](#)
- [8] P.R. Halmos: Naive set theory. D. Van Nostrand Co. Princeton, N.J. (1960).
- [9] Greenberg, M., Harper, J.: Algebraic Topology: A First Course. Addison-Wesley (1981). [76](#)
- [10] Hatcher, A.: Algebraic Topology. (2001). [76](#)
- [11] Hilton P.J., Stammbach U.: A Course in Homological Algebra. Second Edition, Springer (1997).
- [12] Nathan Jacobson: Basic Algebra, I. San Francisco (1974). [108](#)
- [13] Manetti, M.: Topologia, seconda edizione, Springer (2014) [12](#), [22](#)
- [14] Yuri I. Manin, Matilde Marcolli: Nori diagrams and persistent homology. arXiv:1901.10301. [116](#)
- [15] Müllner, D., Babu, A.: Python Mapper: An open-source toolchain for data exploration, analysis and visualization. <http://danifold.net/mapper> (2013). [95](#)
- [16] Oudot, S.Y.: Persistence Theory: From Quiver Representations to Data Analysis. Mathematical Surveys and Monographs Volume 209, American Mathematical Society Providence, Rhode Island (2015). [101](#), [119](#)
- [17] Paparozzi, V.: Omologia persistente applicata allo studio del connettoma. Tesi di Laurea in Matematica, Roma (2018). [99](#)
- [18] Singer, I.M., Thorpe, J.A.: Lecture notes on elementary topology and geometry. Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill. (1967). [6](#)
- [19] Spanier, E.H.: Algebraic topology. McGraw-Hill (1966). [10](#)
- [20] Ashley Suh, Mustafa Hajij, Bei Wang, Carlos Scheidegger, and Paul Rosen: Persistent Homology Guided Force-Directed Graph Layouts. arXiv:1712.05548 [99](#)
- [21] Vick, J.W.: Homology theory. Springer, Berlin Heidelberg New York (1994). [76](#)
- [22] Weinberger, S.: What is Persistent Homology? Notices of the AMS, Volume **58**, Number 1, 36–39 (2011) [97](#)