

1.5. Moduli di persistenza

I moduli di persistenza sono uno strumento dell'algebra lineare che trova applicazioni in alcune recenti tecniche di matematica applicata alla teoria del riconoscimento automatico delle immagini ed allo studio topologico di grandi basi di dati.

DEFINIZIONE 1.5.1. Un **modulo di persistenza** sul campo \mathbb{K} è un diagramma in serie di spazi vettoriali di dimensione finita ed applicazioni lineari:

$$V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \longrightarrow V_i \xrightarrow{f_i} \dots \longrightarrow V_j \xrightarrow{f_j} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k, \quad k \geq 1.$$

\curvearrowright
 $f_{i,j}$

In riferimento al precedente diagramma, per ogni $i < j$ denoteremo $f_{i,j}$ la composizione delle applicazioni da V_i a V_j , e con $r_{i,j} = \text{rg}(f_{i,j})$ il suo rango. Per convenzione poniamo $f_{i,i}$ uguale all'identità su V_i . Per convenienza notazionale conviene estendere il diagramma ponendo $V_i = 0$ per ogni $i \leq 0$ oppure $i > k$ (e di conseguenza $f_i = 0$ per ogni $i \leq 0$ oppure $i \geq k$).

Sia \mathcal{B}_i una base dello spazio vettoriale V_i per ogni indice i . L'unione $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ viene detta una **base di persistenza** se per ogni $i < k$ ed ogni $e \in \mathcal{B}_i$ si ha $f_i(e) = 0$ oppure $f_i(e) \in \mathcal{B}_{i+1}$.

LEMMA 1.5.2. *Siano $g: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, $v \in V$ tale che $g(v) \neq 0$ e $H \subseteq W$ un sottospazio tale che $W = \text{Span}(g(v)) \oplus H$. Allora*

$$V = \text{Span}(v) \oplus g^{-1}(H), \quad \text{dove } g^{-1}(H) = \{u \in V \mid g(u) \in H\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Semplice e lasciata per esercizio. \square

TEOREMA 1.5.3. *Ogni modulo di persistenza possiede una base di persistenza.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle notazioni della Definizione 1.5.1, dimostriamo il teorema per induzione sulla somma delle dimensioni degli spazi V_i . Se $V_i = 0$ per ogni i non c'è nulla da dimostrare, altrimenti a meno di scorrere gli indici possiamo supporre $V_1 \neq 0$. Sia $1 \leq j \leq k$ in più grande indice tale che $f_{1,k} \neq 0$; scegliamo un vettore $e \in V_1$ tale che $f_{1,j}(e) \neq 0$ ed una decomposizione in somma diretta $V_j = \text{Span}(f_{1,j}(e)) \oplus H_j$.

Per il Lemma 1.5.2 possiamo trovare, per ogni $i = 1, \dots, j$, una decomposizione in somma diretta $V_i = \text{Span}(f_{1,i}(e)) \oplus H_i$ tale che $f_i(H_i) \subseteq H_{i+1}$ per ogni $i < j$: ad esempio si può prendere, in maniera ricorsiva, $H_{j-1} = f_{j-1}^{-1}(H_j)$, $H_{j-2} = f_{j-2}^{-1}(H_{j-1})$ e così via. Abbiamo quindi un nuovo modulo di persistenza

$$H_1 \xrightarrow{f_1} \dots \longrightarrow H_j \xrightarrow{f_j} V_{j+1} \longrightarrow \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k,$$

che per l'ipotesi induttiva possiede una base di persistenza \mathcal{B} . Allora l'unione di \mathcal{B} con i vettori $e, f_1(e), f_{1,3}(e), \dots, f_{1,j}(e)$ è una base di persistenza del modulo di partenza. \square

Data una base di persistenza $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$, dati $i < j$ diremo che un elemento $e \in \mathcal{B}$ nasce in i e muore in j se:

- (1) $e \in \mathcal{B}_i$ e $f_{i,j-1}(e) \in \mathcal{B}_{j-1}$;
- (2) $f_{i,j}(e) = 0$;
- (3) $e \notin f_{i-1}(\mathcal{B}_{i-1})$.

Abbiamo chiaramente usato la convenzione che $f_i = 0$ se $i < 1$ oppure se $i \geq k$.

Per ogni $i < j$ denoteremo con $\beta_{i,j}$ il numero di elementi di \mathcal{B} che nascono in i e muoiono in j .

TEOREMA 1.5.4. *Per ogni $i < j$ si ha*

$$\beta_{i,j} = r_{i,j-1} + r_{i-1,j} - r_{i,j} - r_{i-1,j-1}$$

e quindi i numeri $\beta_{i,j}$ non dipendono dalla base di persistenza scelta.

DIMOSTRAZIONE. Se denotiamo con $\gamma_{i,j}$ il numero di elementi che nascono in i e sono ancora vivi in $j-1$, ossia coloro che soddisfano le precedenti condizioni (1) e (3), allora vale $\beta_{i,j} = \gamma_{i,j} - \gamma_{i,j+1}$. Dalla definizione di base di persistenza, segue che $r_{i,j-1}$ è esattamente uguale al numero di elementi di \mathcal{B}_i che sono ancora vivi in $j-1$. Da ciò segue che $\gamma_{i,j} = r_{i,j-1} - r_{i-1,j-1}$. \square

L'insieme dei numeri $\beta_{i,j}$ viene detto *diagramma di persistenza*.³

Esercizi.

1.46. Sia $f: V \rightarrow V$ nilpotente con indice di nilpotenza k e si consideri il modulo di persistenza

$$V \xrightarrow{f} f(V) \xrightarrow{f} f^2(V) \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} f^{k-1}(V).$$

Calcolare il diagramma di persistenza in funzione del diagramma di Young di f .

1.47. Sia $f: V \rightarrow V$ idempotente, ossia $f^2 = f$, di rango r . Calcolare il diagramma di persistenza di

$$V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{f} V.$$

1.6. Complementi: la decomposizione di Dunford

Talvolta, al posto della forma canonica di Jordan può essere utile usare un risultato conosciuto come decomposizione di Dunford. Per semplicità espositiva assumeremo che gli spazi vettoriali siano definiti su di un campo infinito \mathbb{K} : il risultato è vero anche sui campi finiti, ma in tal caso è richiesta una diversa dimostrazione.

LEMMA 1.6.1. *Siano $f, g: V \rightarrow V$ due endomorfismi tali che $fg = gf$:*

- (1) *se f è invertibile, allora $f^{-1}g = gf^{-1}$;*
- (2) *se g è nilpotente, allora fg è nilpotente;*
- (3) *se f e g sono nilpotenti, allora $f + g$ è nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. 1) Si ha $gf^{-1} = f^{-1}fgf^{-1} = f^{-1}gff^{-1} = f^{-1}g$.

2) Basta osservare che $(fg)^k = f^k g^k$. Si noti che se f è invertibile, per il punto precedente $f^{-1}g = gf^{-1}$ e quindi anche $f^{-1}g$ è nilpotente.

3) Siano $h, k > 0$ tali che $f^h = g^k = 0$ e proviamo che $(f + g)^{h+k-1} = 0$. Siccome f e g commutano tra loro, vale lo sviluppo di Newton del binomio

$$(f + g)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^i g^{n-i}.$$

Se $n \geq h + k - 1$ possiamo scrivere

$$(f + g)^n = \sum_{i=0}^{h-1} \binom{n}{i} f^i g^{n-i} + \sum_{i=h}^n \binom{n}{i} g^{n-i} f^i.$$

e ogni addendo di $(f + g)^n$ nella precedente espressione è nullo. \square

ESEMPIO 1.6.2. Si consideri lo spazio vettoriale V delle combinazioni lineari a coefficienti reali dei monomi $1, x, y, xy$ e si considerino i due operatori $\partial_x, \partial_y: V \rightarrow V$ definiti dalle relazioni

$$\begin{aligned} \partial_x(1) = \partial_x(y) = 0, \quad \partial_x(x) = 1, \quad \partial_x(xy) = y, \\ \partial_y(1) = \partial_y(x) = 0, \quad \partial_y(y) = 1, \quad \partial_y(xy) = x. \end{aligned}$$

Allora $\partial_x^2 = \partial_y^2 = 0$, $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$ e per il lemma precedente $(\partial_x + \partial_y)^3 = 0$. Merita osservare che $(\partial_x + \partial_y)^2 \neq 0$.

LEMMA 1.6.3. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f, g: V \rightarrow V$ due endomorfismi tali che $fg = gf$. Se g è nilpotente, allora f e $f + g$ hanno lo stesso determinante, lo stesso polinomio caratteristico e la stessa decomposizione di Fitting. In particolare f è triangolabile se e solo se $f + g$ è triangolabile.*

³Per amor di precisione, in letteratura il diagramma di persistenza viene definito come l'applicazione $D = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 < i < j\} \rightarrow \mathbb{Z}, (i, j) \mapsto \beta_{i,j}$.